



شماره پایان نامه :

## دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده فنی و مهندسی

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی عمران

گرایش سازه های هیدرولیکی

عنوان :

شبیه سازی مسیر گسترش ترک در بتن تحت اثر بارهای حرارتی با استفاده از ترکیب  
روشهای بدون شبکه و تئوری ریزصفحات

استاد راهنما:

دکتر مجتبی لیب زاده

استاد مشاور:

دکتر حمیدرضا غفوری

نگارنده :

مهدی زرچی

شهریورماه سال ۱۳۸۹

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ



شماره پایان نامه :

## دانشگاه شهید چمران اهواز

دانشکده فنی و مهندسی

پایان نامه کارشناسی ارشد مهندسی عمران

گرایش سازه های هیدرولیکی

عنوان :

شبیه سازی مسیر گسترش ترک در بتن تحت اثر بارهای حرارتی با استفاده از ترکیب  
روشهای بدون شبکه و تئوری ریزصفحات

استاد راهنما:

دکتر مجتبی لیب زاده

استاد/اساتید مشاور:

دکتر حمیدرضا غفوری

نگارنده :

مهدی زرچی

شهریورماه سال ۱۳۸۹

تقدیم به

مادر عزیز و پدر بزرگوارم

که

پس از خداوند بزرگ،

آنان را می پرستم

## تقدیر و تشکر

در آغاز سخن، خداوند بزرگ را شکر می گویم که انوار رحمتش را در لحظه لحظه زندگی خود حس می کنم و بدون الطاف او به پایان رسانیدن مجموعه حاضر بر من ممکن نبود. تشکر می کنم از پدر و مادر عزیز و مهربانم که در تمامی مراحل زندگی پشتیبان من بوده اند. نیکمی دانم که قدردانی از این بزرگواران در حد و اندازه حقیر نیست، پس هر آنچه نیکی و رحمت است برایشان از خداوند بزرگ مسألت دارم. از استاد گرانقدرم، جناب آقای دکتر مجتبی لیب زاده، کمال تشکر را دارم که هیچ گاه سؤالها و کاستیهای من ایشان را ناامید نساخت و همواره با سعه صدر اینجانب را در به انجام رسانیدن مجموعه حاضر یاری فرمود. همچنین از جناب آقای دکتر حمید رضا غفوری نیز بابت راهنماییهایشان تشکر می کنم.

## فهرست مطالب

و	چکیده
ز	فهرست مطالب
ک	فهرست اشکال و جداول
۱	فصل یک: مقدمه
۱	۱-۱- کلیات
۲	۲-۱- تعریف مسئله
۳	۳-۱- روش چندصفحه‌ای ریزمقیاس
۵	۱-۳-۱- تاریخچه روشهای چند صفحه‌ای
۷	۴-۱- اهداف و حیطة تحقیق
۸	۵-۱- چشم‌انداز پایان‌نامه
۱۰	فصل دو: روشهای بدون شبکه اجزاء
۱۰	۱-۲- تعریف
۱۴	۲-۲- مشکلات روشهای وایسته به اجزاء
۱۶	۳-۲- ایده روشهای بدون جزء
۱۷	۴-۲- روشهای بدون جز در مسائل مهندسی
۱۹	۱-۴-۲- پدیده های فیزیکی در مهندسی
۲۰	۲-۴-۲- مراحل حل
۲۱	۳-۴-۲- مدل سازی هندسه مساله
۲۵	۴-۴-۲- گره گذاری
۲۸	۵-۴-۲- ایجاد تابع شکل
۲۹	۶-۴-۲- خصوصیات مصالح
۳۰	۷-۴-۲- شرایط مرزی، اولیه و بارگذاری
۳۰	۸-۴-۲- شبیه سازی
۳۰	۱-۸-۴-۲- معادلات گسسته سیستم
۳۲	۲-۸-۴-۲- روشهای حل دستگاه معادلات

۳۴	۵-۲- روند کلی حل در روش های بدون جزء
۳۵	۱-۵-۲- گامهای اولیه
۳۵	۱-۱-۵-۲- گام اول : مدلسازی هندسه کلی مساله
۳۶	۲-۵-۱-۲- گام دوم : درونیابی تغییر شکلهای
۳۸	۳-۱-۵-۲- گام سوم : تشکیل دستگاه معادلات
۳۸	۴-۱-۵-۲- گام چهارم : حل دستگاه معادلات کل بدون جزء
۴۰	۲-۵-۲- تعیین بعد دامنه حمایتی
۴۰	۳-۵-۲- تعیین میانگین فاصله گرهی
۴۲	۴-۵-۲- مفهوم دامنه تاثیر
۴۳	۵-۵-۲- خصوصیات توابع شکل بدون جزء
۴۵	۶-۲- جمع بندی

### فصل سه: روش بدون جزء گالری

۴۶	۱-۳- مقدمه و تاریخچه
۴۸	۲-۳- درونیاب حداقل مربعات متحرک (MLS)
۵۴	۱-۲-۳- تابع وزنی
۵۷	۲-۲-۳- سازگاری
۵۹	۳-۳- فرمول بندی روش بدون جزء گالری (EFG)
۶۱	۱-۳-۳- اعمال شرایط تکیه گاهی
۸۳	۴-۳- جمع بندی

### فصل چهار: روشهای مدل سازی غیر خطی بتن، مدل ریز صفحات و نظریه آسیب

۸۶	۱-۴- کلیات
۸۸	۲-۴- مدل های تک محوری معادل
۹۰	۳-۴- روشهای خمیری
۹۱	۴-۴- روشهای بر اساس مکانیک آسیب دیدگی
۹۲	۵-۴- مدل های ترک گسسته
۹۴	۶-۴- مدل های آغشته به ترک
۹۴	۱-۶-۴- مدل های ترک متعامد ثابت
۹۵	۲-۶-۴- مدل های ترک غیر متعامد ثابت
۹۵	۳-۶-۴- مدل های ترک چرخشی
۹۶	۷-۴- مدل ریز صفحات ای بازنه
۹۸	۱-۷-۴- اصول اولیه مدل ریز مقیاس
۹۹	۲-۷-۴- توصیف تئوری مدل

- ۱۰۰ ۴-۷-۳- سیستم چند صفحه‌ای با قید جنبشی
- ۱۰۵ ۴-۸- نظریه آسیب پیوسته
- ۱۰۶ ۴-۸-۱- مدل‌های آسیب همسانگرد موضعی
- ۱۰۸ ۴-۸-۲- مدل‌های آسیب همسانگرد غیر موضعی

## فصل پنجم: کاربرد روش بدون المان گالرکین و مدل صفحات ریزمقیاس در شبیه سازی مسیرگسترش ترک ۱۱۰

- ۱۱۰ ۵-۱- مقدمه
- ۱۱۱ ۵-۲- مدل بدون المان گالرکین جهت تحلیل سازه
- ۱۱۱ ۵-۲-۱- تیر طره تحت بار سهموی در انتها
- ۱۱۶ ۵-۲-۲- تعیین حداقل تعداد نقاط گوسی لازم جهت دستیابی به پاسخ دقیق
- ۱۲۰ ۵-۴- روش بدون المان گالرکین در حل مسائل غیرخطی
- ۱۲۳ ۵-۵- مدل رفتاری پیشنهادی بتن
- ۱۲۴ ۵-۵-۱- مدل صفحات ریزمقیاس با قید حرکتی
- ۱۲۷ ۵-۵-۲- انتگرالگیری عددی
- ۱۳۱ ۵-۵-۳- توابع آسیب مورد استفاده روی ریز صفحات
- ۱۳۶ ۵-۶- نرم افزار حل عددی به روش بدون المان گالرکین
- ۱۳۷ ۵-۷- صحت سنجی و مقایسه با نتایج آزمایشگاهی
- ۱۳۷ ۵-۷-۱- آزمایش خمش سه نقطه ای
- ۱۴۵ ۵-۷-۲- آزمایش برش چهار نقطه ای غیر متقارن

## فصل شش: تحلیل استاتیکی سد شهیدعباسپور به روش بدون المان گالرکین و مدل ریزصفحات ۱۴۸

- ۱۴۸ ۶-۱- مقدمه
- ۱۴۹ ۶-۲- فرضیات مدل سازی
- ۱۵۰ ۶-۳- مدل سد
- ۱۵۰ ۶-۳-۱- برنامه DSHAPE
- ۱۵۵ ۶-۴- مدل پی
- ۱۵۷ ۶-۵- اعمال بارها
- ۱۵۸ ۶-۵-۱- بارهای قائم آب
- ۱۵۹ ۶-۶- ارائه نتایج
- ۱۵۹ ۶-۷- جمع بندی

## فصل هفت: خلاصه و نتیجه گیری ۱۶۱

- ۱۶۱ ۷-۱- مقدمه



۱۶۱	۲-۷- خلاصه تحقیق
۱۶۲	۳-۷- نتیجه گیری
۱۶۵	۴-۷- پیشنهادات برای کارهای آتی
۱۶۸	پیوست الف: نرم افزار <b>DSHAPE</b> برای مدل کردن سد قوسی
۱۷۳	پیوست ب: زیربرنامه مدل چندصفحه‌ای ریزمقیاس
۱۸۱	فهرست مراجع
۱۹۰	<b>Abstract</b>

## فهرست اشکال و جداول

- شکل ۱-۱: شبیه سازی مدل ریزمقیاس چند صفحه‌ای (الف) ساختمان ریزمقیاس و صفحات در یک حجم مشخص از بتن؛ (ب) جهات بردارهای قائم بر هر صفحه در یک فرمول انتگرالی گاوسی ۱۳ گره‌ای؛ و (ج) تصویر کرنش روی هر صفحه. ۴
- جدول ۱-۲- ویژگی‌های برخی از روشهای بدون جزء که تاکنون ابداع شده اند ۱۸
- شکل ۱-۲- مراحل ساخت یک سیستم مهندسی ۱۹
- شکل ۲-۲- فلوجارت مراحل حل در روش اجزاء محدود و روشهای بدون جزء. ۲۱
- شکل ۲-۳- مدل‌سازی مرزهای منحنی هندسی با استفاده از اضلاع خطی اجزاء مثلثی در FEM ۲۲
- شکل ۲-۴- مشخص کردن مرزهای هندسی در روشهای بدون جزء با استفاده از گره ها ۲۳
- شکل ۲-۵- نمونه ای از شبکه بندی مثلثی در یک مسأله دو بعدی ۲۵
- شکل ۲-۶- نمونه ای از یک مدل بدون جزء دو بعدی ۳۵
- شکل ۲-۷- توابع وزنی گرهی در یک مدل دو بعدی بدون جزء ۳۷
- شکل ۲-۸- دامنه های حمایتی گره های مختلف می توانند دارای ابعاد و اشکال متفاوت باشند. دامنه های حمایتی بر روی نقاط موجود در دامنه مساله ( با علامت X ) تعریف می شوند و مشخص کننده های گره های لازم (با علامت O) در تشکیل تابع شکل می باشند. ۳۷
- شکل ۲-۹- مفهوم دامنه تاثیر در یک مثال دو بعدی. ۴۳
- جدول ۲-۲- مقایسه بین روش اجزاء محدود و روشهای بدون جزء ۴۵
- شکل ۱-۳- مثلث پاسکال. ۵۰
- شکل ۲-۳- هرم پاسکال ۵۰
- شکل ۳-۳- تابع تقریب  $u^h(x)$  و مقادیر گرهی  $u_I$  در تقریب MLS ۵۱
- شکل ۳-۴- توابع وزنی،  $w_1$ : اسپیلاین درجه سه،  $w_2$  اسپیلاین درجه چهار،  $w_3$  نمایی با  $\alpha$  برابر  $0.3$ ،  $w_4$ : ۵۶
- درجه چهار ارائه شده توسط جی. آر. لیو و همکاران
- شکل ۳-۵- مشتق اول توابع وزنی،  $w_1$ : اسپیلاین درجه سه،  $w_2$  اسپیلاین درجه چهار،  $w_3$  نمایی با  $\alpha$  برابر  $0.3$ ، ۵۶
- $w_4$  : درجه چهار ارائه شده توسط جی. آر. لیو و همکاران
- شکل ۳-۶- مشتق دوم توابع وزنی،  $w_1$ : اسپیلاین درجه سه،  $w_2$  اسپیلاین درجه چهار،  $w_3$  نمایی با  $\alpha$  برابر ۵۷
- $w_4$  : درجه چهار ارائه شده توسط جی. آر. لیو و همکاران
- شکل ۳-۷- الگوی مورد استفاده در روش EFG، نقاط  $x_Q$  نمایانگر نقاط گوسی مورد استفاده برای انتگرالگیری روابط ساختاری می باشند. ۷۳
- شکل ۳-۸- نحوه تعیین دامنه تاثیر گرهی در الف) محیط همگن ب) محیط ناهمگن. ۸۰
- شکل ۳-۹- فلوجارت روش بدون جزء گالرکین ۸۳
- شکل ۱-۴: الف) ریزساختار فرضی؛ ب) مؤلفه‌های کرنش روی ریز صفحه؛ ج) تنش و کرنش روی ریز صفحه؛ د) کرنش‌های جانبی ۹۹
- شکل ۲-۴- طرح اصلی برای محاسبه تنش‌های درشت مقیاس از کرنش‌های درشت مقیاس ۱۰۴
- شکل ۱-۵- تیر کنسول تحت بار گسترده سهموی P در انتها ۱۱۲
- شکل ۲-۵- مدل کامپیوتری تهیه شده برای حل مثال تیر طره تحت بار گسترده در انتها ۱۱۳

- شکل ۳-۵- تغییر مکان قائم تار میانی تیر ۱۱۴
- شکل ۴-۵- توزیع تنش نرمال  $\sigma_{xx}$  در محل میانه تیر طره ( $x=L/2$ ) ۱۱۴
- شکل ۵-۵- توزیع تنش نرمال  $\sigma_{yy}$  در محل میانه تیر طره ( $x=L/2$ ). ۱۱۵
- شکل ۶-۵- توزیع تنش برشی  $\tau_{xy}$  در میانه تیر طره ( $x=L/2$ ). ۱۱۵
- شکل ۷-۵- رابطه بین نسبت نقاط گوسی به نقاط گرهی و خطای انرژی کرنش. ۱۱۷
- شکل ۸-۵- رفتار خطی جسم در صورت وجود تغییر درجه حرارت. ۱۱۸
- جدول ۱-۵- مقادیر ضریب انبساط حرارتی برای چند ماده معمول [۶۲] ۱۱۹
- شکل ۹-۵- مؤلفه های کرنش ریز صفحه ۱۲۶
- شکل ۱۰-۵- مثالی از فرمول انتگرالگیری ۳۳ گره ای (نقاط مشخص شده با دایره بیانگر جهات بردارهای قائم ریز صفحات می باشد) ۱۲۸
- جدول ۲-۵- مقادیر کسینوسهای هادی و ضرایب وزنه نقاط انتگرالگیری برای حالت ۳۳ نقطه ای ۱۲۸
- شکل ۱۱-۵- محل قرار گیری نقاط نمونه روی سطح کره به شعاع واحد در تکنیک انتگرال گیری عددی گوس ۱۳۰
- جدول ۳-۵- مشخصات نقاط انتگرالی عددی گوس در حالت ۲۶ نقطه ای ۱۳۱
- شکل ۱۲-۵- الگوریتم زیربرنامه مدل رفتاری مورد استفاده ۱۳۵
- شکل ۱۳-۵- هندسه آزمایش خمشی سه نقطه ای ۱۳۸
- شکل ۱۴-۵- تعدادی از توزیع های انتخابی برای نقاط در نرم افزار ۱۴۰
- شکل ۱۵-۵- توزیع نقاط مدل مورد استفاده در نرم افزار ۱۴۰
- شکل ۱۶-۵- توزیع نقاط گرهی و نقاط گوسی مورد استفاده در مدل حاضر ۱۴۱
- شکل ۱۷-۵- منحنی بار - تغییر مکان در آزمایش خمشی سه نقطه ای ۱۴۲
- شکل ۱۸-۵- نحوه گسترش ترک در بتن الف- روش بدون المان گالریکین ب- روش اجزاء محدود ۱۴۳
- شکل ۱۹-۵- هندسه آزمایش چهار نقطه ای برشی ۱۴۵
- شکل ۲۰-۵- نحوه گسترش ترک در بتن در روش بدون المان گالریکین ۱۴۶
- شکل ۱-۶- مقطع سد در محل طره مرکزی و منحنی مراکز قوسها سد شهید عباسپور ۱۵۱
- شکل ۲-۶- پلان قوسهای سد دو قوسی بتنی شهید عباسپور ۱۵۴
- شکل ۳-۶- نمای پایین دست سد دو قوسی بتنی شهید عباسپور ۱۵۳
- شکل ۴-۶- نمایش ۳بعدی هندسه نقاط گرهی تولید شده توسط نرم افزار DSHAPE برای بدنه سد در حالت فواصل نقاط ۱۰متری ۱۵۳
- شکل ۵-۶- نمایش ۳بعدی هندسه نقاط گرهی تولید شده توسط نرم افزار DSHAPE برای بدنه سد در حالت فواصل نقاط ۲متری ۱۵۴
- شکل ۶-۶- مدل ۳بعدی نقاط کلیدی سد و تکیه گاه خروجی برنامه DSHAPE ۱۵۵
- شکل ۷-۶- مدل حجمی تکیه گاه و بدنه سد شهید عباسپور ۱۵۵
- جدول ۱-۶- مشخصات بدنه سد کارون ۱ و تکیه گاه ۱۵۶

شکل ۶-۸- تغییر مکان بدنه سد: الف- پایین دست در جهت Z ب- پایین دست در جهت Y ج- بالادست در جهت Z د- بالادست در جهت Y

جدول ۷-۱- مقایسه بین زمان تحلیل مثال تیر طره با تعداد گره های یکسان در دو روش (زمان برحسب ثانیه) ۱۶۴

## چکیده

نام خانوادگی : زرچی		نام: مهدی	شماره دانشجویی : ۸۶۴۴۰۳۰
عنوان پایان نامه :			
استاد/ اساتیدراهنما:			
استاد/ اساتید مشاور:			
درجه تحصیلی:		رشته:	گرایش:
دانشگاه :		دانشکده:	گروه :
تاریخ فارغ التحصیلی : تعداد صفحه:			
کلید واژه ها : نقاط محدود، روش بدون جزء گالرکین، روش اجزاء محدود، مدل ریزصفحات، سد قوسی			
<p>علیرغم کارائی روش اجزاء محدود، یکی از مشکلاتی که در رابطه با آن مطرح است وقت CPU نسبتاً زیادی است که جهت عملیات شبکه بندی و آماده سازی اطلاعات لازم برای تحلیل مسائل از کامپیوتر گرفته می شود. به هدف رفع این مشکل، روشهای نسبتاً جدیدی ابداع شدند که در آنها حل معادلات دیفرانسیل حاکم تنها با استفاده از مجموعه ای از نقاط محدود صورت می گیرد و در آنها نیازی به شبکه اجزاء جهت تقریب متغیرهای محلی نمی باشد. این روشها، روشهای "بدون جزء (Mesh Free)" نامیده می شوند.</p> <p>تاکنون روشهای بدون جزء به طور نسبتاً زیادی در تحلیل محیطهای آبی، مسائل ارتجاعی خطی در مکانیک جامدات، مکانیک شکست و مسائل دیگر بکار رفته اند. با این وجود، استفاده از این روشها در تحلیل مسائل غیر خطی در بتن هنگامی که تنشهای حرارتی نیز در نظر گرفته شوند اندک بوده است. یکی از روشهای بی نیاز از شبکه به نام روش بدون جزء گالرکین که به اختصار روش EFG نامیده می شود جهت تحلیل عددی بتن با مدل رفتاری ریز صفحات استفاده شده که بدین منظور کد نویسی لازم به زبان MATLAB برای تحلیل بدون شبکه در حالت ۳ بعدی انجام گرفته است و زیر برنامه های مناسب جهت مدلسازی سازه های پیچیده مانند سد بتنی قوسی و نیز روابط ساده شده ای از تاثیر حرارت بدان اضافه شده اند.</p> <p>در کار حاضر یک مدل سازگار چندصفحه ای ریزمقیاس برای توصیف عددی رفتار غیرخطی بتن در شرایط سه بعدی بکار برده شده است. فرض اصلی مدل چند صفحه ای آن است که بردار کرنش عمل کننده روی هر صفحه در داخل ماده، تصویر تانسور کرنش درشت مقیاس می باشد برای استفاده از این مدل زیر برنامه مدل ساختاری بتن، بدست آمده و در برنامه سه بعدی بدون المان گالرکین، اعمال شده است. تحلیلهای انجام شده نشان می دهند که، در صورت گره گذاری مناسب و انتخاب درست فراسنج ها، نتایج تحلیل EFG از دقت بالایی برخوردارند اما زمان بسیار زیاد محاسبات و همچنین تعدد فراسنج ها و حساسیت نتایج نسبت به این فراسنج ها موجب می شود که با وجود مزایای روشهای بدون جزء، هنوز نتوان آنها را جایگزین مناسبی برای روش اجزاء محدود به حساب آورد.</p> <p>مسئله فراسنجی و مقایسه مدل چندصفحه ای با استفاده از داده های تجربی - که مشخص کننده رفتار مکانیکی بتن می باشد - نیز بیان شده است و نشانگر آن می باشد که مدل جدید چند صفحه ای، کارائی مناسب عددی برای اعمال در برنامه بدون المان گالرکین را داشته و دارای دقت قابل قبولی در تطابق با نتایج آزمایشگاهی از جمله مسیر گسترش ترک می باشد. اگر چه مقصود از کار حاضر، تحلیل جامع یک سد قوسی مشخص در بارگذاریهای متعدد نمی باشد، این تحقیق مناسب بودن و کارائی روش جدید چندصفحه ای برای تحلیل استاتیکی سدهای قوسی، مخصوصاً تحت بارگذاری آب، را مشخص می نماید.</p>			

# فصل یک

## مقدمه

### ۱-۱- کلیات

در سالهای اخیر به وضوح دریافت شده است که عملیات شبکه بندی<sup>۱</sup> یک کار ظریف، هزینه بر و در بعضی موارد بسیار مشکل در روش اجزاء محدود است. به همین دلیل مقتضی است تا روشهای جدیدی ابداع شوند که اگرچه ممکن است از نظر مدت زمان محاسبات کامپیوتری هزینه بیشتری داشته باشند اما نیازمند زمان کمتری برای آماده سازی داده ها می باشند. در این ارتباط، قابل ذکر است که حتی با وجود ابزار شبکه بندی قدرتمند، شبکه بندی در مسائل سه بعدی هنوز بسیار مشکل است و تبدیل هندسه مدل به اطلاعات قابل استفاده در روش اجزاء محدود عملی وقت گیر است و اغلب ابهامات متعددی را موجب می شود.

---

<sup>۱</sup>Mesh Generation

در این راستا، روشهای بی نیاز از شبکه اجزاء<sup>۲</sup> که در این پایان نامه به اختصار "بدون جزء" نامیده می شوند ابداع شدند. این روشها مدتی است که در تحلیل مسائل مکانیک جامدات، سیالات و انتشار ترکها استفاده شده اند. ولی استفاده آنها در محیطهای همچون بتن که دارای رفتار غیرخطی و خاص می باشند کمتر به کار برده شده است. در میان کاربردهای متعدد بتن در مصارف مختلف می توان از سدسازی به عنوان یکی از پراهمیت ترین و معمولترین محل استفاده بتن غیر مسلح نام برد.

در این میان عواملی همچون تغییرات حرارتی که باعث ایجاد تنشهای مربوطه می شود و نیز تنشهای معمول را می توان بروشهای مختلفی در طراحی سد و تحلیل سد تحت شرایط بهره برداری عادی و همچنین بارگذاری نهائی در نظر گرفت. روش عددی بدون شبکه از روشهای جدیدی است که بعد از روش اجزاء محدود و علی رغم کاربرد و اعتبار این روش در حل مسائل مهندسی برای پوشاندن کاستیهای روش اجزاء محدود مخصوصاً در مسائلی با هندسه متغییر، مثل ترکهای منتشرشونده، در حدود ۱۵ سال گذشته ابداع شده و تا کنون گسترش زیادی یافته است. ابتدا نیرولز (۱۹۹۲) با ابداع روش المانهای پراکنده پایه گذار این دسته روشها بود و بعد از آن در سال ۱۹۹۴ بلیچکو روش بدون المان گالرکین را ارائه نمود و در سالهای بعد روشهای دیگری از همین خانواده مورد استفاده قرار گرفته اند و همچنان توسعه و کاربرد این روشها و استفاده از آنها در مسائل مختلف و جدید مهندسی توسط محققان بسیار مورد توجه می باشد

## ۱-۲- تعریف مسئله

---

<sup>2</sup>Mesh Free methods



همانگونه که گفته شد روشهای عددی از جمله روشهای نوینی از جمله روش بدون المان گالرکین برای استفاده در تحلیل تنشهای موادی همچون بتن می توانند بسیار مفید باشند لیکن قوانین ساختاری که از روابط تانسوری برای توصیف حالت‌های تنش و کرنش استفاده می‌کنند معمولاً در تحلیل اجزاء محدود و نیز سائز روشهای حل عددی از جمله روشهای بدون جزء، با تغییر شکل‌های کوچک یا بزرگ، مورد استفاده قرار می‌گیرند. در بسیاری از موارد این قوانین براساس نامتغییرهای کرنش یا تنش<sup>۳</sup> می‌باشند (بعنوان مثال در حالت‌های خمیری و غیره). اما این شیوه‌ها همواره بسیار مناسب بنظر نمی‌رسد، مخصوصاً هنگامی که ماده با توجه به تغییرشکل‌های بزرگ دچار گسیختگی می‌گردد، مانند مواد مشابه بتن.

هدف کار حاضر استفاده از یک روش سازگار جهت بررسی عددی در حالت‌های سه بعدی با توجه به ناهمسانگردی ماده، یعنی وابسته بودن خواص ماده به جهت، می‌باشد. برخلاف قوانین ساختاری بر پایه روابط تانسوری، یک مدل شهودی ساده‌تر مورد نیاز می‌باشد، مخصوصاً هنگامی که رفتار ناهمسانگرد در نظر گرفته می‌شود. این روش با وجود سادگی فراهم کننده درک بهتر و کنترل رفتار بتن با قابلیت شبیه سازی تغییر شکل‌ها مطابق با داده‌های تجربی می‌باشد.

این چنین مدلها باید بنحوی باشند که قابلیت تولید قوانین ساختاری معروف و رایج اولیه را به درستی داشته باشند. در شرایط عملی به این علت که بیشتر مواد در تغییرشکل‌های کوچک اولیه بصورت همسان<sup>۴</sup> و کشسان عمل می‌کنند، فرمول بندی دقیقی که این حالت را بصورت دقیق مدلسازی کند ضروری می‌باشد، بعلاوه رفتار ناهمسانگرد مواد در تغییر شکل‌های بزرگ و حالت‌های خمیری رخ می‌دهد و در مدل سازی باید لحاظ گردد.

---

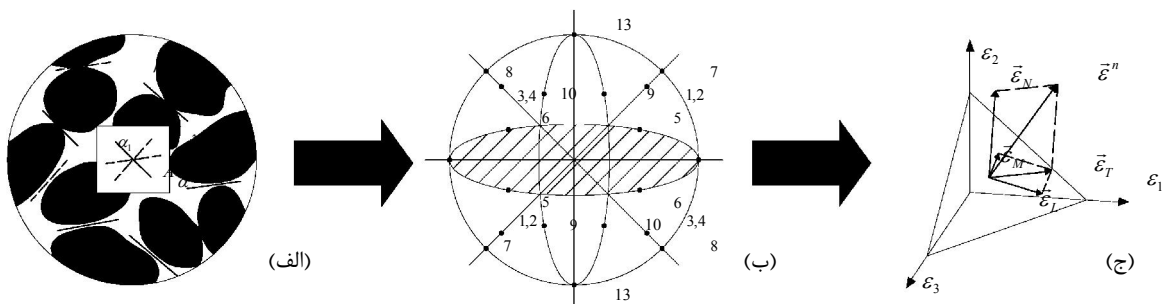
<sup>1</sup> stress or strain invariants  
<sup>4</sup> isotropic

قوانین ساختاری باید مطابق با شواهد تجربی باشند، به این معنی که آزمایشات سه‌بعدی باید بصورت عددی در رایانه شبیه‌سازی شوند و نتایج، مطابق واقعیت بررسی گردد.

مدل ریزمقیاس چندصفحه‌ای ارائه شده به‌مراه روشی مناسب برای حل مسائل فوق‌الذکر بوده و یک فرمول بندی مناسب برای قوانین ساختاری مواد می‌باشد.

### ۱-۳- روش چندصفحه‌ای ریزمقیاس

مدلهای ساختاری کلاسیک مستقیماً مولفه‌های  $\sigma_{ij}$  و  $\varepsilon_{ij}$  تانسور تنش و کرنش را به هم مرتبط می‌کنند. مدل ساختاری چند صفحه‌ای بوسیله روابط بین تنش و کرنش عمل‌کننده بر روی صفحات کلی تعریف می‌گردد که این صفحات، به اصلاح ریز صفحه نامیده می‌شوند که دارای جهت اختیاری در فضا می‌باشند و این جهت با بردار قائم هر صفحه  $n$  مشخص می‌گردد. فرض اولیه‌ای که رفتار نرم شوندگی بتن بعد از تنش حداکثر را تضمین می‌نماید [۲] آن است که بردار کرنش روی هر ریز صفحه (شکل ۱-۱ ج) تصویر تانسور کرنش می‌باشد.



شکل ۱-۱: شبیه سازی مدل ریزمقیاس چند صفحه‌ای (الف) ساختمان ریز مقیاس و صفحات در یک حجم مشخص از بتن؛ (ب) جهات بردارهای قائم بر هر صفحه در یک فرمول انتگرالی گاوسی ۱۳ گره‌ای؛ و (ج) تصویر کرنش روی هر صفحه.

کارایی محاسبات می‌تواند با قید جنبشی مدل چند صفحه‌ای حاصل گردد که شرط اصلی قوانین ساختاری ریزمقیاس بعنوان یک فرمول صریح جهت ارزیابی تنش‌های ریز صفحه‌ای براساس کرنش ریز صفحه می‌باشد. با توجه به اجتناب از روابط تانسوری گذشته، امکان مدل‌سازی به روش‌های گوناگون میسر می‌باشد، همچنین با توجه به فقدان یک مدل کلاسیک کاملاً ریز مقیاس، مدل‌سازی باید بر مبنای دریافت‌های شهودی از عملکرد پیچیده رفتار فیزیکی ماده باشد که در واقع این امر تا حد زیادی یک هنرمی‌باشد.

برای بتن، رفتار تک محوری فشاری، نرم شوندگی<sup>۶</sup> را دنبال خواهد داشت در حالی که رفتار فشاری ایستائی<sup>۷</sup> به اینصورت نمی‌باشد (مرجع [۳] مطالعه شود). برای دستیابی به این اختلاف رفتاری، تجزیه کرنش قائم هر صفحه به اجزاء حجمی<sup>۸</sup> و انحرافی<sup>۹</sup> مفید می‌باشد.

با توجه به قید جنبشی<sup>۱۰</sup> کرنش‌های ریز مقیاس (چند صفحه‌ای) و درشت مقیاس (محیط پیوسته)، هم ارزی استاتیکی (تعادل استاتیکی) بین تنش‌های ریز مقیاس و درشت مقیاس، می‌تواند با استفاده از روش کار مجازی تامین گردد [۲].

<sup>5</sup> a 13-point Gaussian integration formula

<sup>6</sup> softening

<sup>7</sup> hydrostatic

<sup>8</sup> volumetric part

<sup>9</sup> deviatoric part

<sup>10</sup> kinematic constraint

این اصل به انتگرال گیری عددی بر روی تمام جهات ممکن صفحات منجر می گردد، یعنی روی تمام صفحات با بردارهای قائم  $n$ . بصورت هندسی، این امر بوسیله سطح یک کره با شعاع واحد معرفی می گردد. به این علت که صفحات با بردار قائم  $n$  و  $-n$  یکسان می باشند، در نظر گرفتن نیمی از یک کره برای این منظور کافی می باشد. بنابراین، ناحیه انتگرال گیری به سطح یک نیم کره با شعاع واحد محدود می گردد.

در محاسبات عددی، انتگرال مورد نظر بوسیله فرمول بهینه انتگرال گیری گاوسی بر روی سطح نیم کره انجام می شود [۴،۷،۶،۵] که بوسیله یک جمع با در نظر گرفتن ضرایب وزنه روی تمام ریز صفحات صورت می گیرد.

### ۱-۳-۱- تاریخچه روشهای چند صفحه‌ای

ایده اساسی روشهای مدل سازی چند صفحه‌ای، تعریف کردن قوانین ساختاری بصورت روابط بین بردارهای تنش و کرنش، بجای تانسورهای مرتبه دو، می باشد. این ایده بدنبال کارهای اولیه تیلور<sup>۱۱</sup> (۱۹۳۸) [۸] می باشد - که همچنین در تئوری لغزش بتدرف<sup>۱۲</sup> و بودیانسکی<sup>۱۳</sup> (۱۹۴۹) [۹] بکاررفته است. تیلور پیشنهاد کرد که قوانین ساختاری فلزهای چند کریستاله<sup>۱۴</sup> بوسیله روابط بین بردارهای تنش و کرنش عمل کننده روی صفحات در جهات متعدد در داخل ماده تعریف می گردد - که در اصل بصورت صفحات لغزش در نظر گرفته شده بود - و بعداً بصورت کلی تر تحت عنوان ریز صفحات [۱۰] نامیده شد. تانسورهای درشت مقیاس تنش و کرنش بصورت جمع تمام بردارهای تنش و یا کرنش، با فرض قید استاتیکی و یا جنبشی مشخص می گردد.

<sup>11</sup> Taylor

<sup>12</sup> Batdorf

<sup>13</sup> Budianski

<sup>14</sup> polycrystalline metals

نامتغیرهای تانسوری<sup>۱۵</sup> بصورت خودکار با در نظر گرفتن تمام جهات در فضا ارضاء می شود (بصورت نامحدود در حالت مواد ناهمسانگرد ناهمگن و فقط صفحات کریستالی در حالت مواد کریستاله). بعداز بتدرف و بودیانسکی (۱۹۴۹) [۹] (اولین کسانی که ایده تیلور را بسط داده و مدل مقید شده واقع گرایانه استاتیکی را برای حالت خمیری فلزات چند کریستاله توسعه دادند)، بسیاری از محققین این روش را برای فلزات اصلاح نمودند (کرونز<sup>۱۶</sup>، ۱۹۶۱ [۱۱]؛ بودیانسکی و وو<sup>۱۷</sup>، ۱۹۶۲ [۱۲]؛ لین<sup>۱۸</sup> و ایتو<sup>۱۹</sup>، ۱۹۶۵، ۱۹۶۶ [۱۳، ۱۴]؛ هیل<sup>۲۰</sup>، ۱۹۶۶ [۱۶، ۱۵]؛ رایس<sup>۲۱</sup>، ۱۹۷۰ [۱۷]). همچنین توسعه این مدلها برای پاسخ سخت شوندهگی غیر کشسان خاک و صخرهها توسط محققین متعددی (زینکویچ<sup>۲۲</sup> و پند<sup>۲۳</sup>، ۱۹۷۷ [۱۸]؛ پند و شارما<sup>۲۴</sup>، ۱۹۸۱، ۱۹۸۲ [۱۹، ۲۰]؛ پند و زاینانگ<sup>۲۵</sup>، ۱۹۸۲ [۲۱]؛ صدرنژاد و پند، ۱۹۸۹ [۲۲]؛ صدرنژاد، ۲۰۰۳ [۲۳]) صورت گرفته است. تمام این مدلهای استفاده شده مدلهای مقید شده استاتیکی نامیده می شوند، با این فرض که بردار تنش عمل کننده روی یک صفحه در داخل ماده تصویر تانسور تنش درشت مقیاس می باشد.

بازنت<sup>۲۶</sup> (۱۹۸۴) [۱۰] و بازنت و آ<sup>۲۷</sup> (۱۹۸۵) [۵] به این موضوع پی بردند که قید استاتیکی معرفی شده، مدل را از بررسی حالت کلی نرم شوندهگی کرنش، بعد از تنش حداکثر و گسیختگی

<sup>15</sup> tensorial invariance

<sup>16</sup> Kroner

<sup>17</sup> Wu

<sup>18</sup> Lin

<sup>19</sup> Ito

<sup>20</sup> Hill

<sup>21</sup> Rice

<sup>22</sup> Zienkiewicz

<sup>23</sup> Pande

<sup>24</sup> Sharma

<sup>25</sup> Xiong

<sup>26</sup> Bazant

<sup>27</sup> Oh

مواد شبه ترد<sup>28</sup> بازمی دارد، بنابراین توسعه مدل برای بررسی حالت نرم‌شوندگی نیازمند جایگزینی قید استاتیکی با قید جنبشی می‌باشد. در این تضاد که همچنین توسط تیلور (۱۹۳۸) [۸] پیشنهاد گردید، اما تا سال ۱۹۸۳ بررسی دقیق نشد، بردار کرنش روی هر سطح مورب در داخل ماده تصویر تانسور تنش درشت مقیاس می‌باشد. بَازنْت و اُ (۱۹۸۵) [۵] نه تنها کرنشهای برشی غیر کشسان را در نظر گرفتند، بلکه کرنش‌های قائم غیر کشسان روی صفحات و ارزیابی تانسور تنش درشت مقیاس از تنش‌های ریزمقیاس بر پایه اصل کار مجازی را لحاظ کردند.

برای هر دو نوع فرمول بندی با قید جنبشی و استاتیکی، خواص ماده بوسیله روابط بین مؤلفه های تنش و کرنش روی صفحات مشخص می‌گردد. اعمال مستقیم محدودیتهای نامتغیرهای تانسوری<sup>29</sup> در روابط ساختاری لازم نمی‌باشد، که این یک مزیت از فرمول بندی چند صفحه‌ای است. این روابط بصورت خودکار با برهم‌نهی پاسخهای صفحات در تمام جهات در یک حالت مناسب، همانطور که در فصل پنج تشریح شده، ارضاء می‌گردند که این امر با استفاده از اصل کار مجازی صورت می‌پذیرد.

خاصیت قوانین ساختاری بر مبنای بردارها، بجای تانسورها، امکان درک روشن موضوع را فراهم می‌آورد و مدل سازی واقع گرایانه فرآیندهای جهت‌دار، مانند لغزش پلاستیک یا اصطکاک را میسر می‌سازد. بعنوان مثال، مدل سازی کلاسیک اصطکاک داخلی، بصورت رابطه بین تنش متوسط و نامتغیر انحرافی<sup>30</sup>  $J_2$  خیلی واقع‌گرایانه نمی‌باشد؛ در واقع اصطکاک یک رابطه بین مؤلفه های قائم و مماسی تنش عمل‌کننده روی یک صفحه می‌باشد و پاسخهای مختلف اصطکاک روی صفحات مختلف رخ می‌دهد. این امر مستقیماً با مدل چند صفحه‌ای ارائه می‌گردد.

<sup>28</sup> quasi-brittle

<sup>29</sup> tensorial invariance restrictions

<sup>30</sup> deviatoric invariant

## ۱-۴- اهداف و حیطه تحقیق

در این پایان نامه قصد بر آن است که مسیر گسترش ترک در بتن تحت اثر بارهای حرارتی با استفاده از روش عددی بدون شبکه و تئوری زیرصفحات بصورت ترکیبی مورد بررسی قرار گرفته و تعیین گردد. از این جهت از تئوری ریزصفحات در این مسأله خاص استفاده می شود که بکاربردن این روش روابط را ساده تر و مفاهیم فیزیکی را ملموس تر می نماید. گذشته از آن در منابع ذکر شده استفاده از این تئوری نتایج خوب و مناسبی در ارتباط با تحلیل ترک در بتن ارائه داده است. از سویی دیگر برای حل یک مسأله مقدار مرزی نیازمند کمک گرفتن از یک روش حل عددی می باشیم. برای حصول به این هدف علیرغم گسترش و توسعه روش اجزاء محدود بدلیل وجود نقایصی همچون نیازمندی به شبکه بندی مجدد علی الخصوص در شرایطی مثل ترک های منتشرشونده و گسترش ترک و بطور کلی وقتی که هندسه مسأله و شرایط مرزی تغییر می کند و نیز نتایج ضعیف در نزدیکی مرزها بهتر است که از روشهای جدیدتری همچون روشهای بدون شبکه که محدودیت های ذکر شده را ندارند استفاده شود. این روشهای بصورت کاملاً مستقل از شبکه بندی و براساس نقاط موجود که بصورت خودکار ایجاد می شوند عملیات حل مسأله را به پایان می رسانند.

به منظور دستیابی به اهداف تحقیق جاری، مدل چند صفحه ای در یک برنامه بدون شبکه بکار گرفته شده است و صحت فرمول بندی پیشنهاد مورد ارزیابی قرار گرفته است.

## ۱-۵- چشم انداز پایان نامه

این پایان نامه در نه فصل تنظیم گردیده است:

فصل یک مسئله، انگیزه، اهمیت تحقیق جاری و همچنین اهداف و حیطه این تحقیق را معرفی می نماید.

در فصل دوم، کلیات روشهای بدون جزء شامل تعاریف، مفاهیم و اصول کلی حاکم بر این روشها و مقایسه کلی آنها با روش اجزاء محدود، و همچنین انواع روشهای بدون جزء و مقایسه اجزالی آنها با یکدیگر شرح داده می شود.

در فصل سوم، روش EFG که یکی از روشهای بدون جزء می باشد و نگارش برنامه مبتنی بر این روش می باشد بطور کامل شرح داده شده و نحوه بدست آوردن معادلات گسسته کل سیستم در آن، در حالت الاستیک خطی، شرح داده شده است.

در فصل چهارم، روشهای مدلسازی غیر خطی بتن مورد بررسی قرار گرفته اند و کلیات و اصول مدل های ریز مقیاس و توابع آسیب ذکر شده اند.

فصل پنجم، شامل توصیف تئوری و کاربرد روش عددی بدون المان گالرکین توسط برنامه کامپیوتری نگارش شده جهت تحلیل و اجزای تشکیل دهنده و زیربرنامه های آن که شامل زیربرنامه مربوط به مدل ریز صفحه گفته شده نیز می باشد توضیح داده شده است. روی هم رفته، این شیوه منتهی به نسخه ای از مدل می گردد که تمام ویژگیهای مفیدی که مدل های قبلی در شناسایی روابط ساختاری به آن رسیده اند را ارضاء می نماید. ضمناً این روش از نظر فهم آسان تر و همچنین از نظر کاربرد عملی جهت اعمال در متن یک برنامه کلی بدون شبکه مناسب می باشد. با توجه به مزیت روش کلی مورد استفاده و فرضیات تئوری برای مدل، محاسبات در این زیر



برنامه (که اساساً باید بر اساس محاسبات گامهای بارگذاری بر مبنای افزایش کرنش باشد) کاملاً صریح می‌باشد. این امر باعث کاربرد آسان زیر برنامه، افزایش دقت و تسریع اجرای آن می‌گردد. و نهایتاً ترک های بتن در حالات مختلف بارگذاری با روش اجزاء محدود مقایسه می‌شود.

هدف عمده فصل ششم از تحقیق جاری تحلیل یک سد بتنی قوسی (کارون ۱) به کمک نرم افزار ذکرشده بوده تا بدین شکل کارایی روش بدون المان گالرکین به همراه مدل رفتاری بتن روشن گردد.

در آخر، فصل هشت که به نتیجه گیری و پیشنهادات اختصاص دارد، نتایج کلی بدست آمده در مورد روش بدون جزء گالرکین به همراه مدل ریزصفحات و در حالت کلی تر روشهای بدون جزء، در مقایسه با روش اجزاء محدود، با توجه به تحلیل انجام شده در فصول قبل، مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. در ادامه این فصل، توضیحات و پیشنهاداتی جهت بهبود تحلیلها در روشهای بدون جزء و ارتقاء برنامه نگارش شده بیان شده اند.

## فصل دوم

### روشهای بدون شبکه اجزاء

#### ۲-۱- تعریف روشهای بی نیاز از شبکه اجزاء<sup>۳۱</sup>

طراحی سیستمهای مهندسی پیشرفته نیازمند استفاده از ابزار طراحی کامپیوتری<sup>۳۲</sup> (CAD) می باشد. در چنین ابزاری روشهای شبیه سازی کامپیوتری اغلب برای مدل سازی و بررسی پدیده های طبیعی در یک سیستم مهندسی بکار گرفته می شوند. این شبیه سازی نیازمند حل معادلات دیفرانسیل مختلط یا معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی حاکم بر این پدیده ها می باشد. معمولاً این معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی بوسیله روشهای عددی مانند روش اجزاء محدود<sup>۳۳</sup> (FEM) و روش اختلاف محدود<sup>۳۴</sup> (FDM) حل می شوند. در این روشها حوزه های مکانی که معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی حاکم بر آنها تعریف می شوند به شبکه هایی از اجزاء تقسیم یا گسسته سازی<sup>۳۵</sup> می شوند.

---

<sup>1</sup>Mesh Free methods

<sup>2</sup>Computer Aided Design

<sup>3</sup>Finite Element Method

<sup>4</sup>Finite Difference Method

<sup>1</sup>Discretize

شبکه اجزاء<sup>۳۶</sup> به هر فضای باز بین خطوط یک شبکه گفته می شود که از اتصال گره ها به صورت از پیش تعیین شده شکل می گیرد. در روش اختلاف محدود شبکه های بکاررفته اغلب گرید<sup>۳۷</sup> نامیده می شوند؛ در روش احجام محدود<sup>۳۸</sup> سلول حجمی<sup>۳۹</sup> نامیده می شوند و در اجزاء محدود این شبکه ها جزء<sup>۴۰</sup> نامیده می شوند. واژه شناسی عبارت گرید، سلول حجمی و جزء، بسته به مسائل فیزیکی مختلف که در آن تعریف می شوند مفهوم فیزیکی خاصی پیدا می کند. با این وجود، تمام عبارات ذکر شده می توانند طبق تعریف بالا شبکه اجزاء تلقی شوند. نکته اصلی در اینجا این است که یک شبکه اجزاء باید از پیش تعریف شده باشد تا یک رابطه مشخصی بین گره ها برقرار کند که اساس فرمول بندی روشهای عددی متداول می باشد.

با بکار بردن یک شبکه از پیش تعریف شده مناسب و بکاربردن یک اصل صحیح می توان معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی یا مختلط حاکم را به صورت مجموعه ای از معادلات جبری برای شبکه تقریب زد. دستگاه معادلات جبری برای کل مساله را می توان با رویهم گذاری معادلات جبری تمامی اجزاء بدست آورد.

روشهای "بی نیاز از شبکه اجزاء" که از این پس بدون جزء خوانده می شوند برای تشکیل دستگاه معادلات جبری کل دامنه مساله<sup>۴۱</sup>، بدون استفاده از یک شبکه اجزاء از پیش تعیین شده مورد استفاده قرار می گیرند. روشهای بدون جزء از یک سری گره در داخل دامنه مساله به همراه یک سری گره بر روی مرزهای آن به عنوان نمایانگر (نه مجزا کننده) دامنه مساله و مرزهای آن

---

<sup>1</sup>Mesh

<sup>3</sup>Grid

<sup>4</sup>Finite Volume Method

<sup>5</sup>Volume

<sup>6</sup>Element

<sup>7</sup>Domain

استفاده می کنند. این مجموعه نقاط پراکنده تشکیل شبکه نمی دهند که این بدان معنی است که هیچ اطلاعی از رابطه بین گره ها، حداقل به منظور درونیابی متغیرهای مکانی، نیاز نیست.

تعداد زیادی روش بدون جزء وجود دارند، مانند: روش بدون جزء گالرکین<sup>۴۲</sup> (EFG)، روش بدون جزء پترو-گالرکین<sup>۴۳</sup> (MLPG)، روش درونیابی نقطه ای<sup>۴۴</sup> (PIM)، روش رویهم گذاری نقطه ای<sup>۴۵</sup> (PAM)، روش نقاط محدود<sup>۴۶</sup> (FPM)، روش اختلاف محدود با گریدهای نامنظم دلخواه، روش هیدرودینامیک جزء پیوسته<sup>۴۷</sup> (SPH)، روش<sup>۴۸</sup> RKPM که نسخه اصلاح شده SPH است و غیره. تمامی این روشها دارای این ویژگی هستند که در آنها از شبکه های از پیش تعریف شده، حداقل برای درونیابی متغیرهای مکانی، استفاده نمی شود. نامهای روشهای بدون جزء مختلف هنوز مورد بحث است. با توجه به اینکه متدلوژی این روشها هنوز در مرحله تکامل سریعی قرار دارد، پیوسته اسامی جدیدی برای روشها پیشنهاد می شود. ممکن است مدتی زمان ببرد تا تمامی این روشها بطور صحیح موضوع بندی و یکدست شوند تا از ابهامات موجود جلوگیری شود.

در روشهای بدون جزء از شبکه اجزاء برای درونیابی متغیرهای مکانی استفاده نمی شود اما ممکن است در بعضی از آنها برای محاسبه انتگرالها از یک شبکه پیش زمینه<sup>۴۹</sup> از نقاط گوسی برای صرفاً انتگرالگیری استفاده شود. روشهایی که در آنها به هیچ عنوان از ساختار شبکه ای (حتی برای انتگرالگیری) نیز استفاده نشود روش های بدون جزء واقعی نامیده می شوند.

---

<sup>1</sup>Element Free Galerkin method

<sup>2</sup>Meshless Local Petrov-Galerkin

<sup>3</sup>Point Interpolation Method

<sup>4</sup>Point Assembly Method

<sup>5</sup>Finite Point Method

<sup>6</sup>Smooth Particle Hydrodynamics

<sup>7</sup>Reproducing Kernel Particle Method

<sup>8</sup>background mesh

بحثی که در اینجا پیش می آید این است که ملزومات یک روش بدون جزء چیست؟

▪ شرط لازمی که یک روش بدون جزء می باید برآورده سازد این است که در آن از هیچ

شبکه از پیش تعیین شده ای برای درونیابی متغیر مکانی استفاده نشود.

▪ شرط ایده آل یک روش بدون جزء آن است که در آن شبکه اجزاء به هیچ نحوی در حل

مساله دخیل نباشد.

واقعیت این است که روشهای بدون جزء که تاکنون ایجاد شده اند هیچ کدام واقعاً ایده آل نیستند

و در یکی از موارد زیر با مشکل روبرو هستند :

۱- روشهایی که نیازمند اجزاء پیش زمینه برای انتگرالگیری دستگاه معادلات بدست آمده از

Weak form در کل هندسه مساله هستند واقعاً بی نیاز از شبکه اجزاء نیستند. روش EFG به این

دسته تعلق دارد. این روشها در بسیاری از جهات عملی هستند، چرا که تولید شبکه پیش زمینه

بطور کلی امکان پذیر است و همواره می توان آن را بطور خودکار با استفاده از شبکه مثلثی در

مسائل دوبعدی و شبکه چهاروجهی در مسائل سه بعدی انجام داد.

۲- روشهایی که برای انتگرالگیری ماتریسها در دامنه مساله نیازمند اجزاء پیش زمینه بطور موضعی

هستند. روش MLPG به این دسته تعلق دارد. این روشها ضرورتاً بدون جزء نامیده می شوند چرا

که ایجاد یک شبکه موضعی آسانتر از شبکه بندی کامل مساله است. این یک کار ساده تری است

که می توان آن را به طور خودکار و بدون در نظر گرفتن هیچ شبکه از پیش تعریف شده ای برای

شبکه موضعی انجام داد.

۳- روشهایی که اصلاً به شبکه نیاز ندارند، اما پایداری و دقت کمتری دارند. روشهای کنارهم‌گذاری<sup>۵۰</sup> و روشهای اختلاف محدود با استفاده از گریدهای نامنظم به این دسته تعلق دارند. انتخاب گره‌ها با توجه به نوع خاص مساله در دستیابی به نتایج پایدار و دقیق ضروری است (مراجع [۲۷]، [۲۸]، [۲۹]). انتخاب خودکار نقاط و بهبود پایداری حاصل، بعضی از مشکلاتی هستند که در این روشها وجود دارند. این روشها یک مزیت بسیار مهم دارند و آن این است که پیاده‌سازی آنها بسیار آسان است زیرا هیچ انتگرالگیری مورد نیاز نمی‌باشد.

۴- روشهای مبتنی بر جزء<sup>۵۱</sup>: که نیاز به اجزا از پیش تعریف شده در داخل حجم یا توده مساله دارند. سپس می‌توان با توجه به الگوریتم آنها، تحلیلها را حتی در مواردیکه تغییرشکلها و جداشدگیهای بسیار بزرگ در مساله وجود دارند انجام داد. روشهای SPH به این دسته تعلق دارند. این نوع روشها در اعمال شرایط مرزی با مشکل روبرو هستند. بعلاوه، با توجه به از پیش تعریف شده بودن اجزا از نظر فنی نیازمند نوعی شبکه هستند.

## ۲-۲- مشکلات روشهای وابسته به اجزاء

روش اجزاء محدود روش قدرتمندی است که بطور کامل برای تحلیل استاتیکی و دینامیکی، تحلیل تنش خطی یا غیر خطی جامدات، سازه‌ها و همچنین جریان سیالات تکامل یافته است. بیشتر مسائل عملی مهندسی در رابطه با جامدات و سازه‌ها امروزه توسط تعداد زیادی از نرم افزارهای توسعه یافته FEM که بصورت تجاری در دسترس هستند حل می‌شوند. با این وجود، محدودیتهای زیر در رابطه با روش اجزاء محدود به طور فزاینده‌ای در حال آشکار شدن هستند:

---

<sup>1</sup>Collocation methods  
<sup>1</sup>Particle methods

۱. تولید یک شبکه اجزاء برای هندسه مساله یک شرط لازم برای استفاده از بسته های نرم افزاری FEM است. معمولاً تحلیل گر اکثر زمان خود را صرف تولید شبکه اجزاء می کند و این کار قسمت اعظم هزینه شبیه سازی مساله را شامل می شود چرا که زمان CPU کامپیوتر بطور قابل توجهی در حال کاهش است و در نتیجه توجه بیشتر معطوف به زمان نیروی کار انسانی است تا زمان کامپیوتر. به همین دلیل، ایده آل آن است که کار شبکه بندی بطور کامل توسط کامپیوتر و بدون دخالت انسان انجام شود.
۲. در محاسبات تنش، تنشهای بدست آمده از بسته های نرم افزاری FEM ناپیوسته هستند و از دقت کمتری برخوردارند.
۳. در موارد تغییر شکلهای بزرگ، دقت قابل توجهی به دلیل تغییر شکل اجزاء از دست می رود.
۴. شبیه سازی رشد ترک با مسیرهای انتخابی و پیچیده و تبدیلات فاز ناشی از ناپیوستگیهایی که بر روی خطوط گرهی اولیه قرارندارند بسیار مشکل است.
۵. شبیه سازی شکست مواد به تعداد زیادی اجزا کوچکتر در FEM که لزوماً بر پایه مکانیک محیط های پیوسته بنا نهاده شده است بسیار مشکل است زیرا در آن اجزاء فرمول بندی شده نمی توانند شکسته شوند. در FEM اجزاء می توانند یا کاملاً فرسایش یابند و یا به همان صورت اولیه باقی بمانند. این معمولاً موجب تفسیر نادرستی از مسیر شکست می شود. در اینجا خطای قابل توجهی می تواند رخ دهد چرا که ماهیت مساله غیر خطی است و بنابراین به مقدار زیادی به مسیر وابسته هستند.

۶. روشهای شبکه بندی مجدد<sup>۱</sup> برای غلبه بر این مشکلات در FEM بوجود آمده اند. در شبکه بندی مجدد، دامنه مساله در هر مرحله در طی فرآیند شبیه سازی مجدداً شبکه بندی می شود تا از تغییر شکلهای بسیار بزرگ شبکه ها جلوگیری شود و خطوط گرهی منطبق بر مرزهای ناپیوستگی باقی بمانند. بدین منظور، پردازشگرهای پیچیده، قدرتمند و قابل تنظیمی می باید ایجاد شوند. به هر حال این پردازشگرها تنها در مسائل دوبعدی قابل کاربرد هستند و هیچ پردازشگر قابل اعتمادی برای تولید شبکه های شش وجهی در مسائل سه بعدی، به دلیل مشکلات فنی، وجود ندارد (مرجع [۲۴]).

۷. پردازشگرهای قابل تنظیم نیازمند نگاشت<sup>۲</sup> متغیرهای مکانی بین اجزاء در مراحل متوالی هستند. این عمل نگاشت معمولاً موجب محاسبات بیشتر و همچنین کاهش دقت عمل می گردد. علاوه بر آن، در مسائل سه بعدی بزرگ، هزینه شبکه بندی مجدد در هر مرحله بسیار زیاد می شود.

۸. روش اختلاف محدود در بسیاری از مسائل، بخصوص برای حل مسائل دینامیک سیالات خوب عمل می کند. ضعف عمده ای که این روش دارد این است که متکی بر گره های با فواصل منظم می باشد. به همین دلیل مدت طولانیست که بررسیهایی برای ایجاد روش های مبتنی بر گریدهای نامنظم انجام شده است که هنوز هم ادامه دارد.

---

<sup>1</sup>Re-mesh approaches  
<sup>2</sup>mapping



## ۲-۳- ایده روشهای بدون جزء

بررسی دقیق مشکلات روش اجزاء محدود ریشه این مشکلات را نشان می دهد که همانا نیاز به استفاده از اجزاء است که اجزاء تشکیل دهنده FEM هستند. شبکه ای با اتصالات از پیش تعریف شده برای تشکیل اجزاء ضروری است. مادامی که اجزاء می باید استفاده شوند مشکلات ذکر شده در قسمت قبل به سادگی حل نخواهند شد. به همین دلیل، ایده حذف اجزاء و شبکه به طور طبیعی بوجود آمد و ایده روشهای بدون جزء پیشنهاد شد که در آنها هندسه مساله توسط یک سری گرههایی که بطور دلخواه توزیع شده اند مشخص می شود.

روشهای بدون جزء پتانسیل زیادی برای حل مشکلاتی که در بالا ذکر شده را دارا هستند. با توجه به اینکه هیچ شبکه و اتصال از پیش تعیین شده ای برای گره ها وجود ندارد، روشهای ابداعی به آسانی قابل استفاده هستند. این عدم نیاز به اتصال از پیش تعیین شده گره ها در روشهای بدون جزء موجب راحتی در اضافه کردن یا کم کردن نقاط یا گره ها در هر زمان و در هر کجا می شود. بعنوان مثال در تحلیل تنش در مکانیک جامدات، اغلب نواحی تمرکز تنش وجود دارند که فرد می تواند تقریباً آزادانه گره ها را در محلهایی مانند اطراف ترکها که دارای تمرکز تنش هستند اضافه کند بدون اینکه نگران رابطه آنها با دیگر گره های موجود باشد. در مسائل رشد ترک، گره ها را می توان به آسانی در اطراف نوک ترک قرارداد تا بتوان تمرکز تنش را با دقت دلخواه در آن مشاهده کرد. این اصلاح گرهی می تواند همراه با اشاعه ترک در داخل هندسه مساله جابجا شود. گره گذاری<sup>۵۴</sup> برای گستره زیادی از مسائل، اعم از دوبعدی یا سه

---

<sup>1</sup>node generation

بعدی، شامل خطی و غیرخطی، تحلیل تنش استاتیکی و دینامیکی را می توان بطور موثر و نسبتاً ساده ای در روشهای بدون جزء انجام داد.

چون نیازی به شبکه بندی در روشهای بی نیاز از شبکه اجزاء وجود ندارد، گره گذاری را می توان به طور کاملاً خودکار توسط کامپیوتر انجام داد که بدین ترتیب در وقتی که مهندس صرف شبکه بندی FEM می کند صرفه جویی زیادی می شود. این معادل کاهش قابل توجهی در هزینه و زمان پروژه های مدل سازی و شبیه سازی است.

روشهای بدون جزء زیادی تاکنون ایجاد شده اند که ویژگیهای مهم آنها در جدول ۱-۲ آورده شده اند.

## ۲-۴- روشهای بدون جزء در مسائل مهندسی

در ساخت یک سیستم مهندسی مدرن و پیشرفته، مهندسی می باید فرآیند پیچیده ای شامل مدل سازی، شبیه سازی، تجسم، تحلیل، طراحی، ساخت نمونه، آزمایش و ساخت را طی کنند. این مراحل در شکل ۱-۲ نشان داده شده اند. این مراحل ماهیتشان اغلب تکراری است به این ترتیب که بعضی مراحل با توجه به نتایج بدست آمده در جدیدترین مرحله تکرار می شوند تا بهترین عملکرد برای سیستم تحت ساخت بدست آید. مواردی مانند مدل سازی فیزیکی، ریاضی، کامپیوتری و شبیه سازی کامپیوتری نقش روزافزونی را در ساخت یک سیستم مهندسی پیشرفته به

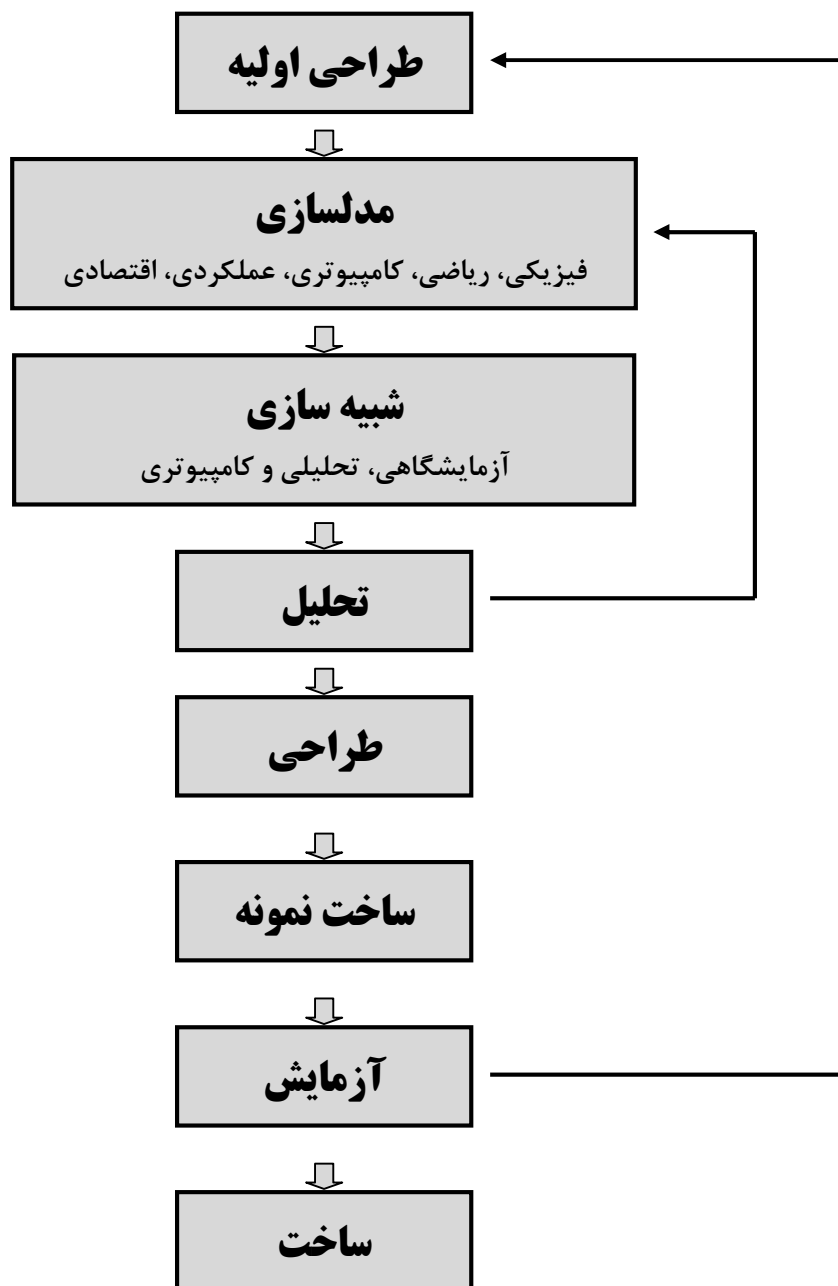
صورت سریع و مقرون به صرفه بازی می کنند. روشها و تکنیک های کامپیوتری زیادی را می

توان در این موارد استفاده کرد. در اینجا بحث در مورد ایجاد و کاربرد روشهای بدون جزء است.

جدول ۱-۲- ویژگیهای برخی از روشهای بدون جزء که تاکنون ابداع شده اند

عنوان روش	مرجع	دستگاه معادلات	نوع تابع شکل
Diffuse element method	Nayroles et al., 1992	Weak form	MLS approximation, Galerkin method
Element free Galerkin (EFG) method	Belytschko et al., 1994b	Weak form	MLS approximation, Galerkin method
Meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) method	Atluri and Zhu, 1998	Local weak form	MLS approximation, Petrov-Galerkin method
Finite point method	Onate et al., 1996; Lyszka and Orkisz, 1980; Jensen, 1980	Strong form	Finite differential representation (Taylor series), MLS approximation
Smooth particle hydrodynamics	Lucy, 1977; Gingold and Monaghan, 1977	Strong form	Integral representation
Reproducing kernel particle method	Liu, W. K. et al., 1993	Strong form or weak form	Integral representation (RKPM)
hp-clouds	Oden and Abani, 1994; Armando and Oden, 1995	Weak form	Partition of unity, MLS
Partition of unity FEM	Babuška and Melenk, 1995	Weak form	Partition of unity, MLS
Point interpolation method	Liu, G. R. and Gu, 1999, 2000b, 2001a,b,c,d	Weak form and local weak form	Point interpolation
Boundary node methods	Mukherjee and Mukherjee, 1997a,b	Weak form and local weak form	MLS
Boundary point interpolation methods	Liu, G. R. and Gu, 2000d; Gu and Liu, G. R., 2001a,e	Weak form and local weak form	Point interpolation

در این فصل، مراحل کلی مدل سازی و شبیه سازی با استفاده از روشهای بدون جزء و تفاوت آنها با دیگر روشهای موجود، بخصوص روش اجزاء محدود که بطور گسترده مورد استفاده قرار می گیرد، شرح داده می شود.



شکل ۲-۱- مراحل ساخت یک سیستم مهندسی

## ۲-۴-۱- پدیده های فیزیکی در مهندسی

تعداد زیادی از پدیده های مختلف فیزیکی در سیستمهای مهندسی وجود دارند که بسیاری از آنها را نمی توان مدلسازی و شبیه سازی نمود. در حقیقت، تنها پدیده های بزرگی که تاثیر مهمی در عملکرد سیستم دارند باید مدل سازی و شبیه سازی شوند تا یک درک لازم، کافی و عمیق از سیستم بدست آید.

انواع مختلفی از معادلات دیفرانسیل یا معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی در زمینه های مختلفی مانند مکانیک جامدات، سازه ها و جریان سیالات حاکم هستند. این پدیده ها می توانند با استفاده از ابزار مناسب برای شبیه سازی تحلیل شوند. مشابه روش FEM، روش اختلاف محدود و روش احجام محدود، روش های بدون جزء نیز ابزاری برای حل معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی حاکم بر پدیده های مختلف فیزیکی هستند.

## ۲-۴-۲- مراحل حل

مراحل کلی حل مسائل مهندسی به روش FEM و روشهای بدون جزء در شکل ۲-۲ نشان داده شده است. این دو روش در مرحله تولید شبکه یا شبکه بندی با یکدیگر تفاوت دارند. علاوه بر آن، در FEM توابع شکل<sup>۵۵</sup> با استفاده از اجزاء ساخته می شوند و این توابع شکل برای اجزاء مشابه هستند. در حقیقت، در صورتیکه از دستگاه مختصات طبیعی استفاده شود این توابع شکل با مختصات طبیعی برای تمام اجزاء هممنوع، مشابه هستند. این توابع شکل معمولاً برای انواع مختلف اجزاء قبل از شروع تحلیل اجزا محدود از پیش تعریف شده هستند. اما در روشهای بدون جزء توابع شکل ایجاد شده معمولاً تنها برای یک نقطه خاص مورد نظر هستند و تابع شکل با تغییر

---

<sup>۱</sup>shape functions

محل نقطه مورد نظر تغییر می کند. تشکیل توابع شکل در روشهای بدون جزء در جریان تحلیل انجام می شود، نه پیش از تحلیل. پس از تشکیل دستگاه معادلات کل، روشهای بدون جزء فرآیند مشابهی را با روش FEM، البته بجز برخی اختلافات جزئی در جزئیات پیاده سازی، طی می کنند. به همین دلیل، بسیاری از تکنیک های ایجاد شده در FEM در دهه های گذشته می توانند با یا بدون اعمال اصلاحاتی در روشهای بدون جزء استفاده شوند.

در قسمتهای بعدی، مراحل اصلی حل در روشهای بدون جزء با تکیه بر تفاوتهای بین روش اجزاء محدود و روشهای بدون جزء شرح داده می شوند.



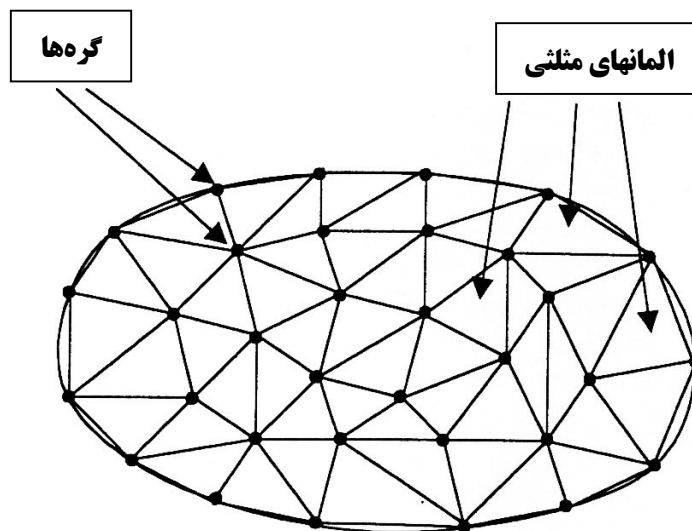
شکل ۲-۲- فلوچارت مراحل حل در روش اجزاء محدود و روشهای بدون جزء

## ۲-۴-۳- مدل سازی هندسه مساله

سازه های واقعی به طور کلی بسیار پیچیده هستند و باید به صورت یک هندسه ساده تر

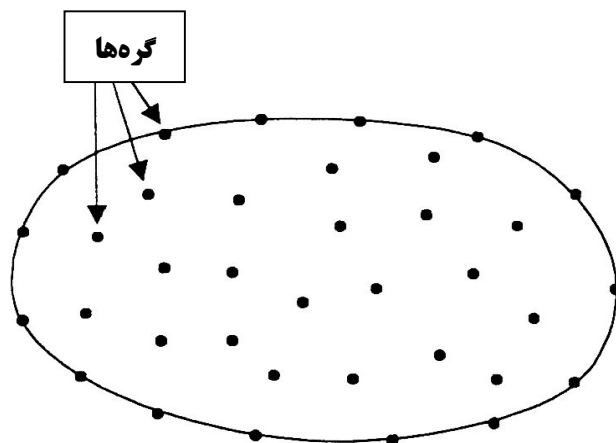
و قابل تحلیل در نظر گرفته شوند. در FEM، قسمتهای منحنی هندسه شکل و مرز آن را می توان به

کمک منحنی و سطوح منحنی با استفاده از اجزاء مرتبه بالاتر مدل کرد. در صورتیکه از اجزاء های خطی استفاده شود، که در اغلب موارد عملی همینطور است، این منحنی ها و سطوح به صورت خطوط صاف یا سطوح هموار در نظر گرفته می شوند. شکل ۲-۳ مثالی از یک مدل اجزا محدود که بوسیله اجزاء مثلثی و در گوشه مرزهای آن بوسیله خطوط صاف اجزاء مثلثی مدل شده است را نشان می دهد. دقت مدل سازی قسمتهای منحنی به وسیله تعداد و مرتبه اجزاء مورد استفاده کنترل می شود. اما بدلیل محدودیتهایی که از لحاظ زمان و منابع کامپیوتری شامل سخت افزار وجود دارد لازم است که تعداد اجزاء را کاهش داد. به همین دلیل، جزئیات دقیقتر هندسی تنها در صورتیکه نتایج بسیار دقیق در آن نواحی مد نظر باشد می باید مدل شوند و نتایج شبیه سازی می باید با در نظر گرفتن این تقریبهای هندسی تفسیر شود. تحلیل گر می باید چگالی توزیع اجزاء که برای دستیابی به دقت دلخواه در نواحی مهم از دامنه مساله لازم است را تعیین کند.



شکل ۲-۳- مدل‌سازی مرزهای منحنی هندسی با استفاده از اضلاع خطی اجزاء مثلثی در FEM





شکل ۲-۴- مشخص کردن مرزهای هندسی در روشهای بدون جزء با استفاده از گره ها

در روشهای بدون جزء، مرز مساله بوسیله یک سری گره<sup>۵۶</sup> مشخص<sup>۵۷</sup> (و نه جزء بندی<sup>۵۸</sup>) می شود که در شکل ۲-۴ نشان داده شده است. در هر نقطه ای در بین دو گره واقع بر مرز می توان به کمک توابع شکل بدون جزء درونیابی کرد. بدلیل آنکه توابع شکل بدون جزء به کمک گره ها در یک محدوده موضعی متحرک<sup>۵۹</sup> تولید می شوند، مرزهای منحنی را می توان به طور بسیار دقیقی حتی با استفاده از توابع پایه خطی<sup>۶۰</sup> تقریب زد. معمول است که در روشهای بدون جزء از چند جمله ایهای مرتبه بالاتر استفاده می شود. قابل ذکر است که این درونیابی هندسی را می توان به کمک همان روشی که برای درونیابی متغیرهای مکانی در روشهای بدون جزء انجام می شود، انجام داد.

<sup>1</sup>node  
<sup>2</sup>represented  
<sup>3</sup>discretized  
<sup>4</sup>moving local domain  
<sup>5</sup>linear polynomial bases

بسته به نرم افزار مورد استفاده، راههای زیادی برای تولید یک هندسه ساده شده صحیح توسط کامپیوتر وجود دارد. نقاط را می توان بطور ساده ای با دادن مختصات آن ها ایجاد کرد. خطوط و منحنی ها را می توان بطور ساده با متصل کردن نقاط یا گره ها تولید کرد. نقاط، خطوط یا منحنی ها، سطوح و اجسام را می توان برای ایجاد نقاط، خطوط (منحنی ها)، سطوح و اجسام جدید دوران، انتقال یاقرینه کرد. محیط های گرافیکی برای کمک به ایجاد این اجسام مورد استفاده قرار می گیرند. تعداد زیادی از نرم افزارهای طراحی کامپیوتری<sup>۶۱</sup> وجود دارند که می توانند فایل هایی حاوی هندسه سیستم مهندسی طراحی شده ایجاد کنند. این فایلها اغلب بوسیله نرم افزارهای مدل سازی خوانده می شوند.

استفاده از این فایلها موجب صرفه جویی زیادی در وقت برای تولید هندسه مدلها می شود. اما در بسیاری از موارد، فایلهای خوانده شده می باید قبل از شبکه بندی مورد اصلاح و ساده شدن قرار گیرند. این ابزار تولید هندسه مساله می توانند هم در FEM و هم در روشهای بدون جزء استفاده شوند.

دانش، تجربه وقضاوت مهندسی بسیار در مدلسازی هندسه یک سیستم مهم هستند. در بسیاری از موارد، هندسه های با جزئیات دقیق بیشتر نقش زیبا کنندگی دارند و عملکرد سیستم مهندسی را آنچنان تحت تاثیر قرار نمی دهند. این ویژگیهای اضافی را می توان به سادگی حذف یا ساده کرد. البته این کار در مواردی که تغییر جزئی در هندسه مدل موجب اختلاف بزرگی در نتایج شبیه سازی می شود مجاز نیست. تحلیل ابتکاری<sup>۶۲</sup> برای حل این مساله بطور شهودی و مستقل از

---

<sup>1</sup>Computer Aided Design  
<sup>2</sup>adaptive

قضاوت تحلیل گر ایده آل است. روشهای بدون جزء انعطاف بیشتری در تحلیلهای ابتکاری از خود نشان می دهند.

نکته بسیار مهم دیگر، لزوم ساده بودن مدل برای استفاده در مدل سازی ریاضی است. به عنوان مثال، یک صفحه دارای سه بعد هندسی است اما صفحه در تئوری صفحات در مکانیک از نظر ریاضی تنها در دو بعد نشان داده می شود. به همین دلیل، هندسه یک صفحه در مکانیک یک سطح صاف دو بعدی است که معمولاً بوسیله سطح ختشی<sup>۳</sup> نمایش داده می شود. در FEM، اجزاء صفحه‌ای<sup>۴</sup> در شبکه بندی سطوح صفحات بکار می روند. وضعیت مشابهی نیز در مورد پوسته ها برقرار است. یک تیر نیز از نظر هندسی دارای سه بعد است اما در تئوری تیر در مکانیک از نظر ریاضی تنها در یک بعد نشان داده می شود. به همین دلیل، هندسه یک تیر در مکانیک یک خط صاف یا منحنی یک بعدی است. در FEM، اجزاء تیر<sup>۵</sup> می باید برای مدل سازی خطوط استفاده شوند. وضعیت مشابهی نیز در مورد سازه های خرپایی برقرار است.

در روشهای بدون جزء، تیرها، صفحات و پوسته ها، همگی را می توان بوسیله مجموعه ای از نقاط که بطور دلخواه توزیع شده اند نمایش داد. در فرمول بندی روشهای بدون جزء همان تئوریهای مورد استفاده در FEM بکار می روند و تفاوتی که عمدتاً وجود دارد در تشکیل توابع شکل است.

---

<sup>3</sup>neutral surface  
<sup>4</sup>plate elements  
<sup>1</sup>beam elements

در روش اجزاء محدود، شبکه بندی به منظور مجزا سازی هندسه شکل به شبکه های کوچکتری به نام جزء یا سلول انجام می گیرد و انواع زیادی از اجزاء برای مسائل مختلف بوجود آمده اند. منطقی که در پس این مجزا سازی<sup>۶۷</sup> وجود دارد را می توان بطور ساده ای توضیح داد. ما انتظار داریم که حل یک مساله مهندسی بسیار پیچیده باشد و تغییرات آن به حدی است که توسط توابعی که بر روی کل مساله تعریف می شوند قابل پیش بینی نیست. اما در صورتیکه بتوان دامنه مساله را به اجزاء کوچکتری با استفاده از یک مجموعه نقاط که به صورت از پیش تعیین شده به یکدیگر متصل هستند تقسیم کرد، حل مساله در داخل هر جزء را می توان به کمک توابع ساده ای مانند چند جمله ای ها به سادگی تقریب زد که این توابع، توابع شکل<sup>۶۸</sup> نامیده می شوند. حل هایی که برای تمامی اجزاء ارائه می شوند تشکیل حل کلی مساله را می دهند.

شبکه بندی یکی از قسمتهای بسیار مهم پیش از انجام تحلیل در FEM می باشد و می تواند برای تحلیل گر بسیار وقت گیر باشد. محدوده مساله می باید بطور صحیح با استفاده از اجزاء با اشکال خاص مانند مثلث و چهار ضلعی شبکه بندی شود و هیچ همپوشانی<sup>۶۹</sup> یا فاصله ای<sup>۷۰</sup> بین اجزاء مجاز نیست. اطلاعاتی مانند نحوه اتصال اجزاء<sup>۷۱</sup> نیز می باید قبل از شبیه سازی فراهم گردند. ایده آل است که بتوان از یک تولید کننده شبکه کاملاً خودکار استفاده کرد که متاسفانه هنوز چنین موردی در بازار موجود نیست. بیشتر بسته های نرم افزاری کاربردی تجاری امروزه دارای پیش پردازنده های نیمه اتوماتیک هستند. همچنین بسته های نرم افزاری تولید شده

---

<sup>2</sup>node generation

<sup>3</sup>discretization

<sup>4</sup>shape function

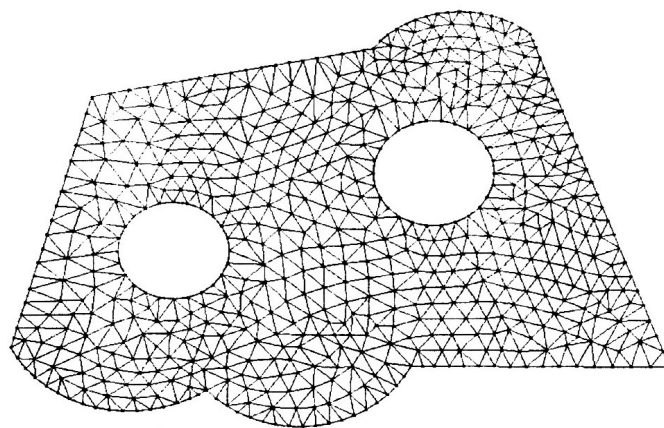
<sup>5</sup>overlapping

<sup>1</sup>gap

<sup>2</sup>element connectivity

اند که مختص شبکه بندی هستند. چنین بسته های نرم افزاری می توانند فایل مورد نیاز نرم افزارهای مدل سازی و شبیه سازی برای شبکه بندی را تامین کنند.

مثلث بندی<sup>۷۲</sup> یکی از راحت ترین راهها برای تولید اجزاء مثلثی است. این عمل را می توان به طور کاملاً خودکار برای فضاهای دوبعدی و سه بعدی انجام داد. به همین دلیل در اکثر پیش پردازنده های تجاری از مثلث بندی استفاده می شود. مزیت دیگر مثلث بندی، انعطاف بالای آن در مدل سازی هندسه و مرزهای پیچیده است. عیب مثلث بندی این است که دقت شبیه سازی های انجام شده براساس اجزاء مثلثی غالباً بسیار پایین تر از نتایج بدست آمده از اجزاء چهار ضلعی با چگالی گره های مشابه است. اما تولید اجزاء چهارضلعی به طور خودکار مشکل تر است. مثالی از شبکه بندی مثلثی در شکل ۲-۵ نشان داده شده است (مرجع [۲۴]).



شکل ۲-۵- نمونه ای از شبکه بندی مثلثی در یک مسأله دو بعدی [۲۴]

در روشهای بدون جزء، دامنه مساله بوسیله یک سری گره هایی که بطور دلخواه توزیع شده اند و در شکل ۲-۴ نمونه ای از آن نشان داده شده مشخص می شود. هیچ نیازی به استفاده از شبکه ها

---

<sup>3</sup>triangulation

یا اجزاء برای درونیابی متغیرهای مکانی<sup>۷۳</sup> وجود ندارد. بنابراین، نیازی به تعریف رابطه بین نقاط نیز وجود ندارد. گره ها را می توان به سادگی با استفاده از الگوریتم های مثلث بندی متداول که برای مسائل دو بعدی و سه بعدی موجود هستند تولید کرد. اهمیت روشهای بدون جزء از نقطه نظر شبکه بندی این است که عمل گره گذاری را می توان به طور کاملاً خودکار و بدون دخالت انسان انجام داد. این موضوع موجب صرفه جویی قابل توجهی در وقت تحلیل گر می شود.

هیچ یک از روشهای بدون جزء برای درونیابی متغیر مکانی نیازمند جزء نیستند. اما بعضی از روشهای بدون جزء مانند روش بدون جزء گالرکین<sup>۷۴</sup> (روش EFG) نیازمند شبکه پیش زمینه ای از سلولها برای انتگرالگیری ماتریس های ساختاری هستند. با توجه به اینکه از این شبکه تنها برای انتگرالگیری استفاده می شود می توان از هر شکل قابل قبول از سلولها، به شرط کافی بودن دقت انتگرالگیری آن، استفاده کرد. برخی روشهای بدون جزء مانند MLPG<sup>۷۵</sup> نیز وجود دارند که نیازمند شبکه اجزاء برای درونیابی متغیر مکانی و انتگرالگیری نیستند. این نوع از روشهای بدون جزء ضرورتاً بی نیاز از شبکه اجزاء نامیده می شوند، چرا که تنها نیازمند یک شکل ساده از شبکه موضعی برای انتگرالگیری ماتریسهای ساختاری هستند که می توان این شبکه موضعی را به طور نسبتاً راحتی به طور خودکار ایجاد کرد.

عمل گره گذاری معمولاً توسط پیش پردازنده ها<sup>۷۶</sup> انجام می شود. پیش پردازنده اعداد یکتایی را به هر گره جسم یا سازه، به طور خودکار نسبت می دهد. نرم افزارهای تجاری که منحصراً مخصوص گره گذاری باشند بسیار اندک هستند و به همین دلیل می باید از پیش پردازنده هایی که برای FEM ساخته شده اند استفاده کرد. این پیش پردازنده ها معمولاً بسیار پیچیده

---

<sup>1</sup>field variable

<sup>2</sup>Element-Free Galerkin method

<sup>3</sup>Moving Local Petrov-Galerkin method

<sup>4</sup>pre-processors

هستند در حالیکه گره‌گذاری بدون جزء تنها از قسمت کوچکی از ظرفیت آنها استفاده می‌کند. تمام آنچه که برای یک تولید کننده گره در روشهای بدون جزء مورد نیاز است یک پیش پردازنده کوچک برای تولید اجزاء مثلثی است. ما اغلب از گره های این اجزاء مثلثی استفاده می‌کنیم و اجزاء را جدا می‌کنیم. در بعضی روشها، از اجزاء های تولید شده به منظور انتگرالگیری نیز استفاده می‌شود. در تحقیق حاضر از دستوراتی قبل از برنامه اصلی تحلیل استفاده شده تا گره ها تولید گردند. توزیع این گره‌ها از اصولی که در ادامه می‌آید تبعیت می‌کنند.

## ۲-۴-۵- ایجاد تابع شکل

در FEM، توابع شکل براساس اجزاء انتخاب می‌شوند و بنابراین محاسبه توابع شکل در آنها آسان است. در سالهای اولیه ابداع FEM بیشتر کار را فرمول بندی انواع مختلف اجزاء به خود اختصاص می‌داد. تمام توابع شکل در روش اجزا محدود خاصیت تابع دلتای کرونگر<sup>۷۷</sup> را برآورده می‌سازند.

اما در روشهای بدون جزء، ایجاد توابع شکل هنوز یک نکته کلیدی است. این به این دلیل است که توابع شکل در روشهای بدون جزء می‌بایست بدون داشتن دانشی درباره رابطه بین گره ها ساخته شوند. این دغدغه اصلی در روشهای بدون جزء است. روشی که امروزه بیشترین استفاده را در ساخت توابع شکل در روشهای بدون جزء دارد روش تقریب حداقل مربعات متحرک<sup>۷۸</sup> (MLS) است. استفاده از MLS منجر به ایجاد بسیاری از روشها و تکنیک ها در

---

<sup>1</sup>Kronecker delta function

<sup>2</sup>Moving Least Square

روشهای بدون جزء شده است. مشکل اصلی در تقریب MLS این است که توابع شکل تولید شده خاصیت تابع دلتای کرونکر را برآورده نمی سازند.

روش امیدوار کننده جدیدی که برای تولید توابع شکل ایجاد شده است روش درونیابی نقطه ای<sup>۷۹</sup> (PIM) است که توابع شکلی که بوسیله آن تولید می شوند خاصیت تابع دلتای کرونکر را برآورده می سازند. به همین دلیل، PIM بسیاری از مشکلاتی که در زمینه روشهای بدون جزء در ذهن محققین وجود داشته است را برطرف نموده است.

## ۲-۴-۶- خصوصیات مصالح

در اجزاء محدود خصوصیات مصالح را می توان برای گروهی از اجزاء یا در صورت نیاز برای هر جزء یا در نقاط گوسی تعریف کرد. برای شبیه سازی پدیده های مختلف، مصالح مختلفی مورد نیاز هستند. وارد کردن خصوصیات مصالح در پیش پردازنده هم در FEM و هم در روشهای بدون جزء ساده است. تمام آنچه که یک تحلیل گر می باید انجام دهد عبارتست از دسته بندی مصالح مختلف و اختصاص یک کلید به هر کدام و مشخص کردن نواحی یا اجزائی که این مصالح به آنها اختصاص می یابند. البته بدست آوردن این خصوصیات همیشه کار ساده ای نیست و پایگاههای اطلاعاتی تجاری برای مصالح وجود دارند که می توان از بین آنها انتخاب کرد. معمولاً برای تعیین دقیق خصوصیات مصالح برای استفاده در حل مساله آزمایشاتی لازم است.

در روشهای بدون جزء، خصوصیات مصالح را می توان برای زیرفضاهایی از مساله تعریف کرد. به هر حال، یک سری جنبه های اجرایی، در رابطه با مرزهای<sup>۸۰</sup> مصالح مختلف وجود دارند و

---

<sup>1</sup>Point Interpolation Method  
<sup>2</sup>interfaces



مسائلی وجود دارند که باید حل شوند، مانند نحوه درونیابی متغیر مکانی در نزدیکی مرز مصالح مختلف و محاسبه موثر و دقیق تنشها در نزدیکی مرزها بدون استفاده از شبکه اجزاء.

## ۲-۴-۷- شرایط مرزی، اولیه و بارگذاری

شرایط مرزی، اولیه و بارگذاری نقش تعیین کننده ای در حل یک مساله دارند. در FEM، اعمال این شرایط کار زیاد مشکلی نیست و اغلب توسط پیش پردازنده های تجاری و به صورت گرافیکی انجام می شود. کاربران می توانند این شرایط را به خصوصیات هندسی (مانند نقاط، خطوط (منحنی ها)، سطوح و اجسام) یا به اجزاء نسبت دهند. اعمال این شرایط بطور دقیق برای سیستمهای مهندسی واقعی نیازمند تجربه، دانش و قضاوت درست مهندسی است. روشهای استاندارد برای اعمال شرایط مرزی، به صورت قیود تک نقطه ای یا چند نقطه ای وجود دارند. تمام روشهای ابداع شده در این زمینه در FEM با انجام بعضی اصلاحات قابل استفاده در روشهای بدون جزء هستند.

در روشهای بدون جزء که از تقریبهای MLS برای ساخت توابع شکلی استفاده می شود، تکنیکهای خاصی برای اعمال شرایط مرزی تکیه گاهی<sup>۱</sup> لازم است، زیرا توابع شکل تولید شده شرط تابع دلتای کرونکر را برآورده نمی سازند. روشهای بدون جزء بر پایه توابع شکل PIM شرط تابع دلتای کرونکر را برآورده می سازند.

در روشهای بدون جزء، توابع شکل معمولاً همزمان با تشکیل معادلات کل سیستم ساخته می شوند. این موضوع روش دیگری برای اعمال شرایط مرزی در مرحله تشکیل توابع شکل یا محاسبه ماتریس سختی فراهم می آورد. در این روش، دستگاه معادلات گسسته کل شامل درجات

---

<sup>1</sup>essential (displacement) boundary conditions

آزادی گره های دارای شرایط مرزی خاص نخواهند بود. در ارتباط با این روش هنوز کار زیادی لازم است.

۲-۴-۸- شیبه سازی

۲-۴-۸-۱- معادلات گسسته سیستم<sup>۸۲</sup>

برای گسسته سازی<sup>۸۳</sup> معادلات دیفرانسیل حاکم بر اساس نواحی گسسته می باید از اصول صحیحی پیروی کرد. این اصول از مساله ای تا مساله دیگر تفاوت می کنند. هم در FEM و هم در روشهای بدون جزء از این اصول استفاده می شود، اما روش و روند اعمال این اصول در دو روش به دلیل ماهیت مختلف آنها متفاوت است.

در FEM، دستگاه معادلات گسسته کل سیستم را می توان با استفاده از اصول کلی و توابع شکل تولید شده برپایه اجزاء فرمولبندی کرد. بطور کلی، چهار دسته اصول اساسی برای تشکیل این دستگاه معادلات بکار می روند. اولین دسته از این اصول بر پایه اصل کار مجازی<sup>۸۴</sup> هستند، مانند اصل همیلتون<sup>۸۵</sup> اصل حداقل انرژی پتانسیل، و مانند آنها. روش FEM معمول بر پایه این اصول ایجاد شده است. دسته دوم این اصول بر پایه روشهای برجای<sup>۸۶</sup> هستند و در حقیقت قالب کلی تری از دسته اول دارند و از آنها می توان برای استخراج روابط FEM در جامدات، سازه ها و سیالاتی که معادلات دیفرانسیل با مشتقات نسبی حاکم بر آنها موجود هستند استفاده کرد. سومین دسته از

---

<sup>2</sup>Discrete System Equations

<sup>1</sup>discretizing

<sup>1</sup>principle of virtual work

<sup>2</sup>Hamilton's principle

<sup>3</sup>residual methods

این اصول بر مبنای سری تیلور هستند که منجر به ایجاد روش اختلاف محدود<sup>4</sup> (FDM) شده است. چهارمین و آخرین دسته از این اصول بر مبنای کنترل قوانین پایستاری در هر جزء (حجم) مساله هستند. روش احجام محدود<sup>5</sup> (FVM) بر اساس این دسته اصول ایجاد شده است. در مسائل عملی مهندسی، دو اصل اول بیشتر برای شبیه سازی جامدات و سازه ها و دو اصل دیگر اغلب برای شبیه سازی جریان سیالات و مسائل انتقال حرارت استفاده می شوند. با این وجود، FEM برای تولید نرم افزارهای تجاری در مسائل جریان سیالات و انتقال حرارت نیز استفاده شده است و FDM نیز می تواند در مسائل جامدات و سازه ها بکار رود.

می توان نشان داد که بنیان ریاضی تمامی روشهای ذکر شده روش برجا است. انتخاب مناسب توابع آزمون و خطا<sup>6</sup> در روش برجا می تواند منجر به فرمول بندی FEM, FDM یا FVM شود.

بسیاری از روشهای بدون جزء را می توان با استفاده از سه دسته اصل اول فرمول بندی کرد. در گسسته سازی مکانی، دو اصل اول بیشتر مورد استفاده قرار می گیرند. فرمول بندی ها برپایه دو اصل اول شکل ضعیف یا Weak Form و فرمول بندی های برپایه اصل سوم شکل قوی یا Strong Form نامیده می شوند. دستگانه های معادلات گسسته استخراج شده بر پایه شکل ضعیف پایدارتر هستند و نتایج بسیار دقیقتری بدست می دهند. بعضی روشهای بدون جزء از شکل موضعی یا محلی روش برجا، بخصوص برای ایجاد روشهای کاملاً بدون شبکه اجزاء بهره می برند. برای گسسته سازی زمان اغلب از اصل سوم که بر مبنای سری تیلور است استفاده می شود. بطور خلاصه، کاربرد این اصول در روشهای بدون جزء بسیار مشابه FEM است.

---

<sup>4</sup>Finite Difference Method

<sup>5</sup>Finite Volume Method

<sup>6</sup>trial and test functions

## ۲-۴-۸-۲- روشهای حل دستگاه معادلات<sup>۹۰</sup>

پس از تشکیل دستگاه معادلات گسسته می باید برای تعیین متغیرهای مکانی آن را بوسیله یک روش حل معادلات حل نمود. روش حل در FEM و روش های بدون جزء مشابه است و بستگی زیادی به سخت افزار کامپیوتر دارد. بسته های نرم افزاری مختلف از الگوریتم های متفاوتی با توجه به فیزیک پدیده شبیه سازی شده استفاده می کنند. دو نکته بسیار مهم باید در انتخاب الگوریتم های حل دستگاه معادلات مورد توجه قرار گیرد. نکته اول حافظه مورد نیاز است و نکته دوم زمان مورد نیاز CPU است. مشابه روش FEM، در روشهای بدون جزء نیز ماتریس سختی بدست آمده نواری<sup>۹۱</sup> است و می توان آن را به همان صورتی که در FEM انجام می شود برای کاهش حافظه و افزایش عملکرد محاسبات مورد پردازش قرارداد. بطور کلی، پهنای نوار<sup>۹۲</sup> در ماتریسهای سختی تولید شده در روشهای بدون جزء کمی بزرگتر از روش FEM است. تکنیکهای ابداع شده در FEM برای کاهش پهنای نوار ماتریسهای سختی، با بهینه سازی قرارگیری گره ها، در روشهای بدون جزء نیز قابل اعمال است.

بطور کلی دو دسته بندی در روشهای حل دستگاه معادلات وجود دارد: روشهای مستقیم<sup>۹۳</sup> و روشهای تکراری<sup>۹۴</sup>. روشهای مستقیم که اغلب مورد استفاده قرار می گیرند روش حذفی گوس<sup>۹۵</sup> و روش جداسازی ماتریس<sup>۹۶</sup> هستند. این روشها برای سیستمهای نسبتاً کوچک خوب عمل می کنند. روشهای مستقیم بر روی کل دستگاه معادلات عمل می کنند و به همین دلیل نیاز به حافظه زیادی دارند. البته می توان این روشها را طوری برنامه نویسی کرد که رویهم گذاری مقادیر گرهی

---

<sup>1</sup>Equation Solvers

<sup>2</sup>banded

<sup>3</sup>bandwidth

<sup>1</sup>direct methods

<sup>2</sup>iterative methods

<sup>3</sup>Gauss elimination method

<sup>4</sup>matrix decomposition method

تنها برای اجزائی که در هر مرحله حل معادلات درگیر هستند صورت گیرد. این کار بطور قابل توجهی از نیاز به حافظه برای ذخیره می کاهد. تمام این تکنیکها که برای FEM ابداع شده اند می توانند در روشهای بدون جزء نیز بکار روند.

روشهای تکراری شامل گاوس - ژاکوبی<sup>۹۷</sup>، روش گاوس سیدل<sup>۹۸</sup>، روش SOR<sup>۹۹</sup>، روشهای برجای مزدوج عمومیت یافته<sup>۱۰۰</sup>، روش آزادسازی خطی<sup>۱۰۱</sup> و مانند آنها هستند. این روشها برای سیستمهای بزرگتر خوب عمل می کنند. روشهای تکراری اغلب طوری برنامه نویسی می شوند که از رویهم گذاری کامل ماتریسهای سیستم اجتناب گردد که این کار موجب صرفه جویی قابل توجهی در حافظه مورد نیاز می شود. عملکرد این روشها از جهت سرعت همگرایی معمولاً بستگی زیادی به مساله دارد. بطور کلی، عملکرد این روشها در سیستمهای بزرگ، بخصوص مسائل سه بعدی بهتر است.

در مسائل غیرخطی یک حلقه تکراری دیگر نیز نیاز است. معادله غیرخطی را باید بطور صحیحی در قالب تکراری یک معادله خطی فرمول بندی کرد. در مسائل وابسته به زمان، ایجاد گامهای زمانی نیز ضروری است. بطور کلی دو روش برای ایجاد گامهای زمانی وجود دارد: صریح<sup>۱۰۲</sup> و غیر صریح<sup>۱۰۳</sup>. روشهای غیر صریح معمولاً از نظر عددی پایدارتر ولی از نظر محاسباتی ضعیف تر از روشهای صریح هستند. علاوه بر آن، الگوریتمهای تماسی<sup>۱۰۴</sup> را می توان بطور بسیار ساده تری

---

<sup>5</sup>Gauss-Jacobi method

<sup>6</sup>Gauss-Seidel method

<sup>7</sup>Successive Over Relaxation method

<sup>8</sup>generalized conjugate residual methods

<sup>9</sup>line relaxation method

<sup>10</sup>explicit

<sup>11</sup>implicit

<sup>1</sup>contact algorithms

به روش FEM صریح ایجاد کرد. این تکنیک های ایجاد شده در FEM را نیز می توان با اعمال اصلاحاتی در روشهای بدون جزء بکاربرد.

روشهای بدون جزء معمولاً نیازمند زمان CPU بیشتری هستند، چرا که تولید توابع شکل در آنها وقت گیرتر است و در طی محاسبات انجام می شود. در روشهای بی نیاز از شبکه که برپایه توابع شکل MLS هستند تلاش اضافه ای که صرف اعمال شرایط مرزی می شود نیز زمان بیشتری از CPU می گیرد. در روشهای بدون جزء که برپایه توابع شکل پترو-گالرکین موضعی هستند، عملکرد محاسباتی بدلیل غیر متقارن بودن ماتریس سختی ایجاد شده پایین تر نیز می آید.

امروزه، مردم بیشتر متوجه زمانی هستند که مهندسی روی پروژه ها صرف می کنند و کمتر نگران زمان CPU هستند، چرا که زمان CPU امروزه ارزان و ارزانتر شده است، در حالیکه هزینه مهندسی پرورش یافته گران و گران تر شده است. به همین دلیل، زمان CPU بیشتر در این روشها عیب عمده ای به حساب نمی آید. علاوه بر آن، نتایج بدست آمده از روشهای بدون جزء معمولاً دقیقتر از نتایج بدست آمده از روش اجزاء محدود هستند، چرا که هیچ ناپیوستگی تنش در مرز بین اجزاء وجود ندارد. سرعت همگرایی روشهای بدون جزء نیز بطورکلی از سرعت همگرایی روش اجزاء محدود بیشتر است [۳۰].

## ۲-۵- روند کلی حل در روش های بدون جزء

حال که نقش روشهای بدون جزء در شبیه سازی سیستمهای مهندسی و تفاوت های بین روشهای بدون جزء و روش اجزاء محدود در زمینه های مختلف توضیح داده شد، در اینجا روند کلی حل

مساله در روشهای بدون جزء شرح داده می شود و بعضی عبارات مهم که بطور مکرر در روشهای بدون جزء بکار می رود توضیح داده می شود :

## ۲-۵-۱- گامهای اولیه

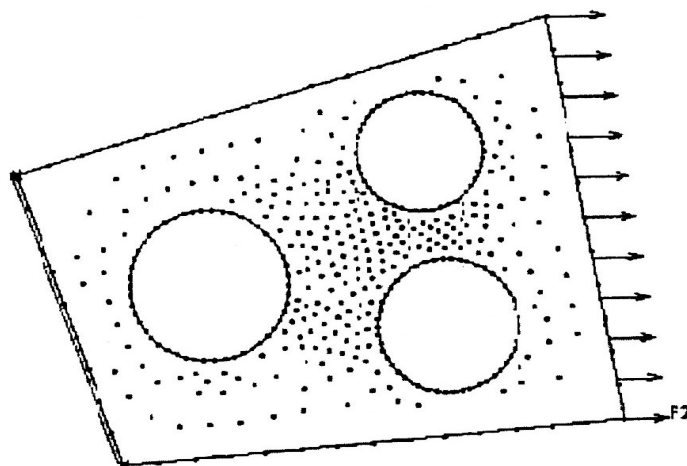
### ۲-۵-۱-۱- گام اول : مدلسازی هندسه کلی مساله

بدنه کلی مساله در ابتدا مدلسازی و بوسیله یک سری گره های پراکنده در محدوده مساله و مرزهای آن بیان می شود و سپس شرایط بارگذاری و شرایط مرزی در مدل بدون جزء مشخص می شود. یک مدل بدون جزء دو بعدی در شکل ۲-۶ نشان داده شده است. تمرکز یا چگالی گره ها بستگی به دقت مورد نیاز تحلیل گر و منابع موجود دارد. توزیع گره ها معمولاً یکنواخت نیست و در جاهایی که گرادیان تغییر شکل بالاتر است چگالی گره ها بیشتر در نظر گرفته می شود. بعلاوه، روشهای بدون جزء نباید زیاد وابسته به الگوی توزیع گره ها باشند و باید بطور معقولی برای توزیعات گرهی دلخواه معتبر باشند.

چون در روشهای بی نیاز از شبکه اجزاء، گره ها در برگیرنده مقدار متغیرهای محلی در فرمول بندی بدون جزء هستند، اغلب گره های محلی یا مکانی<sup>۱۰۵</sup> نامیده می شوند.

---

<sup>1</sup>field nodes



شکل ۲-۶- نمونه ای از یک مدل بدون جزء دو بعدی

## ۲-۵-۱-۲ گام دوم : درونیابی تغییر شکلها

باتوجه به اینکه در روشهای بدون جزء از شبکه اجزاء استفاده نمی شود، متغیر مکانی  $u$  در هر نقطه به مختصات  $x=(x,y,z)$  در داخل محدوده مساله با استفاده از تغییرشکلهای گره های موجود در دامنه حمایتی<sup>۱۰۶</sup>  $x$  درونیابی می شود :

(۱-۲)

$$u(x) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) u_i = \Phi(x) U_s$$

که  $n$  تعداد گره های موجود در محدوده کوچک اطراف نقطه  $x$  (محدوده حمایتی)،  $u_i$  متغیر مکانی گرهی در گره  $i$  در محدوده حمایتی اطراف  $x$ ،  $U_s$  برداری است که تمام متغیرهای مکانی در این گره ها را جمع آوری می کند، و  $\varphi_i(x)$  تابع شکل گره  $i$  است که بوسیله گره های که در دامنه حمایتی  $x$  قرار دارند تعیین می شود. دامنه حمایتی یک نقطه مانند  $x$  تعداد گره هایی که باید

<sup>1</sup>support domain



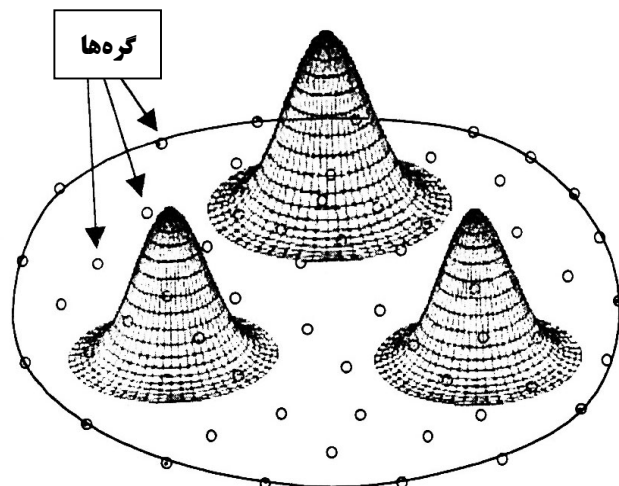
برای تامین یا تقریب مقدار تابع در  $X$  استفاده شوند را تعیین می کند. دامنه حمایتی می تواند (نه الزاماً) بوسیله یک تابع وزنی<sup>۱۰۷</sup> وزن دهی شود که در شکل ۲-۷ نشان داده شده است. دامنه حمایتی می تواند دارای شکلهای مختلف باشد و ابعاد و شکل آن از محلی به محل دیگر تغییر کند که این موضوع در شکل ۲-۸ نشان داده شده است. شکلهایی که بکار گرفته می شوند اغلب دایروی یا مستطیلی هستند.

مفهوم دامنه حمایتی در صورتیکه چگالی گرهی در مساله تغییر چندانی نداشته باشد بخوبی جواب می دهد. اما در حل مسائل عملی مانند مسائل دارای تمرکز تنش<sup>۱۰۸</sup>، چگالی گرهی ممکن است تغییر زیادی داشته باشد. تعریف دامنه حمایتی بر پایه محل نقطه مورد نظر می تواند منجر به انتخاب ناموزون گره ها در ساخت توابع شکل شود و در شرایط حدی، تمام گره های بکاررفته ممکن است در یک طرف قرار گیرند و توابع شکل تولید شده ممکن است دچار خطای جدی ناشی از برون یابی، گردند. برای جلوگیری از این مساله، مفهوم دامنه تاثیر<sup>۱۰۹</sup> بکار می رود.

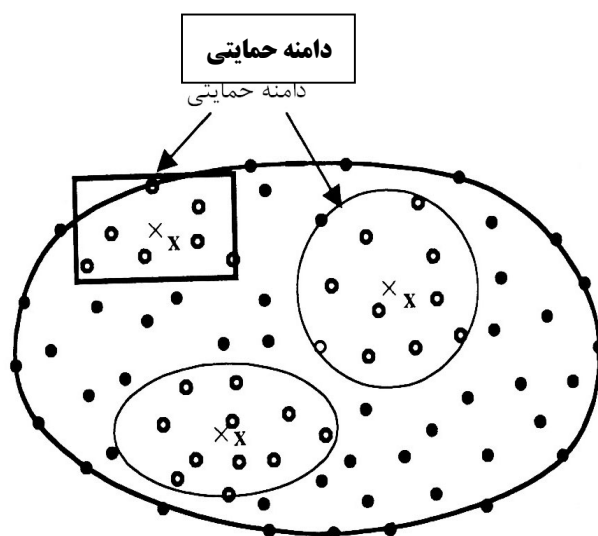
نکته قابل ذکر این است که درونیابی ذکر شده در رابطه (۲-۱) برای تمام مولفه های متغیرهای مکانی در یک دامنه حمایتی انجام می شود. به عنوان مثال، با در نظر گرفتن یک مساله مکانیک جامدات، تغییر شکل معمولاً به عنوان متغیر مکانی انتخاب می شود و تغییر شکل دارای سه مولفه در راستاهای  $Z, Y, X$  می باشد. برای هر سه این مولفه های تغییر شکل تابع شکل واحدی مختص به دامنه حمایتی یک نقطه بکار برده می شود.

---

<sup>2</sup>weight function  
<sup>3</sup>stress singularity  
<sup>4</sup>influence domain



شکل ۲-۷- توابع وزنی گرهی در یک مدل دو بعدی بدون جزء



شکل ۲-۸- دامنه های حمایتی گره های مختلف می توانند دارای ابعاد و اشکال متفاوت باشند. دامنه های حمایتی بر روی نقاط موجود در دامنه مساله ( با علامت X ) تعریف می شوند و مشخص کننده های گره های لازم ( با علامت O ) در تشکیل تابع شکل می باشند.

## ۲-۵-۱-۳- گام سوم : تشکیل دستگاه معادلات

دستگاه معادلات گسسته کل را در روشهای بدون جزء می توان با استفاده از توابع شکل و بکارگیری شکل ضعیف یا قوی روابط ساختاری تشکیل داد. این معادلات معمولاً به صورت ماتریسهای گرهی نوشته می شوند و در کل مساله برای تشکیل دستگاه معادلات کل رویهم گذاری<sup>۱۱۰</sup> می شوند.

دستگاه معادلات کل در مسائل استاتیکی، یک سری معادلات جبری، در مسائل ارتعاش آزاد<sup>۱۱۱</sup>، معادلات مقدار مشخصه ای<sup>۱۱۲</sup> و در مسائل دینامیکی، معادلات با مشتقات نسبی وابسته به زمان هستند. روند تشکیل دستگاه معادلات در روشهای بدون جزء مختلف متفاوت است.

## ۲-۵-۱-۴- گام چهارم : حل دستگاه معادلات کل بدون جزء

برای حل دستگاه معادلات در مسائل مختلف روشهای مختلفی وجود دارند :

۱. در مسائل استاتیکی، تغییرشکلها (یا پارامترهای آنها) در تمام گره های مساله در ابتدا

تعیین می شوند و سپس می توان تنش یا کرنش در هر جزء را بدست آورد. یک روش

استاندارد حل معادلات جبری خطی، مانند روش حذفی گوس، روش جداسازی<sup>۱۱۳</sup> LU،

و روشهای تکراری می توانند استفاده شوند.

---

<sup>1</sup>assemble

<sup>2</sup>free vibration

<sup>3</sup>eigenvalue equations

<sup>4</sup>LU decomposition

۲. در مسائل ارتعاش آزاد و کمانش، مقادیر مشخصه و بردارهای مشخصه متناظر را می توان

با استفاده از روشهای استاندارد حل معادلات مقدار مشخصه بدست آورد. روشهایی که

عموماً مورد استفاده هستند عبارتند از:

- روش ژاکوبی<sup>۱۱۴</sup>
- روش گیون<sup>۱۱۵</sup> و روش هاوس هولدر<sup>۱۱۶</sup>
- روش دو قسمتی<sup>۱۱۷</sup> (با استفاده از توالی های Sturm)
- روش تکرار معکوس<sup>۱۱۸</sup>
- روش QR
- روش تکرار زیرفضا<sup>۱۱۹</sup>
- روش لانکوزوس<sup>۱۲۰</sup>

۳. در مسائل دینامیکی، تاریخچه زمانی تغییر مکانها، سرعت و شتاب می باید محاسبه

شوند. می توان در این مسائل از روشهای استاندارد زیر برای حل دستگاه معادلات

استفاده نمود.

▪ روش اجتماع اثر قوای مودال<sup>۱۲۱</sup> می تواند گزینه خوبی برای مسائل ارتعاشی و

مسائلی که دارای گستره پاسخ محیطی بزرگی هستند و همچنین مسائل ضربه ای کم

سرعت در شرایط بارگذاری مختلف باشد.

---

<sup>5</sup>Jacobi's method

<sup>6</sup>Given's method

<sup>7</sup>Householder's method

<sup>1</sup>bisection method

<sup>2</sup>inverse iteration

<sup>3</sup>subspace iteration

<sup>4</sup>Lanczos' method

<sup>5</sup>modal superposition

▪ در مسائلی که دارای منفرد یا بارهای بسیار کمی هستند، روش انتگرالگیری مستقیم<sup>۱۲۲</sup> می تواند استفاده شود که در آن از FDM برای تعیین گامهای زمانی به همراه روشهای صریح و غیر صریح استفاده می شود.

▪ روش غیرصریح کارایی بیشتری برای پدیده های نسبتاً کند ارتعاشی دارد.

▪ روش صریح کارایی بیشتری برای پدیده های بسیار سریع مانند ضربه و انفجار دارد.

در مسائل دینامیک سیالات محاسباتی، دستگاه معادلات گسسته کل اساساً غیرخطی هستند و برای بدست آوردن نتایج نیاز به یک حلقه تکراری دیگر می باشد.

#### ۲-۵-۲- تعیین بعد دامنه حمایتی<sup>۱۲۳</sup>

دقت درونیابی<sup>۱۲۴</sup> بستگی به گره های موجود در دامنه حمایتی نقطه مورد نظر دارد (که معمولاً این نقطه، یک نقطه گوسی<sup>۱۲۵</sup>  $x_Q$  یا مرکز سلولهای انتگرالگیری می باشد). به همین دلیل، می باید یک دامنه حمایتی مناسب انتخاب شود تا پوشش مناسبی برای درونیابی فراهم گردد. برای تعریف دامنه حمایتی نقطه ای مانند  $x_Q$ ، بعد دامنه حمایتی  $d_s$  از رابطه زیر تعیین می شود:

(۲-۲)

$$d_s = \alpha_s d_c$$

---

<sup>6</sup>direct integration  
<sup>1</sup>support domain  
<sup>2</sup>interpolation  
<sup>3</sup>quadrature point

که  $\alpha_s$  اندازه بدون بعد دامنه حمایتی و  $d_c$  طول مشخصه می باشند که  $d_c$  نشانگر فاصله بین گره های اطراف نقطه  $x_Q$  می باشد. در صورتیکه گره ها بطور یکنواخت توزیع شده باشند،  $d_c$  فاصله بین دو گره مجاور می باشد. در صورتیکه گره ها به صورت غیریکنواخت توزیع شده باشند،  $d_c$  را می توان به صورت میانگین فاصله گرهی در دامنه حمایتی  $x_Q$  تعریف کرد.

معنی فیزیکی اندازه بدون بعد دامنه حمایتی  $\alpha_s$  بسیار واضح است و به طور ساده ضریبی از میانگین فاصله گرهی می باشد. به عنوان مثال،  $\alpha_s = 2.1$  یعنی دامنه حمایتی که شعاع آن  $2/1$  برابر میانگین فاصله گرهی می باشد. تعداد واقعی گره ها،  $n$  را می توان با شمردن تمامی گره های موجود در دامنه حمایتی انجام داد. اندازه بدون بعد دامنه حمایتی،  $\alpha_s$ ، می باید قبلاً توسط تحلیل گر تعیین شود که این کار معمولاً با انجام آزمایشات عددی بر روی مسائل مشابه که برای آنها راه حل وجود دارد انجام می گیرد. بطور کلی، مقدار  $\alpha_s$  بین ۲ تا ۳ منجر به نتایج خوبی می شود.

قابل ذکر است که در صورتیکه سلولهای پیش زمینه برای انتگرالگیری موجود باشند، دامنه های حمایتی را می توان براساس آنها نیز تعیین کرد.

## ۲-۵-۳- تعیین میانگین فاصله گرهی

درمسائل یک بعدی، یک روش ساده تعریف فاصله میانگین گرهی به صورت زیر است :

$$d_c = \frac{D_s}{(n_{D_s} - 1)} \quad (3-2)$$

که  $D_s$  تخمینی از  $d_s$  می باشد (این تخمین لازم نیست خیلی دقیق باشد اما باید معلوم باشد و تخمین خوبی از  $d_s$  باشد) و  $n_{D_s}$  تعداد گره هایی است که توسط یک دامنه معلوم با بعد  $D_s$

پوشش داده می شوند. با استفاده از رابطه (۲-۳) بسیار ساده می توان بعد دامنه حمایتی  $d_s$  برای

نقطه  $x_Q$  در یک دامنه با توزیع گرهی غیریکنواخت را تعیین کرد. روش کار به صورت زیر است :

۱. تخمین  $d_s$  برای نقطه  $x_Q$ ، که  $D_s$  را می دهد.

۲. شمارش گره هایی که توسط  $D_s$  پوشش داده می شوند.

۳. استفاده از رابطه (۲-۳) برای محاسبه  $d_c$ .

۴. در نهایت، محاسبه  $d_s$  با استفاده از رابطه (۲-۲) برای یک اندازه بدون بعد دلخواه دامنه

حمایتی  $\alpha_s$ .

در مسائل دوبعدی، یک روش ساده تعریف میانگین فاصله گرهی استفاده از رابطه زیر می باشد :

$$d_c = \frac{\sqrt{A_s}}{\sqrt{n_{A_s} - 1}} \quad (۴-۲)$$

که  $A_s$  تخمینی از مساحتی است که بوسیله دامنه حمایتی بدون بعد  $d_s$  پوشش داده می شود و

$n_{A_s}$  تعداد گره هایی است که بوسیله این ناحیه تخمین زده شده ( با مساحت  $A_s$  ) پوشش داده

می شوند. با استفاده از رابطه (۲-۴) و انجام همان روش توضیح داده شده در مورد مسائل یک

بعدی می توان به آسانی بعد دامنه حمایتی  $d_s$  برای نقطه  $x_Q$  در فضای دو بعدی با توزیع گرهی

غیر یکنواخت را تعیین کرد.

به طور مشابه، در مسائل سه بعدی یک روش ساده تعیین میانگین فاصله گرهی استفاده از رابطه

زیر است :

$$d_s = \frac{\sqrt[3]{V_s}}{\sqrt[3]{n_{V_s} - 1}} \quad (۵-۲)$$

که  $V_s$  حجم تخمین زده شده ای می باشد که بوسیله دامنه حمایتی بدون بعد  $d_s$  پوشش داده می شود و  $n_{V_s}$  تعداد گره هایی است که بوسیله این حجم تخمین زده شده (با حجم  $V_s$ ) پوشش داده می شوند. با استفاده از رابطه (۵-۲) و روش توضیح داده شده در مسائل یک بعدی می توان بعد دامنه حمایتی  $d_s$  را در نقطه  $x_Q$  در یک فضای سه بعدی با توزیع گرهی غیریکنواخت تعیین کرد.

## ۲-۵-۴- مفهوم دامنه تاثیر

آنچه در این جا به عنوان دامنه حمایتی<sup>۱۲۶</sup> و دامنه تاثیر<sup>۱۲۷</sup> مطرح می شود اغلب در جوامع مرتبط با روشهای بدون جزء دارای مفاهیم مشابهی است اما در این جا دارای مفاهیم متفاوتی است. دامنه تاثیر محدوده ای است که یک گره بر آن محدوده تاثیر می گذارد و حتماً یک گره است که این تاثیر را ایجاد می کند، در حالیکه دامنه حمایتی در ارتباط با یک نقطه دلخواه مطرح می شود که حتماً لازم نیست گره باشد. در اینجا مفهوم دامنه تاثیر همراه با جزئیات توضیح داده می شود:

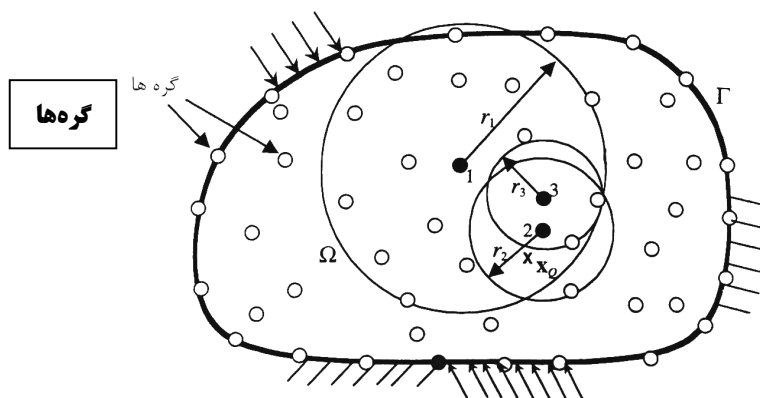
استفاده از دامنه تاثیر راهی برای انتخاب گره ها برای درونیابی می باشد و در مسائل با توزیع گرهی بسیار نامنظم به خوبی عمل می کند. دامنه تاثیر برای هر یک از گره های دامنه مساله تعریف می شود و می تواند برای هر گره متفاوت باشد. در شکل ۹-۲، گره ۱ دارای شعاع تاثیر  $I_1$  و گره ۲ دارای شعاع تاثیر  $I_2$  می باشد و غیره. هر نقطه ای که در محدوده دامنه تاثیر گره قرار داشته باشد آن گره در محاسبه تابع شکل در آن نقطه وارد می شود. به عنوان مثال، در ساخت توابع شکل در نقطه ای که با علامت  $x$  در شکل ۹-۲ مشخص شده گره های ۱ و ۲ بکار می آیند اما گره ۳ بکار نمی آید. اینکه دامنه تاثیر گره های مختلف می تواند با هم متفاوت باشد امکان می دهد که

<sup>1</sup>support domain

<sup>2</sup>influence domain



بعضی از گره ها دامنه تاثیر بیشتری نسبت به گره های دیگر داشته باشند که این موضوع راهی برای غلبه بر توزیع ناموزون گرهی در ساخت توابع شکل می باشد. همانطور که در شکل ۹-۲ نشان داده شده است، گره ۱ در ساخت توابع شکل در نقطه نشان داده شده با  $x$  بکار می آید اما گره ۳ با آنکه نسبت به گره ۱ به نقطه علامت زده شده نزدیکتر است اما در ساخت توابع شکل در نقطه فوق بکار نمی آید. ابعاد دامنه تاثیر را می توان به روشی مشابه روش گفته شده در قسمت قبل ( در مورد دامنه حمایتی ) تعیین کرد. در صورتیکه از اجزاء پیش زمینه برای انتگرالگیری استفاده شود می توان دامنه تاثیر را بر مبنای این اجزاء نیز تعریف کرد.



شکل ۹-۲- مفهوم دامنه تاثیر در یک مثال دو بعدی

## ۲-۵-۵- خصوصیات توابع شکل بدون جزء

شرطی که یک تابع شکل حتماً می باید ارضا کند شرط جزء واحد<sup>۱۲۸</sup> است که به صورت زیر بیان می شود :

<sup>1</sup>partition of unity

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) = 1 \quad (6-2)$$

این یک شرط لازم برای تابع شکل است که بتواند هر حرکت صلب در دامنه مساله را ایجاد کند.

شرایط دیگری نیز وجود دارند که بهتر است توابع شکل آنها را ارضا کنند. یکی از این شرطها

شرط درونیابی مختصات نقاط بطور خطی<sup>۱۲۹</sup> است که به صورت زیر بیان می شود:

$$(7-2)$$

$$\sum_{i=1}^n \varphi_i(x) x_i = x$$

این شرط برای اینکه تابع شکل از آزمون صحت محاسبات استاندارد بگذرد لازم است. این شرط

اجباری نیست زیرا توابع شکلی که از این آزمون صحت محاسبات نمی گذرند نیز در صورتیکه

جواب آنها همگرا باشد می توانند به عنوان تابع شکل استفاده شوند. بسیاری از اجزاء در FEM

نمی توانند از این آزمون صحت محاسبات عبور کنند اما بطور گسترده ای از آنها در بسته های نرم

افزای FEM استفاده می شود.

شرط ترجیحی دیگر، برآورده کردن خاصیت تابع دلتای کرونیگر<sup>۱۳۰</sup> است:

$$\varphi_i(x = x_j) = \begin{cases} 1 & i = j, j = 1, 2, \dots, n \\ 0 & i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n \end{cases} \quad (8-2)$$

این شرط یک شرط ترجیحی است زیرا تابع شکلی که این خصوصیات را داشته باشد این امکان

را می دهد که بتوان به روش ساده ای شرایط مرزی لازم را اعمال کرد.

---

<sup>1</sup>linear field reproduction  
<sup>2</sup>Kronecker delta function

در روشهای بدون جزء، توابع شکل تولید شده، بسته به روش بکاررفته برای تولید توابع شکل، ممکن است شرط (۲-۸) را برآورده کنند یا نکنند. نحوه تولید توابع شکل نکته اصلی در روشهای بدون جزء هستند.

## ۲-۶- جمع بندی

شبهاتها و تفاوت‌های بین روش اجزاء محدود و روشهای بدون جزء اجمالاً در جدول زیر آورده شده‌اند:

جدول ۲-۲- مقایسه بین روش اجزاء محدود و روشهای بدون جزء

مورد	روش اجزاء محدود	روشهای بدون جزء
۱	بله	خیر
۲	مشکل، بدلیل نیاز به اتصال اجزاء	نسبتاً ساده و هیچ اتصالی مورد نیاز نمی باشد.
۳	در حالات سه بعدی مشکل است.	همواره امکان پذیر است.
۴	مبتنی بر جزء	مبتنی بر گره
۵	مشخصه تابع شکل	بسته به نوع روش، ممکن است خاصیت دلتای کرونگر را برآورده می سازد و برای تمام اجزاء همنوع معتبر است.
۶	ماتریس سختی گسسته کل	نواری، ممکن است بسته به روش بکاررفته متقارن باشد یا نباشد.

۷	اعمال شرایط مرزی لازم	ساده و استاندارد.	بسته به روش بکاررفته، باید از روشهای خاصی استفاده کرد.
۸	سرعت محاسبات	سریع	بسته به روش بکاررفته، از ۱/۱ تا ۵۰ برابر کندتر از FEM است.
۹	حصول به نتایج	تکنیک خاصی مورد نیاز است.	دارای یک روند استاندارد است.
۱۰	دقت	دقیقتر از FDM است.	می تواند دقیقتر از FEM باشد
۱۱	مرحله تکامل	بسیار تکامل یافته	نوپا، با مشکلات بسیاری مواجه است
۱۲	بسته های نرم افزاری تجاری موجود	بسیار	بسیار کم و تقریباً هیچ

## فصل سه

### روش بدون جزء گالرکین

#### ۳-۱- مقدمه و تاریخچه

نیرولز<sup>۱۳۱</sup> و همکاران در سال ۱۹۹۲ روش بسیار جالب و امیدوار کننده ای را ارائه دادند که آن را روش اجزاء پراکنده<sup>۱۳۲</sup> نامیدند. در این روش تنها با استفاده از شبکه ای از گره ها و تعریف یک مرز برای مدل می توان روابط گالرکین را استخراج نمود. توابعی که به منظور درونیابی در این روش استفاده می شوند توابع چند جمله ای هستند که به روش حدافل مربعات<sup>۱۳۳</sup> مقادیر گروهی را تخمین می زنند. در این روش به شبکه اجزاء محدود نیازی نیست.

---

<sup>1</sup>Nayroles

<sup>2</sup>Diffuse Element Method

<sup>3</sup>Least squares

هر چند توسط و همکاران او عنوان نشد اما درونیاب هایی که آنها در روش خود به کار بردند قبلاً توسط لانکستر و سالکوکاس<sup>۱۳۴</sup>، مکلین<sup>۱۳۵</sup>، گردون<sup>۱۳۶</sup>، ویکسوم<sup>۱۳۷</sup>، بارنهییل<sup>۱۳۸</sup> ابداع و به نام درونیاب های حداقل مربعات متحرک<sup>۱۳۹</sup> در برازش منحنی و سطح مورد مطالعه قرار گرفته بود. درونیاب های حداقل مربعات متحرک که از این پس به اختصار MLS نامیده می شوند در گره ها دارای مقدار برابر واحد نیستند، یا به عبارت دیگر از داخل گره ها نمی گذرند مگر آنکه توابع وزنی<sup>۱۴۰</sup> آنها منفرد<sup>۱۴۱</sup> باشند. این به عنوان یک عیب در روشهای گالرکین به شمار می رود چرا که اعمال شرایط مرزی لازم و همچنین اعمال بارهای نقطه ای را پیچیده می کند. باین وجود، باتوجه به صرفه جویی های بالقوه ای که در این روش به دلیل بی نیازی به اجزاء و شبکه بندی وجود دارد این معایب اهمیت چندانی پیدا نمی کنند. روش گالرکین با درونیابی MLS در سال ۱۹۹۴ توسط بلیشکو و همکارانش<sup>۱۴۲</sup> با انجام اصلاحاتی، "روش بدون جزء گالرکین"<sup>۱۴۳</sup> نام گرفت که به اختصار روش EFG نامیده می شود. تنها شرط لازم برای درونیابی به روش MLS این است که یک سری گره در محدوده مورد مطالعه وجود داشته باشد. بنابراین با وجود کاملاً بی نیاز بودن این روش به اجزاء، می توان آن را با کلیت روش اجزاء محدود در هم آمیخت. نکته جالبتر این روش، پتانسیل انجام کارهای ابداعی در آن است، به طور مثال در یک نرم افزار محاوره ای کاربر می تواند به سادگی در هر جایی که نیازمند دقت بیشتری باشد با گذاشتن تعداد زیادی گره در آن محدوده به نتیجه دلخواه دست یابد، بدون اینکه نیاز به ایجاد یک شبکه اجزاء محدود جدید باشد. این قابلیت بسیار امیدوار کننده است چرا که دقت روش حتی در صورتیکه جانمایی گره ها بسیار نامنظم باشد نیز به نظر نمی رسد که کاهش چشمگیری پیدا کند.

---

<sup>1</sup>Lancaster & Salkauskas

<sup>2</sup>Mclain

<sup>3</sup>Gordon

<sup>4</sup>Wixom

<sup>5</sup>Barnhill

<sup>6</sup>Moving Least Squares

<sup>7</sup>Weight Function

<sup>8</sup>Singular

<sup>9</sup>T. Belytschko et al.

<sup>10</sup>Element-Free Galerkin Method

### ۳-۲- درونیاب حداقل مربعات متحرک (MLS)<sup>۱۴۴</sup>

فرض کنیم تابع  $u(\mathbf{x})$  در محدوده  $\Omega$  تعریف شده باشد. در روش MLS تقریب تابع فوق در نقطه  $\mathbf{x}$

با  $u^h(\mathbf{x})$  بیان شده و بصورت زیر تعریف می شود :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_j^m p_j(\mathbf{x}) a_j(\mathbf{x}) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad (۳-۱)$$

که  $p_1(\mathbf{x})=1$  و  $p_j(\mathbf{x})$  ها تک جمله ای هایی در مختصات فضایی  $\mathbf{x}^T=[x,y,z]$  هستند بطوریکه یک بردار پایه کامل را تشکیل دهند.

تابع پایه خطی در حالت یک بعدی به صورت زیر بیان می شود :

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [1, x], m = 2 \quad (۳-۲ \text{ الف})$$

و تابع پایه درجه دو در حالت دو بعدی به صورت زیر بیان می شود :

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [1, x, x^2], m = 3 \quad (۳-۲ \text{ ب})$$

تابع پایه خطی در فضای دو بعدی به صورت زیر بیان می شود .

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y], m = 3 \quad (۳-۲ \text{ ج})$$

تابع پایه درجه دو در فضای دو بعدی به صورت زیر بیان می شود :

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y, x^2, xy, y^2], m = 6 \quad (۳-۲ \text{ د})$$

تابع پایه خطی در فضای سه بعدی به صورت زیر بیان می شود :

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y, z], m = 4 \quad (۳-۲ \text{ ه})$$

تابع پایه درجه ۲ در فضای سه بعدی به صورت زیر بیان می شود :

$$\mathbf{P}^T(\mathbf{x}) = [1, x, y, z, xy, yz, zx, x^2, y^2, z^2], m = 10 \quad (۳-۲ \text{ و})$$

در حالت کلی، تک جمله ایهای لازم در  $\mathbf{P}^T(\mathbf{x})$  را می توان با توجه به درجه پایه، در حالت دو بعدی از از مثلث

پاسکال (شکل ۳-۱) و در حالت سه بعدی از هرم پاسکال (شکل ۳-۲) بدست آورد.

بردار ضرایب  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  در رابطه (۳-۱) با استفاده از مقدار تابع در مجموعه ای از گره های دامنه  $\Omega$  که در دامنه حمایتی نقطه  $\mathbf{x}$  قرار دارند تعیین می شود. دامنه حمایتی نقطه  $\mathbf{x}$  عبارت است از گره هایی از دامنه  $\Omega$  که برای تقریب زدن تابع  $u(\mathbf{x})$  در نقطه  $\mathbf{x}$  از آنها استفاده می شود. این تقریب، همانطور که در شکل ۳-۳ نشان داده شده است، با  $u^h(\mathbf{x})$  نمایش داده می شود.

بردار ضرایب  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  باید بگونه ای تعیین شود که مربع تفاضلات مقادیر گرهی و مقادیر تقریب زده شده گرهی به صورت وزن دار، که با  $J$  نشان داده می شود، برابر مینیمم شود.

$$J = \sum_I^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) [u^h(\mathbf{x}) - u_I]^2 \quad (3-3)$$

با توجه به رابطه (۳-۱) مقدار تابع  $u^h(\mathbf{x})$  در گره ها برابرست :

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_I \Rightarrow u^h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_I) = \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad I = 1, 2, \dots, n \quad (3-4)$$

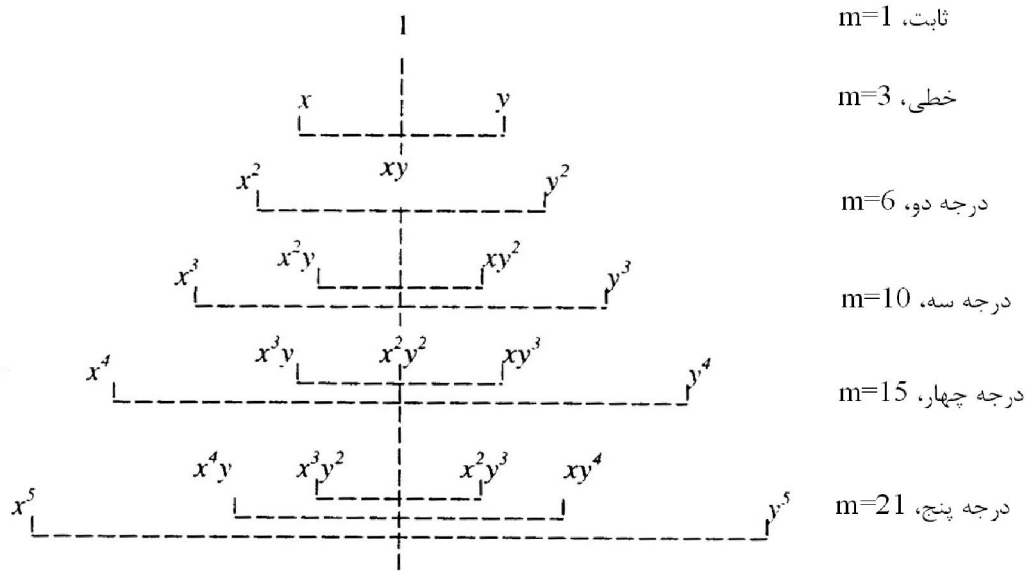
که بدین ترتیب رابطه (۳-۳) به صورت زیر نوشته می شود:

$$J = \sum_I^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) [\mathbf{P}^T(\mathbf{x}_I) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_I]^2 \quad (3-5)$$

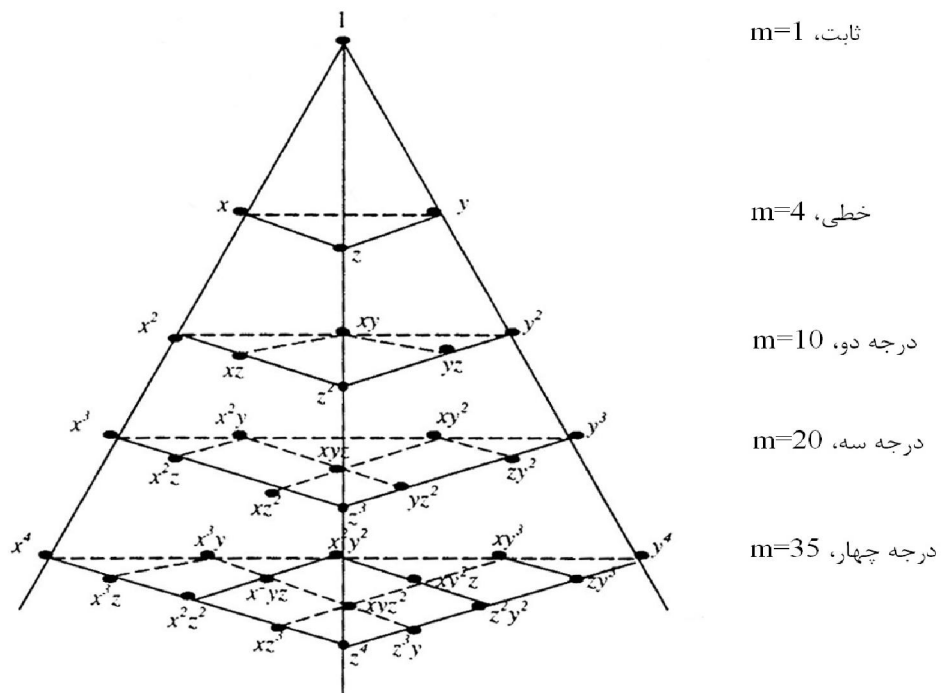
که  $n$  تعداد گره های موجود در دامنه حمایتی  $\mathbf{x}$  می باشد و در آنها  $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \neq 0$  است.  $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$  تابع وزنی می باشد که توضیح آن در بخش ۱-۲-۳ آمده است.  $u_I$  مقدار گرهی  $u$  در  $\mathbf{x} = \mathbf{x}_I$  می باشد.

مینیمم کردن  $J$  در رابطه (۳-۵) و مشتق گیری نسبت به  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  منجر به رابطه خطی زیر بین  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  و  $u_I$  می شود :

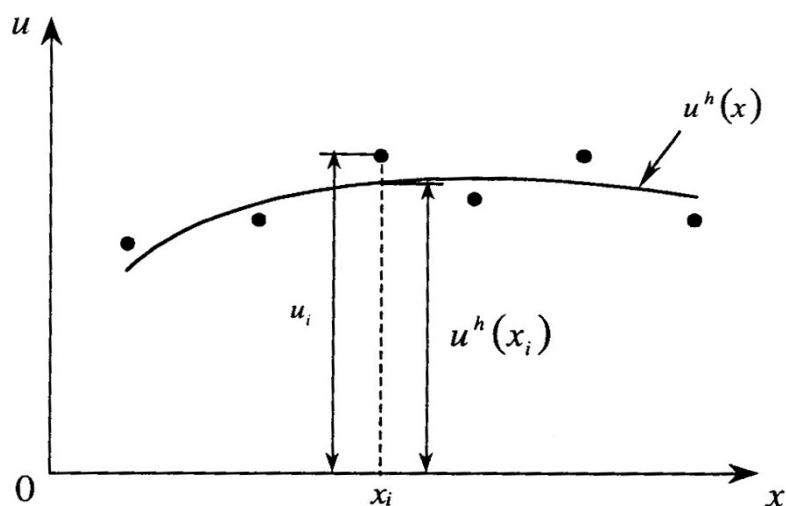




شکل ۳-۱- مثلث پاسکال



شکل ۳-۲- هرم پاسکال



شکل ۳-۳- تابع تقریب  $u^h(x)$  و مقادیر گرهی  $u_i$  در تقریب MLS

$$\frac{\partial J}{\partial \mathbf{a}} = 0 \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s \quad (3-6)$$

یا

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s \quad (3-7)$$

که

$\mathbf{U}_s$  برداری است که مؤلفه های گرهی گره های موجود در دامنه حمایتی را در بر دارد:

$$\mathbf{U}_s = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T \quad (3-8)$$

$\mathbf{A}(\mathbf{x})$  ماتریس گشتاور وزن دار<sup>۱۴۵</sup> است که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{A} = \sum_{I=1}^n w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \mathbf{P}(\mathbf{x}_I) \mathbf{P}^T(\mathbf{x}_I) \quad (3-9)$$

و  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$  ماتریسی است که بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{B}_I = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) \mathbf{P}(\mathbf{x}_I) \quad (3-10)$$

<sup>۱۴۵</sup> weighted moment matrix

با جایگزینی رابطه (۳-۷) در رابطه (۳-۵) بدست می آید:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x})(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}))_{jI} u_I \quad (3-11)$$

یا

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \varphi_I(\mathbf{x}) u_I \quad (3-12)$$

که تابع شکل  $\varphi_I(\mathbf{x})$  به صورت زیر تعریف می شود :

$$\varphi_I(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x})(\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{B}(\mathbf{x}))_{jI} = \mathbf{P}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_I \quad (3-13)$$

که در روابط بالا  $m$  تعداد جملات پایه  $\mathbf{p}(\mathbf{x})$  می باشد که معمولاً بسیار کوچکتر از  $n$  (تعداد گره های موجود در دامنه حمایتی) است و به همین دلیل ماتریس  $\mathbf{A}$  معکوس پذیر است و در نتیجه  $\mathbf{A}^{-1}$  وجود خواهد داشت.

رابطه (۳-۱۲) را می توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) \mathbf{U}_s \quad (3-14)$$

که

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{x}) = [\varphi_1(\mathbf{x}), \varphi_2(\mathbf{x}), \dots, \varphi_n(\mathbf{x})] \quad (3-15)$$

با توجه به اینکه در محاسبات مربوط به تنش و کرنش نیاز به مشتق نسبی مرتبه اول تابع شکل می باشد، محاسبه آن به صورت زیر است:

$$\mathbf{\Phi}_{I,k}^T = (\mathbf{P}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_I)_{,k} = \mathbf{P}_{,k}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{P}^T \mathbf{A}_{,k}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{P}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{,k} \quad (3-16)$$

$$\mathbf{A}_{,k}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,k} \mathbf{A}^{-1} \quad \text{که}$$

اندیس  $k$  که بعد از کاما آمده است مشتق مکانی است.

باید گفت که تابع تقریب زده شده بوسیله رابطه (۳-۱۲) حتی در صورتیکه توابع پایه  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  چند جمله ای باشند به صورت چند جمله ای نیست. اما در صورتیکه  $\mathbf{u}(\mathbf{x})$  چند جمله ای از درجه  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  باشد مقدار تقریب زده شده با رابطه  $\mathbf{u}^h(\mathbf{x})$  در گره ها با مقدار دقیق برابر خواهد شد. علاوه بر آن، در صورتیکه تابع وزنی  $\mathbf{w}(\mathbf{x}-\mathbf{x}_I)$  به همراه  $t$  مشتق اولیه آن پیوسته باشند، تابع شکل  $\varphi_I(\mathbf{x})$  نیز با  $t$  مشتق اولیه آن پیوسته خواهد بود.

در روش اجزاء پراکنده ارائه شده توسط نیرولز ضریب  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  ثابت فرض شده و در نتیجه از عبارت

$$\mathbf{P}^T \mathbf{A}_{,k}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{P}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}$$

تغییرات مکانی  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  بطور قابل توجهی از دقت روش می کاهد که این عیب روش اجزاء پراکنده در روش بدون جزء گالرکین، با در نظر گرفتن عبارت فوق، برطرف شده است.

درونیاب های استاندارد حداقل مربعات با انتخاب تابع وزنی ثابت در کل دامنه مساله بدست می آیند که با این کار تمام مجهولات مساله به طور کامل دخیل می شوند. در حالیکه با انتخاب تابع وزنی که دارای دامنه تاثیر بزرگی باشد، دورنیابها به صورت یک چند جمله ای از درجه بالاتر از  $\mathbf{P}(\mathbf{x})$  عمل می کنند. در صورتیکه محدوده کوچکی برای دامنه تاثیر تابع وزنی در نظر گرفته شود ماتریس سختی مساله به صورت پراکنده<sup>۱۴۶</sup> در خواهد آمد. قابل ذکر است که تابع شکل روش اجزاء محدود استاندارد را می توان با تعریف تابع وزنی برای هر جزء بدست آورد.

دو ویژگی اصلی تقریب MLS که موجب کاربرد زیاد آن می شود عبارتند از :

- تابع تقریب زده شده در کل محدوده مساله پیوسته و دارای شیب پیوسته است.
- قابلیت تقریب با درجه سازگاری دلخواه را دارا می باشد (با انتخاب درجات مختلف توابع پایه).

### ۳-۲-۱- تابع وزنی<sup>۱۴۷</sup>

تابع وزنی  $w_I(\mathbf{x}) = w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I)$  نقش مهمی در عملکرد روش دارد. انتخاب این توابع باید بگونه ای صورت گیرد که دارای مقدار مثبت باشند و  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  بدست آمده از آنها یکتا باشد. این توابع برای  $\mathbf{x}$  های نزدیک به  $\mathbf{x}_I$  دارای مقدار نسبتاً بزرگی هستند در حالیکه برای  $\mathbf{x}$  های دور از  $\mathbf{x}_I$  دارای مقدار نسبتاً کوچکی می باشند. به بیان دیگر، بزرگی این توابع با افزایش فاصله  $\mathbf{x}$  از  $\mathbf{x}_I$  می باید کاهش یابد. به همین دلیل است که اکثر توابع وزنی که در روشهای بی نیاز از شبکه اجزاء استفاده می شوند زنگوله ای شکل هستند (شکل ۷-۲).

تابع وزنی مورد استفاده باید سه شرط زیر را برآورده سازد :

sparse<sup>۱۴۶</sup>  
weight function<sup>۱۴۷</sup>

۱- مثبت باشد<sup>۱۴۸</sup>:  $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) > 0$  در محدوده  $\Omega$

۲- متراکم (فشرده) باشد<sup>۱۴۹</sup>:  $w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) = 0$  در خارج از محدوده  $\Omega$

۳- اکیداً نزولی باشد<sup>۱۵۰</sup>

در شرط اول، مثبت بودن از نظر ریاضی ضروری نیست اما برای ارائه یک مفهوم فیزیکی با معنا یا پایدار

ضرورت پیدا می کند. به عنوان مثال، در مسائل دینامیک سیالات، یکی از متغیرهای محلی می تواند چگالی محیط

باشد که هیچگاه نمی تواند منفی باشد.

شرط دوم یا همان متراکم (فشرده) بودن از این جهت مهم است که می توان تقریب را بوسیله یک سری

از گره ها انجام داد، بدین ترتیب که  $u^h(\mathbf{x})$  تنها به مقادیر گره هایی که در آنها مقدار تابع وزنی مخالف صفر است

بستگی خواهد داشت.

شرط سوم نیز یک الزام ریاضی نیست اما بر این مبنای فیزیکی اعمال می شود که نیرویی که یک جزء بر

جزء دیگر وارد می کند با افزایش فاصله بین دو جزء افزایش می یابد.

در زیر فهرستی از توابع وزنی که معمولاً مورد استفاده قرار می گیرند آورده شده است :

تابع وزنی اسپیلاین درجه ۳: (w1)

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \equiv w(\bar{d}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - 4\bar{d}^2 + 4\bar{d}^3 & \bar{d} \leq \frac{1}{2} \\ \frac{4}{3} - 4\bar{d} + 4\bar{d}^2 - \frac{4}{3}\bar{d}^3 & \frac{1}{2} < \bar{d} \leq 1 \end{cases} \quad (3-17)$$

تابع وزنی اسپیلاین درجه ۴: (w2)

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \equiv w(\bar{d}) = \begin{cases} 1 - 6\bar{d}^2 + 8\bar{d}^3 - 3\bar{d}^4 & \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (3-18)$$

تابع وزنی نمایی: (w3)

$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) \equiv w(\bar{d}) = \begin{cases} e^{-(\bar{d}/\alpha)^2} & \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (3-19)$$

Positivity<sup>۱۴۸</sup>  
Compactness<sup>۱۴۹</sup>  
Decay<sup>۱۵۰</sup>

$\alpha$  یک مقدار ثابت است و اغلب برابر  $0/3$  اختیار می شود.

در روابط بالا

$$\bar{d} = \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_I|}{d_w} = \frac{d}{d_w} \quad (3-20)$$

که  $d_w$  همان دامنه تاثیر تابع وزنی است و محدوده ای که در آن تابع وزنی مخالف صفر است را مشخص می کند. در حالت کلی  $d_w$  می تواند از هر نقطه ای به نقطه دیگر متفاوت باشد.

در سال ۲۰۰۲، جی. آر. لیو و همکاران<sup>۱۵۱</sup> تابع وزنی درجه ۴ جدیدی ارائه دادند که در زیر می آید: (w4)

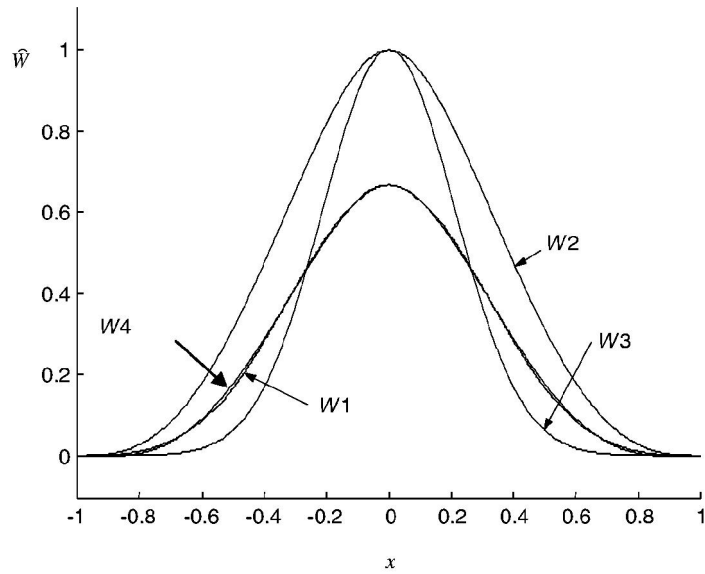
$$w(\mathbf{x} - \mathbf{x}_I) = w(\bar{d}) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{9}{32} \bar{d}^2 + \frac{19}{192} \bar{d}^3 - \frac{5}{512} \bar{d}^4 & \bar{d} \leq 1 \\ 0 & \bar{d} > 1 \end{cases} \quad (3-21)$$

در شکل ۴-۳ هر چهار تابع وزنی ارائه شده در بالا رسم شده اند.

می توان به روشنی مشاهده کرد که تابع وزنی درجه ۴ (w4) دارای شکلی بسیار مشابه تابع وزنی اسپیلاین درجه

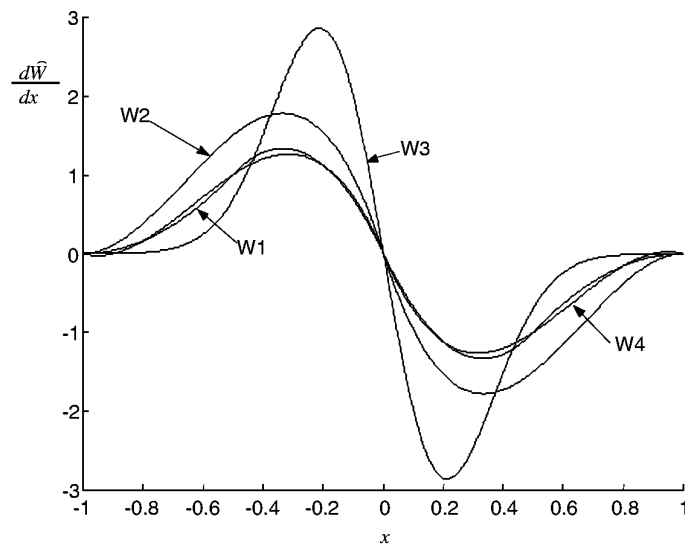
۳ (w1)، که در بسیاری از موارد آزمایش شده و مورد استفاده قرار گرفته است، می باشد. تابع وزنی درجه ۴

(w4) علاوه بر یک ضابطه ای بودن دارای سازگاری از درجه ۲ (C<sup>2</sup>) می باشد [۳].



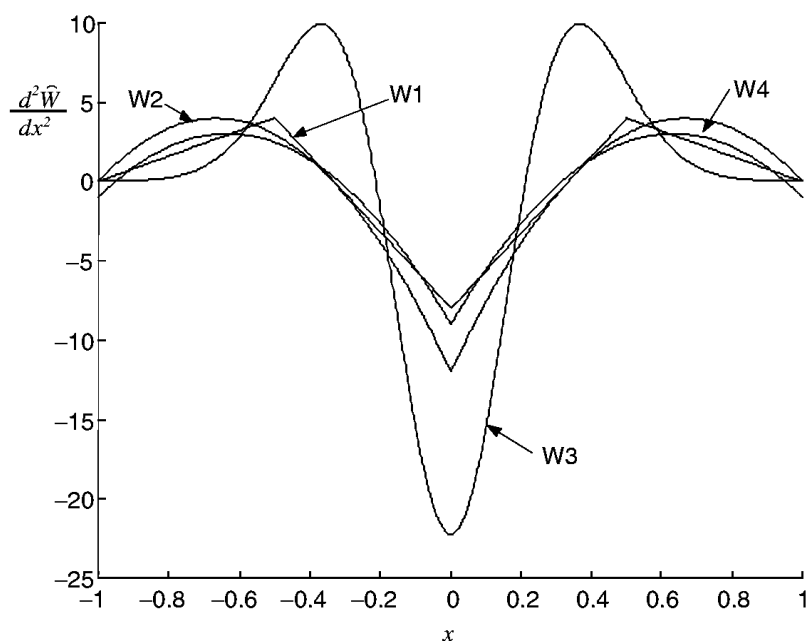
شکل ۳-۴- توابع وزنی،  $w_1$ : اسپیلاین درجه سه،  $w_2$  اسپیلاین درجه چهار،  $w_3$  نمایی با  $\alpha$  برابر  $0.3$ ،  $w_4$ : درجه چهار ارائه

شده توسط جی. آر. لیو و همکاران [۳]



شکل ۳-۵- مشتق اول توابع وزنی،  $w_1$ : اسپیلاین درجه سه،  $w_2$  اسپیلاین درجه چهار،  $w_3$  نمایی با  $\alpha$  برابر  $0.3$ ،  $w_4$ : درجه

چهار ارائه شده توسط جی. آر. لیو و همکاران [۳]



شکل ۳-۶- مشتق دوم توابع وزنی، w1: اسپیلاین درجه سه، w2 اسپیلاین درجه چهار، w3 نمایی با  $\alpha$  برابر ۰/۳، w4: درجه

چهار ارائه شده توسط جی. آر. لیو و همکاران [۳]

در شکل ۳-۵ مشتقات اول هر چهار تابع وزنی رسم شده اند. مشاهده می شود که هر چهار منحنی دارای شیب

پیوسته هستند. مشتق اول تابع w4 نیز مشابه مشتق اول تابع w1 عمل می کند.

در شکل ۳-۶ مشتق دوم هر چهار تابع وزنی رسم شده اند. شکل نشان می دهد که مشتق دوم تابع w1

دیگر دارای شیب پیوسته نیست. درحالیکه مشتق دوم تابع w4 دارای شیب پیوسته ای است اما در روی مرز مقدار

آن برابر صفر نیست. تابع وزنی (w4) برای کسانی مناسب است که کارایی تابع (w1) را به همراه یک فرمولبندی

ساده تر می خواهند.

### ۳-۲-۲- سازگاری<sup>۱۰۲</sup>

مشابه روش اجزا محدود یک روش بی نیاز از شبکه اجزاء نیز باید همگرا شود، بدین معنی که حل

عددی بدست آمده از روش بدون جزء باید با نزدیک کردن فاصله گره ها به صفر به مقدار دقیق نزدیک شود.



برای اینکه یک روش بدون جزء همگرا شود، توابع شکلی که بکار می روند باید یک درجه حداقلی از سازگاری را برآورده سازند. درجه سازگاری عبارتست از مرتبه ای از توابع چند جمله ای که می تواند بطور دقیق توسط تابع شکل تقریب زده شود. در صورتیکه تابع شکل بتواند یک تابع مقدار ثابت را بطور دقیق تقریب بزند می گویند که آن تابع شکل دارای سازگاری از درجه صفر یا  $C^0$  است. بطور کلی در صورتیکه تابع شکل بتواند یک چند جمله ای تا درجه  $k$  را بطور دقیق تقریب بزند گویند که تابع شکل دارای سازگاری از درجه  $k$  یا  $C^k$  است. این قرارداد نماد به همان صورتی است که در روش اجزاء محدود بکار می رود. در فرمولبندی روش اجزاء محدود از عبارت تمامیت<sup>۱۵۳</sup> استفاده می شود که بدان معنی است که تقریب با درجه سازگاری  $k$  می باید با تمام چند جمله ایهای مرتبه پایین تر، از  $0$  تا  $k-1$ ، نیز سازگار باشد. با استفاده از توابع شکل چند جمله ای از درجه  $k$  سازگاری درجه  $k$  بطور کامل تامین می شود.

در حل معادله با مشتقات نسبی برپایه فرمول بندی صورت ضعیف<sup>۱۵۴</sup>، مانند روش گالرکین، یک حداقل درجه سازگاری برای تضمین همگرایی مساله در دستگاه معادلات گسسته ضروری است. این مقدار حداقل درجه سازگاری به مرتبه معادلات بستگی دارد. در یک معادله با مشتقات نسبی مرتبه  $2k$ ، حداقل درجه سازگاری برای فرمول بندی گالرکین برابر  $C^k$  می باشد. این شرط معادل تقریب زدن دقیق تمامی چند جمله ایهای تا مرتبه  $k$  می باشد. دلیل این موضوع این است که تقریبی که قادر باشد تمام چند جمله ای های تا مرتبه  $k$  را بطور دقیق تقریب بزند می تواند هر تابع پیوسته و مشتقات آن تا مرتبه  $k$  را هنگامی که فاصله گره ها به سمت صفر میل کند بطور دقیق تقریب بزند.

سازگاری تقریب MLS بستگی به درجه تابع پایه مورد استفاده در آن دارد. در صورتیکه تابع پایه از

درجه  $k$  باشد تابع شکل MLS دارای سازگاری درجه  $k$  خواهد بود [۳۱].

بنابراین، برای اینکه تقریب MLS دارای درجه سازگاری خطی باشد کافی است که تابع پایه را چندجمله ای کامل از درجه یک اختیار کنیم. به کمک این ویژگی می توان با وارد کردن توابع منفرد<sup>۱۵۵</sup> در پایه، از روشهایی که بر پایه توابع شکل MLS استفاده می شوند (مانند EFG) برای مدل سازی تمرکز تنش در نوک ترک استفاده کرد

Completeness<sup>۱۵۳</sup>  
weak form<sup>۱۵۴</sup>  
singular<sup>۱۵۵</sup>

[۵]، [۱۱] و [۱۲]. نکته ای که باید از آن اطمینان حاصل کرد این است که ماتریس گشتاور وزندار که از رابطه

(۳-۹) محاسبه می شود پس از وارد کردن این جملات اضافی به تابع پایه همچنان معکوس پذیر باشد.

### ۳-۳- فرمول بندی روش بدون جزء گالرکین (EFG)

در اینجا برای نشان دادن نحوه فرمول بندی معادلات گسسته سیستم در روش EFG، یک مساله خطی مکانیک

جامدات در فضای دوبعدی در نظر گرفته می شود. معادله دیفرانسیل با مشتقات نسبی و شرایط مرزی برای مساله

دو بعدی مکانیک جامدات به صورت زیر بیان می شود :

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{رابطه تعادل در دامنه مساله } \Omega \quad (3-22)$$

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{شرایط مرزی تکیه گاهی در مرز } \Gamma_u \quad (3-23)$$

شرایط مرزی طبیعی (مرز اعمال بار) با رابطه زیر بیان می شوند :

$$\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{روی مرز طبیعی } \Gamma_t \quad (3-24)$$

که

$\mathbf{L}$  : عملگر دیفرانسیلی است که بصورت زیر تعریف می شود :

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{در مسائل دو بعدی :} \quad (3-25)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{در مسائل سه بعدی:} \quad (3-26)$$

$\boldsymbol{\sigma} =$  تانسور تنش که بصورت زیر تعریف می شود:

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}]^T \quad \text{در مسائل دو بعدی:} \quad (3-27)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^T = [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{zz} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{xz} \quad \tau_{xy}]^T \quad \text{در مسائل سه بعدی:} \quad (3-28)$$

$\mathbf{u} =$  بردار تغییر شکل که بصورت زیر بیان می شود:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \text{در مسائل دو بعدی:} \quad (3-29)$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \quad \text{در مسائل سه بعدی:} \quad (3-30)$$

$\mathbf{b} =$  بردار نیروی جرمی که بصورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \end{bmatrix} \quad \text{در مسائل دو بعدی:} \quad (3-31)$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} \quad \text{در مسائل سه بعدی:} \quad (3-32)$$

$\bar{\mathbf{t}} =$  بردار نیروی اعمال شده در مرزهای طبیعی (مرز اعمال بار)

$\bar{\mathbf{u}} =$  تغییر مکان اولیه (اعمال شده) مرزهای تکیه گاهی

$\mathbf{n}$  = بردار واحد عمود بر مرز طبیعی

در روش EFG، ابتدا دامنه مساله  $\Omega$  توسط مجموعه ای از نقاط پراکنده در دامنه مساله و روی مرزهای آن مشخص می شود و سپس تقریب MLS توضیح داده شده در بخشهای قبل برای تقریب متغیر مکانی (مانند تغییر شکل  $\mathbf{u}$ ) در هر نقطه مورد نظر در داخل محدوده مساله مورد استفاده قرار می گیرد. همانطور که پیشتر نیز گفته شد، تقریب MLS یک تقریب سازگار و پیوسته در دامنه مساله است. برای گسسته سازی معادلات سیستم برحسب مؤلفه های تغییرشکل می توان از روش گالرکین استفاده کرد. سپس تغییرشکل در هر نقطه (شامل خود گره ها) با استفاده از روش MLS و پس از حل پارامترهای تغییر شکل گرهی از معادلات گسسته سیستم محاسبه می شود. کرنشها را نیز در هر نقطه می توان با استفاده از مشتقات توابع شکل MLS و مؤلفه های تغییرشکل گرهی بدست آورد.

### ۳-۳-۱- اعمال شرایط تکیه گاهی

برای اعمال شرایط مرزی تکیه گاهی روشهای مختلفی ابداع شده اند که می توان آنها را برحسب روشی که برای اعمال این شرایط مرزی استفاده می کنند به دو دسته کلی تقسیم کرد: دسته اول، روشهایی هستند که صورت ضعیف معادلات را مورد اصلاح قرار می دهند مانند روش ضرایب لاگرانژ<sup>۱۵۶</sup>، روش پنالتی<sup>۱۵۷</sup> و روش نیچه<sup>۱۵۸</sup>. دسته دوم، روشهایی هستند که از توابع شکل با خاصیت دلتای کرونکر در امتداد مرزهای لازم استفاده می کنند مانند استفاده از اجزاء محدود در مرزها، روش تبدیل<sup>۱۵۹</sup> و روش استفاده از توابع وزنی منفرد<sup>۱۶۰</sup>. با توجه به اینکه در این ارتباط دو روش ضرایب لاگرانژ و روش پنالتی بیشتر مورد استفاده قرار دارند، این دو روش در اینجا بطور کامل شرح داده می شوند و نحوه بدست آوردن دستگاه معادلات کل سیستم در روش EFG بر مبنای روش گالرکین مقید شده بیان خواهد شد.

فرض کنید  $k$  شرط زیر وجود دارند که تابع مکانی تقریب زده شده نمی تواند آنها را برآورده سازد:

---

Lagrangian Multiplier Method	<sup>۱۵۶</sup>
Penalty Approach	<sup>۱۵۷</sup>
Nitsche's Method	<sup>۱۵۸</sup>
Transformation Method	<sup>۱۵۹</sup>
Singular Weighting Functions	<sup>۱۶۰</sup>

$$\mathbf{C}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} C_1(\mathbf{u}) \\ C_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ C_k(\mathbf{u}) \end{Bmatrix} = 0 \quad (3-33)$$

که  $\mathbf{C}$  ماتریس ضرایب و معلوم می باشد. هدف در اینجا اصلاح تابع لاگرانژ می باشد بگونه ای که تاثیر این قیودات را در آن لحاظ کند.

تابع لاگرانژ به صورت زیر بیان می شود :

$$\mathbf{L} = \mathbf{T} - \Pi_S + \mathbf{W}_f \quad (3-34)$$

که  $\mathbf{T}$  انرژی جنبشی،  $\Pi$  انرژی کرنش (انرژی پتانسیل)، و  $\mathbf{W}_f$  کار انجام شده بوسیله نیروهای خارجی می باشد.

### روش ضرایب لاگرانژ

در روش ضرایب لاگرانژ، تابع لاگرانژ اصلاح شده به صورت زیر بیان می شود :

$$\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{L} + \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}(\mathbf{u}) d\Omega \quad (3-35)$$

که  $\boldsymbol{\lambda}$  بردار ضریب لاگرانژ می باشد که بصورت زیر بیان می شود :

$$\boldsymbol{\lambda}^T = \{\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_k\} \quad (3-36)$$

این ضرایب لاگرانژ توابع نامعلومی از مختصات مستقل در محدوده  $\Omega$  هستند.

حال، از اصل همپلتون که به صورت  $\delta \int_{t_1}^{t_2} \tilde{\mathbf{L}} dt = 0$  می باشد می توان برای بدست آوردن رابطه گالرکین استفاده

کرد که در نتیجه رابطه گالرکین مقید شده<sup>۱۶۱</sup> به صورت زیر بیان می شود :

در مسائل دینامیکی :

$$(3-37)$$

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D}_e(\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_1} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda}^T \delta \mathbf{C}(\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} d\Omega = 0$$

در مسائل استاتیکی :

(۳-۳۸)

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T \mathbf{D}_e(\mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{C}(\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{\lambda}^T \delta \mathbf{C}(\mathbf{u}) d\Omega = 0$$

که  $\mathbf{D}_e$  ماتریس رفتاری و  $\mathbf{L}\mathbf{u}$  همان کرنش می باشد .

با توجه به اینکه فیود تکیه گاهی در مساله دوبعدی استاتیکی تعریف شده با رابطه (۳-۲۲) تا (۳-۲۴) به

صورت  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$  در مرزهای تکیه گاهی هستند، لذا  $\mathbf{C}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$  و رابطه (۳-۳۸) به صورت زیر در می آید

:

(۳-۳۹)

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{L}\mathbf{u})^T (\mathbf{D}_e \mathbf{L}\mathbf{u}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \mathbf{u}^T \boldsymbol{\lambda} d\Gamma = 0$$

که در روابط بالا، ضرایب لاگرانژ  $\boldsymbol{\lambda}$  را می توان به منزله نیروهایی تصور کرد که موجب صفر شدن عبارت

$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$  می شوند. در صورتی که تابع آزمون  $\mathbf{u}$  را طوری بتوان انتخاب کرد که  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$  شود، دوجمله آخر

رابطه (۳-۳۹) بطور کامل حذف خواهند شد.

در صورتیکه برای متغیرهای مکانی از تقریب MLS استفاده شود خواهیم داشت :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \varphi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I \quad (۳-۴۰)$$

که  $n$  تعداد گره های موجود در دامنه حمایتی نقطه  $\mathbf{x}$  برای ساخت تابع شکل  $\varphi_I(\mathbf{x})$  می باشد. نحوه ساخت

توابع شکل MLS پیشتر در همین فصل توضیح داده شده است.

برای مؤلفه دیگر تغییر شکل نیز داریم :

$$\mathbf{v}^h(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^n \varphi_I(\mathbf{x}) \mathbf{v}_I \quad (۳-۴۱)$$

با ترکیب روابط (۳-۴۰) و (۳-۴۱) داریم :

$$\mathbf{u}^h = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix}^h = \sum_{I=1}^n \underbrace{\begin{bmatrix} \varphi_I & 0 \\ 0 & \varphi_I \end{bmatrix}}_{\boldsymbol{\Phi}_I} \underbrace{\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{v}_I \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}_I} = \sum_{I=1}^n \boldsymbol{\Phi}_I \mathbf{u}_I \quad (۳-۴۲)$$

که  $\boldsymbol{\Phi}_I$  ماتریس توابع شکل است.

با استفاده از رابطه (۳-۴۲)، حاصل  $\mathbf{L}\mathbf{u}^h$  (که کرنشها را می دهد) برابر است با :

(۳-۴۳)

$$\mathbf{L}\mathbf{u}^h = \mathbf{L} \sum_{I=1}^n \Phi_I \mathbf{u}_I = \sum_{I=1}^n \mathbf{L} \Phi_I \mathbf{u}_I = \sum_{I=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_I & 0 \\ 0 & \Phi_I \end{bmatrix} \mathbf{u}_I = \sum_{I=1}^n \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_{I,x} & 0 \\ 0 & \Phi_{I,y} \\ \Phi_{I,y} & \Phi_{I,x} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_I} \mathbf{u}_I = \sum_{I=1}^n \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I$$

که  $\Phi_{I,x}$ ،  $\Phi_{I,y}$  نمایانگر مشتقات تابع شکل MLS نسبت به  $y, x$  هستند و  $\mathbf{B}_I$  ماتریس کرنش گره  $I$  می باشد.

استفاده از توابع شکل MLS در روابط (۳-۴۰) و (۳-۴۱) منجر به این می شود که در مرزهای تکیه گاهی

$\mathbf{u}^h - \bar{\mathbf{u}} \neq 0$  شود، و به همین دلیل به دو جمله آخر رابطه (۳-۳۹) نیاز می شود. دلیل این موضوع به تفضیل در

اینجا بیان می شود :

همانطور که قبلاً هم گفته شد، استفاده از تقریب MLS منجر به تولید توابع شکلی می شود که دارای خاصیت

دلتای کرونکر نیستند، بدین معنی که :

$$\Phi_I(\mathbf{x}_J) \neq \delta_{IJ} \quad (۳-۴۴)$$

این ویژگی تابع شکل MLS موجب می شود که :

$$\mathbf{u}^h(\mathbf{x}_I) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(\mathbf{x}_I) \mathbf{u}_I \neq \mathbf{u}_I \quad (۳-۴۵)$$

$$\mathbf{v}^h(\mathbf{x}_I) = \sum_{I=1}^n \Phi_I(\mathbf{x}_I) \mathbf{v}_I \neq \mathbf{v}_I \quad (۳-۴۶)$$

این بدان معنی است که شرایط مرزی تکیه گاهی بیان شده با رابطه (۳-۲۳) را نمی توان به طور دقیق با اعمال

$\mathbf{u}_I = \bar{\mathbf{u}}_I$  در نقطه  $I$  روی مرز تکیه گاهی  $\Gamma_u$  اعمال کرد. زیرا آنچه می باید اعمال کنیم عبارتست از :

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}_I) = \bar{\mathbf{u}}_I \quad \text{برای گره } I \text{ روی } \Gamma_u \quad (۳-۴۷)$$

به همین منظور می باید از روشی برای مقید کردن صورت ضعیف رابطه گالرکین استفاده کرد که در اینجا از

ضرایب لاگرانژ استفاده می کنیم.

ضریب لاگرانژ  $\lambda$  در رابطه (۳-۳۹) تابع نامعلومی از مختصات می باشد که می باید بوسیله گره های موجود روی

مرزهای تکیه گاهی درونیابی شود تا یک دستگاه معادلات گسسته بدست آید، به صورت زیر :

$$\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_\lambda} N_I(s) \lambda_I \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (3-48)$$

که  $n_\lambda$  تعداد گره های بکار رفته برای این درونیابی،  $s$  طول کمان در امتداد مرز تکیه گاهی،  $\lambda_I$  ضریب لاگرانژ

در گره  $I$  روی مرز تکیه گاهی، و  $N_I(s)$  می تواند یک درونیاب لاگرانژی مورد استفاده در اجزاء محدود باشد.

درونیاب لاگرانژی مرتبه  $n$  به صورت کلی زیر بیان می شود :

$$N_k^n(s) = \frac{(s-s_n)(s-s_1)\cdots(s-s_{k-1})(s-s_{k+1})\cdots(s-s_n)}{(s_k-s_0)(s_k-s_1)\cdots(s_k-s_{k-1})(s_k-s_{k+1})\cdots(s_k-s_n)} \quad (3-49)$$

در صورتی که از یک تابع لاگرانژی مرتبه یک استفاده شود،  $n=1$ ، درونیابهای لاگرانژی در نقطه  $s=s_0$  و  $s=s_1$

عبارتند از :

$$N_0(s) = \frac{(s-s_1)}{(s_0-s_1)}, \quad N_1(s) = \frac{(s-s_0)}{(s_1-s_0)} \quad (3-50)$$

در این حالت، ضریب لاگرانژ در  $s$  بوسیله دو گرهی که قبل و بعد از  $s$  قرار گرفته اند درونیابی می شود. از

درونیاب لاگرانژی با مرتبه بالاتر نیز می توان به همراه گره های بیشتر بر روی مرز استفاده کرد. با استفاده از رابطه

(۳-۴۸) نمو ضریب لاگرانژ،  $\delta\lambda$ ، را می توان به صورت زیر بیان کرد :

$$\delta\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n_\lambda} N_I(s) \delta\lambda_I \quad \mathbf{x} \in \Gamma_u \quad (3-51)$$

بردار ضریب لاگرانژ در رابطه (۳-۳۹) را می توان به صورت ماتریس زیر نوشت :

$$\lambda = \sum_{I=1}^{n_\lambda} \underbrace{\begin{bmatrix} N_I & 0 \\ 0 & N_I \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}_I} \underbrace{\begin{Bmatrix} \lambda_{uI} \\ \lambda_{vI} \end{Bmatrix}}_{\lambda_I} = \sum_{I=1}^{n_\lambda} \mathbf{N}_I \lambda_I \quad (3-52)$$

که  $N_I$  ضریب لاگرانژ گره  $I$  واقع بر مرز تکیه گاهی می باشد. با جایگذاری روابط (۳-۴۲) و (۳-۴۳) در رابطه

(۳-۳۹) داریم:



(۳-۵۳)

$$\int_{\Omega} \delta \left( \sum_{I=1}^n \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I \right)^T \left( \mathbf{D}_e \sum_{J=1}^n \mathbf{B}_J \mathbf{u}_J \right) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \left( \sum_{I=1}^n \Phi_I \mathbf{u}_I \right)^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \left( \sum_{I=1}^n \Phi_I \mathbf{u}_I \right)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \lambda^T \left( \left( \sum_{I=1}^n \Phi_I \mathbf{u}_I \right) - \bar{\mathbf{u}} \right) d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \left( \sum_{I=1}^n \Phi_I \mathbf{u}_I \right)^T \lambda d\Gamma = 0$$

در رابطه بالا، برای متمایز کردن جمله داخل پرانتز دوم انتگرال اول از جمله اول از یک اندیس متفاوت استفاده شده است.

جمله اول در رابطه (۳-۵۳) را می توان به صورت زیر نوشت :

$$\int_{\Omega} \delta \left( \sum_{I=1}^n \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I \right)^T \left( \mathbf{D}_e \sum_{J=1}^n \mathbf{B}_J \mathbf{u}_J \right) d\Omega = \int_{\Omega} \delta \left( \sum_{I=1}^n \mathbf{u}_I^T \mathbf{B}_I^T \right) \left( \mathbf{D}_e \sum_{J=1}^n \mathbf{B}_J \mathbf{u}_J \right) d\Omega \quad (۳-۵۴)$$

با توجه به اینکه عملگرهای جمع، نمو و انتگرال همگی عملگرهای خطی هستند می توان جاهای آنها را باهم عوض کرد که در اینصورت :

(۳-۵۵)

$$\int_{\Omega} \delta \left( \sum_{I=1}^n \mathbf{u}_I^T \mathbf{B}_I^T \right) \left( \mathbf{D}_e \sum_{J=1}^n \mathbf{B}_J \mathbf{u}_J \right) d\Omega = \sum_{I=1}^n \sum_{J=1}^n \delta \mathbf{u}_I^T \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_J^T d\Omega}_{\mathbf{K}_{IJ}} = \sum_{I=1}^n \sum_{J=1}^n \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{K}_{IJ} \mathbf{u}_J$$

در رابطه بالا دو تغییر انجام گرفت. اولی، جایگذاری  $\mathbf{K}_{IJ}$  بود که یک ماتریس  $2 \times 2$  است و در اینجا ماتریس سختی گرهی<sup>۱۶۲</sup> نامیده می شود. دومی، تغییر دادن حدود سریهای بالا به  $\mathbf{n}_t$ ، تعداد کل گره های موجود در دامنه مساله است، زیرا انتگرالگیری در کل دامنه مساله انجام می شود و شامل تمامی گره ها می شود. قابل ذکر است که آنچه در قسمت آخر رابطه (۳-۵۵) انجام گرفت یک رویهم گذاری<sup>۱۶۳</sup> ماتریسی است. برای نشان دادن این موضوع، رابطه (۳-۵۵) در زیر بسط داده شده و به صورت اجزاء ماتریسی نوشته شده است :

---

Nodal Stiffness Matrix<sup>۱۶۲</sup>  
Assembly<sup>۱۶۳</sup>

$$\begin{aligned}
\sum_{I=1}^{n_t} \sum_{J=1}^{n_t} \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{K}_{IJ} \mathbf{u}_J &= \delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{K}_{11} \mathbf{u}_1 + \delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{K}_{12} \mathbf{u}_2 + \dots + \delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{K}_{1n_t} \mathbf{u}_{n_t} \\
&+ \delta \mathbf{u}_2^T \mathbf{K}_{21} \mathbf{u}_1 + \delta \mathbf{u}_2^T \mathbf{K}_{22} \mathbf{u}_2 + \dots + \delta \mathbf{u}_2^T \mathbf{K}_{2n_t} \mathbf{u}_{n_t} \\
&\vdots \\
&+ \delta \mathbf{u}_{n_t}^T \mathbf{K}_{n_t 1} \mathbf{u}_1 + \delta \mathbf{u}_{n_t}^T \mathbf{K}_{n_t 2} \mathbf{u}_2 + \dots + \delta \mathbf{u}_{n_t}^T \mathbf{K}_{n_t n_t} \mathbf{u}_{n_t} \\
&= \delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}
\end{aligned} \tag{۳-۵۶}$$

$\mathbf{K}$  ماتریس سختی کل بدست آمده از رویهم گذاری ماتریسهای سختی گرهی است :

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \dots & \mathbf{K}_{1n_t} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \dots & \mathbf{K}_{2n_t} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_{n_t 1} & \mathbf{K}_{n_t 2} & \dots & \mathbf{K}_{n_t n_t} \end{bmatrix} \tag{۳-۵۷}$$

ابعاد ماتریس  $\mathbf{K}$  به صورت  $(2n_t \times 2n_t)$  می باشد زیرا ابعاد ماتریس  $\mathbf{K}_I$ ،  $(۲ \times ۲)$  است.

بردار  $\mathbf{U}$  بردار تغییر شکل کل می باشد که بردارهای گرهی تغییر شکل در تمام گره های موجود در مساله را شامل

می شود و به صورت زیر است :

$$\mathbf{U} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{n_t} \end{matrix} \right\} \tag{۳-۵۸}$$

که  $\mathbf{u}_I$  بردار تغییر شکل گرهی در گره  $I$  می باشد :

$$\mathbf{u}_I = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{u}_I \\ \mathbf{v}_I \end{matrix} \right\} \tag{۳-۵۹}$$

طول بردار  $\mathbf{U}$  برابر  $(2n_t)$  می باشد.

حال، عبارت دوم رابطه  $(۳-۵۳)$  را بررسی می کنیم :

$$\int_{\Omega} \delta \left( \sum_{I=1}^n \Phi_I \mathbf{u}_I \right)^T \mathbf{b} d\Omega = \sum_{I=1}^n \delta \mathbf{u}_I^T \int_{\Omega} \Phi_I^T \mathbf{b} d\Omega = \sum_{I=1}^n \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{f}_I \tag{۳-۶۰}$$

در رابطه بالا دو تغییر انجام دادیم که اولین آنها تعریف  $\mathbf{f}_I$  به صورت زیر است :

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Omega} \Phi_I^T \mathbf{b} d\Omega \tag{۳-۶۱}$$

که  $\mathbf{f}_I$  بردار نیروی گرهی می باشد.

مجدداً ذکر می شود که انتگرالگیری در کل دامنه مساله انجام می شود و بنابراین اندیسهای جمع سری ها می باید به کل گره های موجود در دامنه مساله تغییر داده شوند که این همان تغییر دوم در رابطه (۳-۶۰) می باشد. عبارت آخر در رابطه (۳-۶۰) را می توان بسط داد و به صورت حاصلضرب ماتریسی به صورت زیر نوشت :

$$\sum_{I=1}^{n_t} \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{f}_I = \delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{f}_1 + \delta \mathbf{u}_2^T \mathbf{f}_2 + \dots + \delta \mathbf{u}_{n_t}^T \mathbf{f}_{n_t} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{F} \quad (3-62)$$

بردار  $\mathbf{F}$  در رابطه (۳-۶۲) بردار نیروی کل می باشد که بردارهای نیروی گرهی تمام گره ها را شامل می شود و به صورت زیر است :

$$\mathbf{F} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{n_t} \end{Bmatrix} \quad (3-63)$$

که  $\mathbf{f}_I$  بردار نیروی گرهی در گره  $I$  می باشد که با رابطه (۳-۶۱) محاسبه می شود و شامل دو مؤلفه زیر است :

$$\mathbf{f}_I = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{xI} \\ \mathbf{f}_{yI} \end{Bmatrix} \quad (3-64)$$

که  $\mathbf{f}_{yI}, \mathbf{f}_{xI}$  دو مؤلفه بردار گرهی در جهات  $y, x$  هستند. طول بردار  $\mathbf{F}$  برابر  $(2n_t)$  می باشد.

برای جمله سوم رابطه (۳-۵۳) نیز عیناً می توان کار مشابهی را انجام داد، با این تفاوت که بردار نیروی جرمی جایگزین بردار نیروی سطحی وارد بر مرز اعمال بار می شود و ناحیه انتگرالگیری نیز به انتگرالگیری روی منحنی تغییر می یابد.

بنابراین بردار نیروی گرهی مربوط به نیروی سطحی به صورت زیر بیان می شود :

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Gamma_t} \Phi_I^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (3-65)$$

بنابراین بردار نیرو شامل بردار نیروهای جرمی و بردار نیروهای سطحی می باشد.

قبل از بررسی جمله چهارم، نگاهی به آخرین جمله رابطه (۳-۵۳) می اندازیم :

$$(3-66)$$

$$\int_{\Gamma_u} \delta \left( \sum_{I=1}^n \Phi_I \mathbf{u}_I \right)^T \lambda d\Gamma = \int_{\Gamma_u} \delta \left( \sum_{I=1}^n \Phi_I \mathbf{u}_I \right)^T \left( \sum_{J=1}^{n_\lambda} \mathbf{N}_J \lambda_J \right) d\Gamma = \sum_{I=1}^n \sum_{J=1}^{n_\lambda} \delta \mathbf{u}_I^T \underbrace{\int_{\Gamma_u} \Phi_I^T \mathbf{N}_J d\Gamma}_{-\mathbf{G}_{IJ}} \lambda_J =$$

$$- \sum_{I=1}^{n_t} \sum_{J=1}^{n_{\lambda t}} \delta \mathbf{u}_I^T \mathbf{G}_{IJ} \lambda_J = -\delta \mathbf{U}^T \mathbf{G} \boldsymbol{\lambda}$$

که تعداد کل گره های واقع بر روی مرز تکیه گاهی می باشد، و  $\mathbf{G}$  نیز یک ماتریس کلی است که از رویهم گذاری ماتریسهای گرهی  $\mathbf{G}_{IJ}$  ساخته می شود. ابعاد ماتریس  $\mathbf{G}_{IJ}$  (۲×۲) است اما تنها گره های واقع بر مرزهای تکیه گاهی را شامل می شود. ابعاد ماتریس  $\mathbf{G}$  برابر  $(2n_t \times 2n_{\lambda t})$  است.

سرانجام، جمله چهارم رابطه (۳-۵۳) را بررسی می کنیم. از روابط (۳-۴۲) و (۳-۵۲) داریم:

(۳-۶۷)

$$\int_{\Gamma_u} \delta \boldsymbol{\lambda}^T \left( \left( \sum_{J=1}^n \Phi_J \mathbf{u}_J \right) - \bar{\mathbf{u}} \right) d\Gamma = \int_{\Gamma_u} \delta \left( \sum_{I=1}^{n_\lambda} \mathbf{N}_I \lambda_I \right)^T \sum_{J=1}^n \Phi_J \mathbf{u}_J d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta \left( \sum_{I=1}^{n_\lambda} \mathbf{N}_I \lambda_I \right)^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma =$$

$$\sum_{I=1}^{n_\lambda} \sum_{J=1}^n \delta \lambda_I^T \underbrace{\int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_I^T \Phi_J d\Gamma}_{-\mathbf{G}_{IJ}^T} \mathbf{u}_J - \sum_{I=1}^{n_\lambda} \delta \lambda_I^T \underbrace{\int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_I^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma}_{-\mathbf{q}_I} = - \sum_{I=1}^{n_{\lambda t}} \sum_{J=1}^{n_t} \delta \lambda_I^T \mathbf{G}_{IJ}^T \mathbf{u}_J + \sum_{I=1}^{n_{\lambda t}} \delta \lambda_I^T \mathbf{q}_I =$$

$$- \delta \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{G}^T \mathbf{U} + \delta \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{q}$$

بردار  $\mathbf{q}$  در رابطه (۳-۶۷) دارای طولی برابر  $(2n_{\lambda t})$  است و از رویهم گذاری بردارهای گرهی  $\mathbf{q}_I$  حاصل می

شود.

در نهایت، با خلاصه کردن روابط (۳-۵۶)، (۳-۶۰)، (۳-۶۲)، (۳-۶۶) و (۳-۶۷) داریم:

(۳-۶۸)

$$\underbrace{\int_{\Omega} \delta \left( \sum_{I=1}^n \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I \right)^T \left( \mathbf{D}_e \sum_{J=1}^n \mathbf{B}_J \mathbf{u}_J \right) d\Omega}_{\delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U}} - \underbrace{\int_{\Omega} \delta \left( \sum_{I=1}^n \Phi_I \mathbf{u}_I \right)^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \left( \sum_{I=1}^n \Phi_I \mathbf{u}_I \right)^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma}_{\delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}}$$

$$- \underbrace{\int_{\Gamma_u} \delta \lambda^T \left( \left( \sum_{I=1}^n \Phi_I \mathbf{u}_I \right) - \bar{\mathbf{u}} \right) d\Gamma}_{\delta \lambda^T [\mathbf{G}^T \mathbf{U} - \mathbf{q}]} - \underbrace{\int_{\Gamma_u} \delta \left( \sum_{I=1}^n \Phi_I \mathbf{u}_I \right)^T \lambda d\Gamma}_{\delta \mathbf{U}^T \mathbf{G} \lambda} = 0$$

که به صورت زیر نوشته می شود :

$$\delta \mathbf{U}^T [\mathbf{K} \mathbf{U} + \mathbf{G} \lambda - \mathbf{F}] + \delta \lambda^T [\mathbf{G}^T \mathbf{U} - \mathbf{q}] = 0 \quad (3-69)$$

چون  $\delta \mathbf{U}$ ,  $\delta \lambda$  دلخواه هستند، رابطه بالا تنها در صورتی ارضا می شود که :

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \mathbf{U} + \mathbf{G} \lambda - \mathbf{F} &= 0 \\ \mathbf{G}^T \mathbf{U} - \mathbf{q} &= 0 \end{aligned} \quad (3-70)$$

دو رابطه قبل را می توان به صورت ماتریسی زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \lambda \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{q} \end{Bmatrix} \quad (3-71)$$

که بدین ترتیب معادلات گسسته کل برای تمام محدوده مساله بدست می آید.

اجزا تشکیل دهنده رابطه (3-71) به منظور دسترسی سریعتر در آینده بطور خلاصه در زیر آورده می شوند :

$$\mathbf{K}_{IJ} = \int_{\Omega} \mathbf{B}_I^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_J d\Omega \quad (3-72)$$

$$\mathbf{B}_I = \mathbf{L} \Phi_I = \begin{bmatrix} \varphi_{I,x} & 0 \\ 0 & \varphi_{I,y} \\ \varphi_{I,y} & \varphi_{I,x} \end{bmatrix} \quad (3-73)$$

$$\mathbf{G}_{IJ} = - \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_I^T \Phi_J d\Gamma \quad (3-74)$$

$$\Phi_I = \begin{bmatrix} \varphi_I & 0 \\ 0 & \varphi_I \end{bmatrix} \quad (3-75)$$

$$\mathbf{N}_I = \begin{bmatrix} N_I & 0 \\ 0 & N_I \end{bmatrix} \quad (3-76)$$

$$\mathbf{f}_I = \int_{\Omega} \Phi_I^T \mathbf{b} d\Omega + \int_{\Gamma_i} \Phi_I^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (3-77)$$

$$\mathbf{q}_I = - \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}_I^T \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (3-78)$$

واضح است که در روشهای بدون جزء، ماتریس سختی کل سیستم از رویهم گذاری ماتریسهای سختی گرهی حاصل می شود درحالیکه در اجزاء محدود، ماتریس سختی کل سیستم از رویهم گذاری ماتریسهای سختی اجزاء حاصل می شود.

با توجه به مقارن بودن ماتریس رفتاری  $\mathbf{D}_e$  داریم :

$$[\mathbf{K}_{II}]^T = \int_{\Omega} [\mathbf{B}_I^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_I]^T d\Omega = \int_{\Omega} [\mathbf{B}_I^T \mathbf{D}_e^T \mathbf{B}_I] d\Omega = \int_{\Omega} [\mathbf{B}_I^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_I] = \mathbf{K}_{II} \quad (3-79)$$

و همچنین :

$$[\mathbf{K}_{IJ}]^T = \int_{\Omega} [\mathbf{B}_I^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_J]^T d\Omega = \int_{\Omega} [\mathbf{B}_J^T \mathbf{D}_e^T \mathbf{B}_I] d\Omega = \int_{\Omega} [\mathbf{B}_J^T \mathbf{D}_e \mathbf{B}_I] d\Omega = \mathbf{K}_{JI} \quad (3-80)$$

که با توجه به رابطه بالا و همچنین رابطه (3-57) روشن می شود که ماتریس  $\mathbf{K}$  یک ماتریس متقارن است.

از رابطه (3-72) دریافته می شود که ماتریس سختی گرهی  $\mathbf{K}_{IJ}$  دارای ضرایب سختی بین گره های  $J, I$  در یک

نقطه (گوسی) در داخل دامنه مساله می باشد که تابعی از مختصات است و باید بر روی کل دامنه مساله

انتگرالگیری شود. هر دو گره  $J, I$  که در داخل دامنه حمایتی حداقل یک نقطه گوسی قرار می گیرند، می باید

ماتریس سختی گرهی  $\mathbf{K}_{IJ}$  مربوط به آنها محاسبه شده و در ماتریس سختی کل سیستم وارد شود. در صورتیکه

گره های  $J, I$  به اندازه ای دور از هم باشند که هر دو با هم در دامنه حمایتی هیچ نقطه گوسی قرار نگیرند،  $\mathbf{K}_{IJ}$

صفر می شود و نیاز به محاسبه آن نیست. بنابراین در صورتیکه دامنه حمایتی متراکم باشد و محدوده وسیعی را

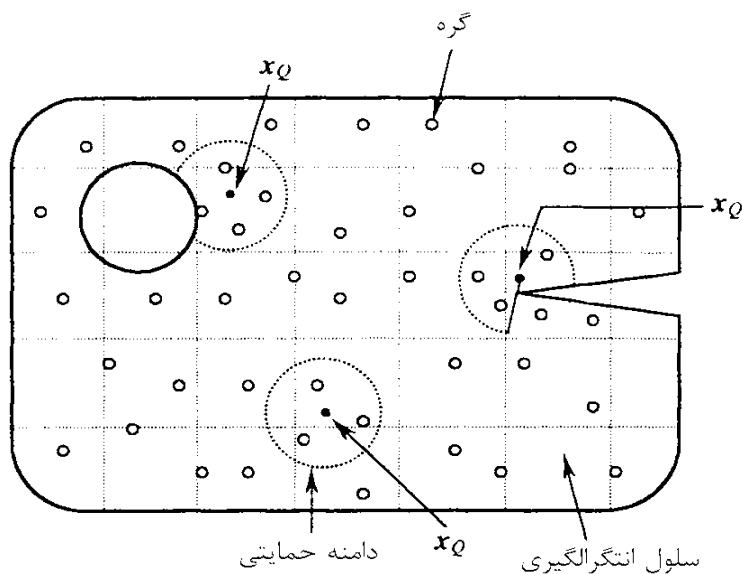
شامل نشود، بسیاری از  $\mathbf{K}_{IJ}$  ها در رابطه (3-57) صفر خواهند شد و ماتریس سختی کل به صورت تنک یا

پراکنده<sup>۱۶۴</sup> درخواهد آمد. در صورتیکه گره ها بطور صحیحی شماره گذاری شوند ماتریس  $\mathbf{K}$  نواری خواهد شد.

از روابط (3-65)، (3-72)، (3-74) و (3-78) بر می آید که می باید انتگرالگیریهای فوق را به روشهای عددی

محاسبه کرد که در این میان، روش چهارضلعی گوس<sup>۱۶۵</sup> بیشترین کاربرد را دارد. در استفاده از روش چهارضلعی

گوس، یک شبکه از اجزاء یا سلولها برای انتگرالگیری مورد نیاز است. این شبکه، شبکه پیش زمینه<sup>۱۶۶</sup> نامیده می شود. شبکه پیش زمینه مشابه شبکه اجزاء در روش اجزاء محدود می باشد و هیچ همپوشانی یا فاصله بین اجزاء در آن مجاز نمی باشد. برخلاف روش اجزاء محدود، اجزای پیش زمینه در EFG تنها برای انتگرالگیری ماتریسهای سیستم استفاده می شوند، نه برای درونیابی متغیرهای مکانی. اجزاء پیش زمینه می توانند کاملاً مستقل از نحوه قرارگیری گره ها باشند. تنها موردی که می باید در طرح اجزاء پیش زمینه دقت کرد اطمینان از دقت انتگرالگیری ماتریسهای سیستم می باشد.



شکل ۷-۳- الگوی مورد استفاده در روش EFG، نقاط  $x_Q$  نمایانگر نقاط گوسی مورد استفاده برای انتگرالگیری روابط ساختاری می باشند.

ماتریس های آورده شده در رابطه (۷۱-۳) می توانند بسیار بزرگتر از ماتریس سختی کل در روش اجزاء محدود باشند که دلیل آن وجود ماتریس  $G$  ناشی از اعمال شرایط مرزی تکیه گاهی است. بسته به تعداد گره های موجود بر روی مرزهای تکیه گاهی، کارایی روش بطور زیادی ممکن است کاهش پیدا کند. از رابطه (۷۱-۳) به روشنی می توان فهمید که ماتریس کل سیستم متقارن است اما دیگر مثبت معین<sup>۱۶۷</sup> نیست که این نیز موجب کاهش بیشتر کارایی محاسباتی می شود.

Background Mesh<sup>۱۶۶</sup>  
Positive Definite<sup>۱۶۷</sup>

روش دیگری که برای اعمال شرایط مرزی در ادامه معرفی خواهیم کرد ابعاد ماتریس سختی کل سیستم را مشابه روش اجزاء محدود بدست می دهد و همچنین ماتریس سختی کل نیز به صورت مثبت معین باقی خواهد ماند.

## روش پنالتی<sup>۱۶۸</sup>

روش پنالتی به طور مکرر در اجزاء محدود برای اعمال قیود تک نقطه ای یا چند نقطه ای استفاده می شود [۱۳]. در روش بدون جزء گالریین شرایط مرزی تکیه گاهی که می باید اعمال شوند به صورت زیر هستند :

$$\sum_{I=1}^n \varphi_I(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) \quad (3-81)$$

که  $\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  تغییر شکل اولیه اعمال شده به مرز تکیه گاهی می باشد. قابل ذکر است که رابطه (۳-۸۱) صورت پیوسته روابطی است که قیود چند نقطه ای (MPC)<sup>۱۶۹</sup> نامیده می شوند و بسیار زیاد در تحلیل‌های اجزاء محدود استفاده می شوند.

در بررسی روابط قیود تکیه گاهی در رابطه (۳-۳۳)،

$$\mathbf{C}^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{C} = \alpha_1 \mathbf{C}_1^2 + \alpha_2 \mathbf{C}_2^2 + \dots + \alpha_k \mathbf{C}_k^2 \quad (3-82)$$

که  $\boldsymbol{\alpha}$  یک ماتریس قطری است که با رابطه زیر بیان می شود :

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_k \end{bmatrix} \quad (3-83)$$

که  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$  ضرایب پنالتی هستند. این ضرایب می توانند تابعی از مختصات باشند اما معمولاً اعداد ثابت مثبت در نظر گرفته می شوند. در هر صورت  $\mathbf{C}^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{C}$  همواره غیر منفی است و بنابراین مینیمم رابطه (۳-۸۲) برابر صفر است.  $\mathbf{C}^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{C}$  تنها در صورتی برابر صفر خواهد شد که تمام شرایط رابطه (۳-۳۳) کاملاً ارضا شوند. برای دریافتن شرایط لازم برای مینیمم شدن رابطه فوق نمو (مشتق) آن را مساوی صفر قرار می دهیم :



$$\delta(\mathbf{C}^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{C}) = 0 \quad (3-84)$$

با استفاده از قانون زنجیری داریم :

$$\delta(\mathbf{C}^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{C}) = 2\mathbf{C}^T \boldsymbol{\alpha} \delta \mathbf{C} = 2\delta \mathbf{C}^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{C} = 0 \quad (3-85)$$

که منجر به رابطه زیر می شود :

$$\boldsymbol{\alpha} \mathbf{C}(\mathbf{u}) = \begin{Bmatrix} \alpha_1 C_1(\mathbf{u}) \\ \alpha_2 C_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \\ \alpha_k C_k(\mathbf{u}) \end{Bmatrix} = 0 \quad (3-86)$$

اگر  $\alpha_i = 0$  باشد، شرایط مرزی لازم اصلاً اعمال نمی شود، زیرا هر مقدار  $C_i$  شرط  $i$  ام رابطه (3-86) را ارضا خواهد کرد. اگر  $\alpha_i$  به بی نهایت میل کند، شرایط مرزی لازم کاملاً ارضا می شود زیرا برای ارضای رابطه (3-86)  $C_i$  باید برابر صفر شود.

تحلیل بالا نشان می دهد که  $\mathbf{C}^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{C}$  تابع مناسب برای قید مورد نظر ما می باشد.

اکنون تابع لاگرانژ اصلاح شده به صورت زیر نوشته می شود :

$$\tilde{L} = L + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{C}^T(\mathbf{u}) \boldsymbol{\alpha} \mathbf{C}(\mathbf{u}) d\Omega \quad (3-87)$$

عدد  $\frac{1}{2}$  که در رابطه (3-87) آمده است برای خنثی کردن اثر عدد 2 می باشد که در اثر نمو گیری از رابطه (3-82) -

(3) بوجود می آید. تفاوت مهم بین ضریب پنالتی  $\alpha_i$  و ضریب لاگرانژ  $\lambda$  این است که ضریب پنالتی یک عدد

ثابت است که تغییر نمی کند در حالیکه ضریب لاگرانژ متغیر است.

چون  $\alpha$  یک ثابت معلوم است، هیچ افزایشی در تعداد مجهولات مساله صورت نخواهد گرفت. سوالی که در اینجا

مطرح می شود نحوه انتخاب ضریب  $\alpha$  می باشد. برای آنکه قیود به طور کامل ارضا شوند ضریب پنالتی می باید

بی نهایت باشد که از نظر عملی و تحلیل عددی امکان پذیر نیست. بنابراین، در روش پنالتی نمی توان این قیود را

بطور دقیق ارضا کرد و همواره با تقریب همراه است. به طور کلی انتخاب ضریب پنالتی بزرگتر موجب ارضای

بهرتر قیود می شود اما موضوعی که در اینجا مطرح است این است که در صورتیکه ضریب پنالتی بسیار کوچک

باشد، قیود به طور مناسب اعمال نخواهند شد و اگر بسیار بزرگ باشد نیز مشکلات عددی بوجود خواهد آمد.

بنابراین باید به روش مناسبی این ضریب را تعیین کرد که در کل مساله قابل استفاده باشد.

### تعیین ضریب پنالتی

روشهای مختلفی برای این کار ارائه شده است، از جمله روشی که زینکوویچ ([۱۳]) در روش اجزاء محدود بکار برد. غیر از آن روشهای ساده تری نیز برای این کار وجود دارند که از آن جمله :

$$\alpha = 1.0 \times (10^{4-13}) \times \max(\text{اعضای قطری ماتریس سختی}) \quad (3-88)$$

و

$$\alpha = 1.0 \times 10^{5-8} \times (\text{مدول یانگ}) \quad (3-89)$$

قابل ذکر است که برای انتخاب  $\alpha$  مناسب ممکن است نیاز به استفاده از آزمون و خطا باشد.

به این ترتیب روش پنالتی می تواند در اعمال شرایط مرزی تکیه گاهی در روشهای بدون جزئی که از توابع شکل

MLS برای تقریب متغیر مکانی استفاده می کنند بکار گرفته شود.

در صورت استفاده از روش پنالتی برای اعمال شرایط مرزی تکیه گاهی، صورت ضعیف رابطه گالرکین مقید شده

به صورت زیر بیان می شود :

در مسائل دینامیکی :

$$(3-90)$$

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{Lu})^T \mathbf{D}_e(\mathbf{Lu}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \mathbf{C}(\mathbf{u})^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{C}(\mathbf{u}) d\Omega + \int_{\Omega} \rho \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} d\Omega = 0$$

در مسائل استاتیکی :

$$(3-100)$$

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{Lu})^T \mathbf{D}_e(\mathbf{Lu}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \int_{\Omega} \delta \mathbf{C}(\mathbf{u})^T \boldsymbol{\alpha} \mathbf{C}(\mathbf{u}) d\Omega = 0$$

که  $\mathbf{C}(\mathbf{u}) = \mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}$  و باتوجه به اینکه قیود (شرایط مرزی تکیه گاهی) در رابطه (۳-۲۳) تنها بر روی مرز

تعریف شده اند، با تغییر انتگرال سطحی در عبارت مربوطه به انتگرال روی منحنی خواهیم داشت:

(۳-۱۰۱)

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{Lu})^T \mathbf{D}_e(\mathbf{Lu}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_t} \delta \mathbf{u}^T \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \delta \int_{\Gamma_u} \frac{1}{2} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^T \cdot \boldsymbol{\alpha} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma = 0$$

که  $\alpha$  در رابطه فوق یک ماتریس قطری شامل ضرایب پنالتی به صورت رابطه (۳-۸۳) می باشد که در مسائل دو بعدی  $k=2$ ، و در مسائل سه بعدی،  $k=3$  می باشد.

باجایگذاری تغییر شکلهای تقریب زده شده به روش MLS در رابطه (۳-۱۰۱) و انجام مراحل مشابه مراحل انجام شده در روش ضرایب لاگرانژ، معادله کلی سیستم به صورت زیر بدست می آید :

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}^{\alpha}] \mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^{\alpha} \quad (۳-۱۰۲)$$

که  $\mathbf{F}$  بردار نیروی کلی بدست آمده از ماتریس نیروهای گرهی تعریف شده با رابطه (۳-۶۵) و  $\mathbf{K}$  ماتریس کلی سیستم بدست آمده از ماتریس های سختی گرهی با رابطه (۳-۷۲) هستند. ماتریس  $\mathbf{K}^{\alpha}$  ماتریس پنالتی کل نامیده می شود که از رویهم گذاری ماتریس های پنالتی گرهی  $\mathbf{K}_{II}^{\alpha}$  تعریف شده با رابطه زیر بدست می آید :

$$\mathbf{K}_{II}^{\alpha} = \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\Phi}_I^T \boldsymbol{\alpha} \boldsymbol{\Phi}_I d\Gamma \quad (۳-۱۰۳)$$

که  $\boldsymbol{\Phi}_I$  در رابطه (۳-۷۵) داده شده است.

بردار نیروی  $\mathbf{F}^{\alpha}$  از رویهم گذاری بردارهای گرهی  $\mathbf{F}_I^{\alpha}$  با رابطه زیر بدست می آید :

$$\mathbf{F}_I^{\alpha} = \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\Phi}_I^T \boldsymbol{\alpha} \bar{\mathbf{u}} d\Gamma \quad (۳-۱۰۴)$$

قابل ذکر است که انتگرالگیری در امتداد مرز تکیه گاهی انجام می گیرد و به همین دلیل ماتریس  $\mathbf{K}^{\alpha}$  تنها دارای مولفه از گره هایی خواهد بود که نزدیک مرز تکیه گاهی  $\Gamma_{II}$  باشند و در دامنه حمایتی نقاط گوسی واقع بر مرز  $\Gamma_{II}$  قرار گیرند.

با مقایسه رابطه (۳-۱۰۲) با رابطه (۳-۷۱)، مزایای روش پنالتی به صورت زیر روشن می گردند:

- ابعاد و خصوصیت مثبت بودن ماتریس کل، در صورتیکه ضرایب پنالتی استفاده شده مثبت باشند، حفظ می گردد.

- تقارن و نواری بودن ماتریس کل حفظ می گردد.

این مزایا موجب می شود که روش پنالتی بسیار کاراتر و جذاب تر از روش ضرایب لاگرانژ باشد. مطالعات تفصیلی بر روی روش پنالتی، معایب کوچک زیر را در مقایسه با روش ضرایب لاگرانژ نشان داده است:

- لازم است که ضرایب پنالتی را بگونه ای انتخاب کرد که در تمام مسائل قابل اعمال باشند.
- نتایج بدست آمده بطور کلی دقت کمتری دارند (در مقایسه با روش ضرایب لاگرانژ).
- شرایط مرزی تکیه گاهی لازم را هیچ گاه بطور دقیق نمی توان اعمال کرد و همواره تقریب دارد.

با وجود این معایب جزئی، روش پنالتی همچنان از جذابیت زیادی برای بسیاری از محققین برخوردار است. همچنین از این روش می توان برای اعمال شرایط پیوستگی در مسائل ناهمگن در مرز پیوستگی دو ماده استفاده کرد که در زیر شرح داده می شود.

دامنه مساله می تواند شامل مصالح مختلفی باشد، نحوه برخورد با ناپیوستگی مصالح در اجزاء محدود ساده است زیرا از اجزاء استفاده می شود و تمام آنچه که می باید انجام داد این است که گوشه های اجزاء را در مرز مصالح مختلف قرارداد. با توجه به اینکه خصوصیات مصالح برای قسمت های مختلف هندسه مساله برای اجزاء آنها تعریف شده است دیگر نیاز به هیچ کار دیگری در اجزاء محدود نمی باشد.

اما در روش های بدون جزء هیچ شبکه ای از اجزاء وجود ندارد و بنابراین مرز مصالح رانمی توان براساس اجزاء تعیین کرد و در اینجا به روش خاصی نیاز است. کوردز و موران<sup>۱۷۰</sup> در سال ۱۹۹۶ راه حلی برای اعمال ناپیوستگی مصالح به روش ضرایب لاگرانژ را ارائه کردند [۱۴]. در راه حل آنها مرز مصالح به عنوان یک شرایط مرزی لازم خاص در نظر گرفته شده و سپس از روش EFG با ضرایب لاگرانژ توضیح داده شده در قسمت قبل برای برخورد با ناپیوستگی مصالح استفاده می شود. کرونگار و بلیشکو<sup>۱۷۱</sup> در سال ۱۹۹۸ روش دیگری برای مدل کردن ناپیوستگی مصالح در EFG، با اضافه کردن توابع شکل خاصی که دارای ناپیوستگی در مشتقات خود باشند، ارائه کردند [۱۵].

روش پنالتی که در این جا معرفی می شود روش دیگری برای اعمال ناپیوستگی مصالح می باشد. این روش در ابتدا توسط جی. آر. لیو و ینگ<sup>۱۷۲</sup> در سال ۱۹۹۹ پیشنهاد شد که باجزئیات در رساله ینگ آمده است [۱۶].

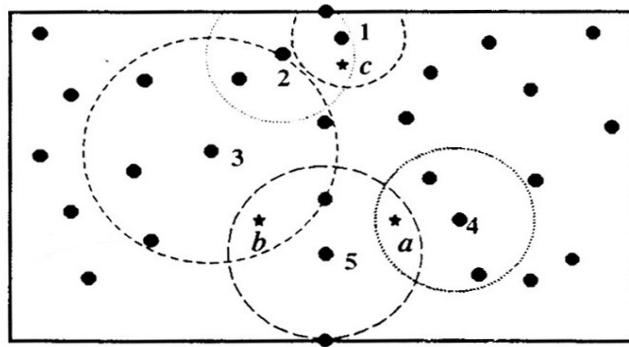
---

Cordes and Moran<sup>۱۷۰</sup>  
Krongauz and Belytschko<sup>۱۷۱</sup>  
G. R. Liu and Yang<sup>۱۷۲</sup>

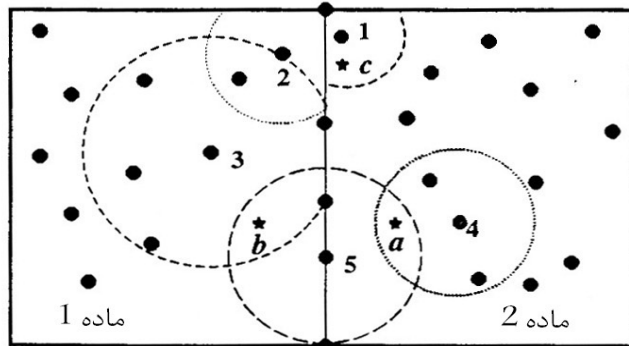
قیود چند نقطه ای که به روش پنالتی اعمال می شوند غالباً در اجزاء محدود برای مدل سازی انواع مختلف اتصالات بین اجزای یک سیستم سازه ای بکار می روند. روش پنالتی نیز برای مدل سازی شرایط مشابه در مسائل مکانیک بکار می رود.

در این قسمت، روش پنالتی برای مدل سازی دو ناحیه با مصالح مختلف که به یک صورت پیش فرض به هم متصل هستند نشان داده می شود. اتصال بین این دو ناحیه در اینجا از نوع کامل در نظر گرفته می شود اما می تواند برای تمام انواع اتصالات از جمله اتصالات جزئی نیز استفاده شود.

در اینجا یک محیط ناهمگن با دو ماده متفاوت در نظر گرفته می شود. روی مرز دو ناحیه با تعدادی گره که متعلق به دو ماده هستند مشخص می شود. سپس از قانون عدم تداخل<sup>۱۳</sup> دامنه های تاثیر گره ها استفاده می کنیم. قانون عدم تداخل می گوید که نقاطی که در ناحیه ۱ قرار دارند تنها تحت تاثیر گره های موجود در ماده ۱ به علاوه گره های واقع بر مرز بین دو ناحیه قرار می گیرند و نقاط موجود در ناحیه ۲ تنها تحت تاثیر گره های موجود در ماده ۲ به علاوه گره های واقع بر مرز قرار می گیرند. این قانون دامنه تاثیر یک گره را به مصالح همان ناحیه ای که گره در آن قرار دارد محدود می کند. شکل ۳-۸ نحوه تعیین دامنه تاثیر گره هایی که در محیط های ناهمگن قرار گرفته اند را به تصویر می کشد. در شکل ۳-۸ از دامنه های تاثیر دایروی استفاده شده است.



(الف)



(ب)

شکل ۸-۳- نحوه تعیین دامنه تاثیر گرهی در الف) محیط همگن ب) محیط ناهمگن

در حالت همگن (شکل ۸-۳ الف)، نقطه **a** در دامنه تاثیر گره های ۴ و ۵ قرار دارد، بنابراین، گره های ۴ و ۵ همسایه نقطه **a** به حساب می آیند. بطور مشابه، گره های ۳ و ۵ همسایه نقطه **b** هستند و گره های ۱ و ۲ همسایه نقطه **c** هستند. اما در حالت غیر همگن (شکل ۸-۳ ب) همسایه های نقاط **a, b, c** ممکن است تغییر کنند. دامنه تاثیر گره ۴ مشابه حالت قبل است زیرا دامنه تاثیر گره ۴ مرز دو ناحیه را قطع نمی کند. دامنه تاثیر گره ۵ نیز مشابه حالت همگن است زیرا بر روی مرز دو ناحیه قرار دارد. به همین دلیل نقطه **a** هنوز در محدوده تاثیر گره ۵ قرار دارد. همسایه های نقطه **b** نیز هنوز شامل گره های ۳ و ۵ می شود زیرا هر دو گره در ناحیه ۱ قرار دارند. اما نقطه **c** در دامنه تاثیر گره ۲ قرار ندارد (به دلیل قانون عدم تداخل دامنه تاثیر گره ۲). در این حالت نقطه **c** تنها یک همسایه دارد و آن گره ۱ است.

اتصال این دو ناحیه با اعمال شرایط پیوستگی برقرار می شود. بر روی مرز دو ناحیه  $\Gamma_S$  قيود زیر را اعمال می

کنیم :

$$\bar{\mathbf{u}}^+ = \bar{\mathbf{u}}^- \quad (3-105)$$

که  $\bar{\mathbf{u}}^+, \bar{\mathbf{u}}^-$  مربوط به تغییر شکل‌های دو ناحیه، اما روی مرز  $\Omega^+, \Omega^-$  هستند. این قید سپس با استفاده از صورت ضعیف گالرکین مقید شده به روش پنالتی اعمال می شود:

$$(3-106)$$

$$\int_{\Omega} \delta(\mathbf{Lu})^T (\mathbf{D}_e \mathbf{Lu}) d\Omega - \int_{\Omega} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{b} d\Omega - \int_{\Gamma_i} \delta \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma - \delta \int_{\Gamma_u} \frac{1}{2} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}})^T \boldsymbol{\alpha} (\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}}) d\Gamma - \delta \int_{\Gamma_u} \frac{1}{2} (\bar{\mathbf{u}}^+ - \bar{\mathbf{u}}^-)^T \boldsymbol{\beta} (\bar{\mathbf{u}}^+ - \bar{\mathbf{u}}^-) d\Gamma = 0$$

قابل ذکر است که تفاوت بین روابط (3-106) و (3-101) در جمله اضافی است که در آخر رابطه (3-106) قابل

وجود آمده است و در آن ماتریس قطری ضرایب پنالتی است که شکلی مشابه ماتریس  $\boldsymbol{\alpha}$  دارد، اما مقادیر  $\boldsymbol{\beta}$

می تواند متفاوت باشد. مقادیر تقریبی  $\bar{\mathbf{u}}^+, \bar{\mathbf{u}}^-$  با استفاده از تقریب MLS به صورت زیر بیان می شوند :

$$\bar{\mathbf{u}}^{+h}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n^+} \Phi_I^+(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I^+ \quad (3-107)$$

و

$$\bar{\mathbf{u}}^{-h}(\mathbf{x}) = \sum_{I=1}^{n^-} \Phi_I^-(\mathbf{x}) \mathbf{u}_I^- \quad (3-108)$$

که  $n^+, n^-$  به ترتیب تعداد گره های موجود در نواحی  $\Omega^+, \Omega^-$  هستند.  $\Phi_I^+, \Phi_I^-$  ماتریسهای توابع شکل بدست آمده از گره های موثر بر  $\mathbf{x}$  در  $\Omega^+, \Omega^-$  هستند.

با جایگذاری روابط (3-39)، (3-107)، (3-108) در رابطه (3-106) معادلات گسسته کل سیستم به صورت زیر

بدست می آیند :

$$[\mathbf{K} + \mathbf{K}^\alpha + \mathbf{K}^\beta] \mathbf{U} = \mathbf{F} + \mathbf{F}^\alpha \quad (3-109)$$

که

$$\mathbf{K}_{II}^\beta = \int_{\Gamma_s} [\Phi_I^+ - \Phi_I^-]^T \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot [\Phi_J^+ - \Phi_J^-] d\Gamma \quad (3-110)$$

ماتریس  $\mathbf{K}^B$  ماتریس سختی اتصال دو ماده مختلف می باشد. قابل ذکر است که انتگرالگیری در امتداد مرز دو مصالح انجام می شود و بنابراین ماتریس  $\mathbf{K}^B$  مولفه هایی از گره های مجاور (نه فقط روی) مرز ناحیه خواهد داشت که بر نقاط گوسی موجود بر روی مرز تاثیر می گذارند.

پس از حل دستگاه معادلات (۳-۱۰۹) کرنش و تنش را می توان از روابط زیر محاسبه کرد :

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_I & 0 \\ 0 & \varphi_I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \sum_{I=1}^n \mathbf{B}_I \mathbf{u}_I \quad (3-111)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3-112)$$

با توجه به مباحث گفته شده می توان فلوچارت روش بدون جزء گالرکین را به صورت صفحه بعد ترسیم کرد:



ایجاد هندسه مسأله



گره گذاری و ایجاد شبکه پس زمینه جهت انتگرالگیری



برای تمام سلولهای شبکه پس زمینه



برای تمام نقاط گوسی موجود در یک سلول



یافتن تمام گره هایی که در دامنه پشتیبانی نقطه گوسی قرار دارند



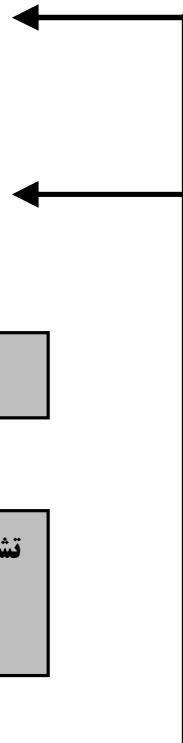
تشکیل توابع شکل MLS و مشتقات نسبی آنها برای هر نقطه گوسی با توجه به گره های مرحله قبل



تشکیل ماتریسهای گرهی



تشکیل ماتریسهای سیستم با رویهم گذاری ماتریسهای گرهی



### حل دستگاه معادلات کل بر اساس مقادیر تغییر مکان گرهی



محاسبه کرنشها در نقطه گوسی با استفاده از مقادیر تغییر مکان گرهی در دامنه نقطه گوسی



محاسبه تنشها در نقطه گوسی با ضرب ماتریس رفتاری در تانسور کرنش از مرحله قبل

شکل ۹-۳- فلوچارت روش بدون جزء گالرکین

### ۳-۴- جمع بندی

اصلاحاتی که توسط بلیشکو و همکاران او در سال ۹۴ بر روی روش اجزاء پراکنده ارائه شده توسط نیرولز انجام گرفت و منجر به روش بدون جزء گالرکین گردید، عمدتاً شامل موارد زیر بود

:

- استفاده از تعداد زیادی نقطه گوسی درون ساختار سلولی که در برگیرنده هندسه مساله باشد.
- وارد کردن بعضی جملات مشتقات توابع درونیاب که توسط نیرولز صرفنظر شده بود.
- استفاده از روش ضرایب لاگرانژ برای اعمال شرایط مرزی لازم

اصلاحات ذکر شده در بالا موجب شد که روش EFG از مزایای زیر برخوردار گردد :

✓ روش EFG حتی در موارد استفاده از توابع پایه خطی نیز قفل شدگی حجمی<sup>۱۷۴</sup> از خود

نشان نمی دهد.

✓ سرعت همگرایی در این روش نسبت به روش اجزاء محدود بطور قابل ملاحظه ای بالاتر است.

✓ در این روش می توان گرادینتهای شدید موضعی را نیز بخوبی مشخص کرد.

✓ این روش در مسائل شکست در حالت الاستیک خطی بسیار مفید و موثر است.

با اینکه این روش گستردگی روش اجزاء پراکنده را ندارد، اما دقت بالای آن این موضوع را توجیه مینماید.

بر خلاف روشهای دیگری که در آنها فواصل شبکه ها<sup>۱۷۵</sup> بطور دلخواه تنظیم می شوند مانند روش

نی و اوتکو<sup>۱۷۶</sup> [۳۹]، فرمولهای اختلاف محدود در اینجا استفاده نمی شود و دقت این روش به

نظر می رسد که بیشتر باشد. با این حال، این روش نسبت به روش اجزاء محدود بسیار نوپا به

نظر می رسد که استفاده از این روش در تحلیل مسائل مختلف مکانیک به توسعه آن کمک خواهد

کرد که در این ارتباط در فصول آتی به تفصیل صحبت خواهد شد.

## فصل چهارم

### روشهای مدل سازی غیرخطی بتن، مدل ریزصفحات و نظریه

#### آسیب

#### ۴-۱- کلیات

در این فصل به بررسی مدلی می پردازیم که بتواند رفتار بتن را تحت تنشهای موجود بشکل مناسب و واقع گرایانه ای مدل نماید. زیرا با توجه به عملکرد و اهمیت کاربرد عملی، بتن فی‌ال‌نفسه بصورت یک ماده بار رفتار کاملاً غیرخطی در نظر گرفته می‌شود. این ماده در ابتدا بصورت همسانگر عمل می‌کند، اما پس از آن دارای رفتار ارتوتروپیک<sup>۱۷۷</sup> می‌باشد که جهات محورهای اصلی ارتوتروپیک ثابت نبوده و به شدت وابسته به جهات تنش‌های اصلی می‌باشد. بعلاوه، بتن در کشش و فشار رفتارهای متفاوتی از خود نشان می‌دهد (مانند افزایش حجم<sup>۱۷۸</sup> در فشار). بعلاوه،

---

<sup>177</sup> orthotropic  
<sup>178</sup> volume expansion

آسیب دیدگی<sup>۱۷۹</sup>، تردبودن رفتار<sup>۱۸۰</sup> و رفتار نرم شوندگی کرنش<sup>۱۸۱</sup> بعد از تنش حداکثر، برای این ماده مشاهده می شود.

از مطالعه مدل های شبیه سازی رفتاری<sup>۱۸۲</sup> مواد با منشاء زمینی<sup>۱۸۳</sup>، می توان دریافت که تمامی مدل های شبیه ساز رفتار مواد یاد شده قابل تقسیم به دو گروه عمده هستند: مدل های پیوسته<sup>۱۸۴</sup> و مدل های گسسته<sup>۱۸۵</sup>.

در مدل های پیوسته فرض بر این است که جسم به صورت یکپارچه بوده و وجود هرگونه ناپیوستگی اعم از ترک، گسیختگی، جدایش و یا شکست در آن مجاز نیست. از سوی دیگر در مدل های گسسته، جسم بصورت مجموعه ای سرهم بندی شده از ذراتی در نظر گرفته می شود که می توانند روی حرکت یکدیگر مؤثر باشند.

مدل های پیوسته به نوبه خود به دو زیرگروه عمده تقسیم می شوند: مدل های درشت مقیاس<sup>۱۸۶</sup> که بر اساس تئوری های پلاستیسیته ویا آسیب و یا ترکیبی از هر دو بنا می شوند و مدل های شبه ریز مقیاس<sup>۱۸۷</sup> نظیر مدل های صفحات ریزمقیاس<sup>۱۸۸</sup> و یا مدل های چند صفحه ای<sup>۱۸۹</sup>. اما مدل های گسسته به یک زیر مجموعه به نام مدل های ریزمقیاس<sup>۱۹۰</sup> منتهی می شوند مانند مدل ذرات مجزا<sup>۱۹۱</sup>.

در مدل های درشت مقیاس، رفتار جسم بر اساس تعریف ارتباط مستقیم میان تانسورهای تنش و کرنش (مقیاس ساختمانی) سازماندهی می شود حال آنکه در مدل های شبه ریزمقیاس رفتار ماده

---

<sup>179</sup> damage

<sup>180</sup> brittleness

<sup>181</sup> strain softening

<sup>1</sup> Constitutive Modeling

<sup>2</sup> Geo-Materials

<sup>3</sup> Continuous Models

<sup>4</sup> Discontinuous Models

<sup>5</sup> Macroscopic Models

<sup>6</sup> Mesoscopic Models

<sup>7</sup> Micro-plane Models

<sup>8</sup> Multi-laminate Models

<sup>9</sup> Microscopic Models

<sup>10</sup> Discrete Particle Models

مبتنی بر تعریف این ارتباط به نحوی غیرمستقیم است، به این صورت که به جای تعریف ارتباط میان تانسورهای تنش و کرنش، ارتباط میان بردارهای تنش و کرنش روی صفحاتی با جهات از پیش معین شده تعریف می شوند که در مقالات علمی به صفحات ریزمقیاس یا چند صفحه ای مشهور هستند. در نهایت، مدل‌های گسسته رفتار جسم را بر اساس تعریف نیروهای بین ذره ای در اثر تأثیر حرکتی آنها بر روی یکدیگر و سپس جاگذاری این نیروها در معادلات حرکت و حل آنها به کمک تکنیک عددی عناصر مجزا<sup>۱۹۲</sup> شبیه سازی می کنند.

تا کنون مدل‌های پیوسته و گسسته بسیاری توسط محققین جهت مدل نمودن رفتار مواد شبه زمینی و مواد با منشأ زمینی<sup>۱۹۳</sup> ارائه شده است. در این میان مدل‌های ریزمقیاس گسسته به دلیل نوع پرداخت موشکافانه و نزدیک به واقعیت رفتار مواد فوق الذکر بهتر از سایر مدل‌های یاد شده توانایی بازسازی رفتار پدیده هایی چون تمرکز موضعی تنش<sup>۱۹۴</sup> را در اینگونه مواد دارند اما برای مقاصد معمول مهندسی که همه روزه مهندسان سازه با آن سر و کار دارند قدری دشوار و پیچیده و پر هزینه به نظر می رسد. این در حالی است که از دیگر سو و در نقطه مقابل مدل‌های ریز مقیاس گسسته، مدل‌های درشت مقیاس مبتنی بر نامتغیرهای تنش یا کرنش<sup>۱۹۵</sup> از شبیه سازی بسیاری از ویژگیهای رفتاری مواد یاد شده که وابسته به جهت هستند عاجزند زیرا ذخیره سازی اطلاعات وابسته به جهت اساساً توسط اینگونه مدلها غیرممکن است. بنابراین در چنین شرایطی به نظر می رسد استفاده از مدل‌های شبه ریزمقیاس<sup>۱۹۶</sup> راه حلی منطقی و میانه بین دو دسته مدل‌های یاد شده باشد. در ادامه، برخی از روشهای معروف برای مدل سازی این نوع مواد بصورت خلاصه شرح داده شده است.

---

<sup>1</sup> Discrete Element Method

<sup>2</sup> Geo and Geo-like Materials

<sup>3</sup> Stress localization

<sup>4</sup> Stress or Strain Invariants

<sup>5</sup> Mesoscopic Models

## ۴-۲- مدل‌های تک محوری معادل<sup>۱۹۷</sup>

در آزمایشات دومحوری و سه محوری با افزایش یکنواخت بارگذاری، روابط تنش-کرنش در جهات اصلی بصورت کیفی یکسان می‌باشد. این امر به ایده توصیف رفتار ساختاری دو محوری یا سه محوری بتن بوسیله روابط ساختاری تک‌محوری معادل، اعمال شده بر جهتهای اصلی، منجر می‌گردد و فرض می‌شود که محورهای اصلی ارتوتروپی منطبق با جهات تنش‌های اصلی می‌باشد. نتیجه آن یک معادله ساختاری بوده که در آن مقادیر افزایش تنش، به تنش‌ها و کرنش‌ها وابسته می‌گردد، اما در یک حالت ارتوتروپیک محدود می‌شود (مرجع [۴۰] مطالعه شود).

مزیت عمده مدل‌های غیرخطی کشسان ارتوتروپیک بر پایه روابط ساختاری تک‌محوری، سادگی آنها می‌باشد. در این مدل‌ها نیاز به ملاحظات تئوری پیچیده برای مدل‌سازی رفتار مواد نمی‌باشد. در حالت‌های دوبعدی یک منحنی پوش مقاومت نهائی برای حالت‌های دو محوری و یک منحنی متناظر تنش-کرنش برای تنش‌ها، بر اساس داده‌های تجربی، ضروری می‌باشد. حالت مشکل‌تر و با جزئیات بیشتر در شرایط سه‌بعدی رخ می‌دهد، که نیازمند سطح مقاومت نهائی در فضای تنش‌های اصلی، تعریف کرنش معادل تک‌محوری و سطح کرنش متناظر در فضای کرنش تک‌محوری معادل می‌باشد.

ایراد عمده مدل‌های ارتوتروپیک آن است که بطور کلی، شرط حالت نامتغییر<sup>۱۹۸</sup> را برای مواد با رفتار اولیه همسان گرد ارضا نمی‌کنند. این امر به این معنی می‌باشد که بدون توجه به دستگاه مختصات در نظر گرفته شده بعنوان مبدا، برای یک مسیر بارگذاری داده شده، بایستی پاسخ‌های یکسان تنش-کرنش، بوسیله معادله ساختاری ایجاد گردد. توسط بازنت (۱۹۸۳) [۴۰] نشان داده شد که حالت نامتغییر برای این نوع مدل‌ها تنها هنگامی تضمین می‌گردد که جهات اصلی تنش یا کرنش در فرآیند بارگذاری ماده دچار چرخش نگردد یا این چرخش با زاویه بسیار کوچک قابل اغماض صورت پذیرد. از فقدان این امر، با چرخش محورهای ارتوتروپی در داخل ماده و انطباق آنها

<sup>6</sup>Equivalent uniaxial models  
<sup>198</sup> form-invariance condition

با جهات تنش اصلی، به ندرت می‌توان اجتناب کرد، زیرا محورهای ارتوتروپی باید بخوبی با جهات محورهای اصلی کرنش تطابق داشته باشد که بگونه‌ای متفاوت از جهات محورهای اصلی تنش، در داخل ماده دوران می‌کند. بعلاوه، چرخش محورهای ارتوتروپی در مسائل فیزیکی مورد سؤال می‌باشد: کاهش مقاوت مواد در فرایند آسیب دیدگی، به تاریخچه بارگذاری تا حالت نهایی بستگی داشته و همچنین چرخش محورهای ارتوتروپی به معنی چرخش آسیب‌خوردگی در این مواد می‌باشد.

#### ۴-۳- روشهای خمیری

مواد مشابه بتن دارای رفتار غیرخطی تنش-کرنش طی بارگذاری و کرنش قابل توجه بازگشت ناپذیر در هنگام باربرداری می‌باشند، مخصوصاً تحت بارگذاری فشاری با فشار محدود کننده<sup>۱۹۹</sup>، رفتار شکل‌پذیر بدست می‌آید. تغییر شکل‌های برگشت ناپذیر بتن ناشی از ترک‌های ریز و لغزش می‌تواند بوسیله نظریه خمیری توجیه گردد.

رفتار کشسان-خمیری تحت نظریه افزایشی کلاسیک خمیری بر پایه معادله پرنتل-روئس<sup>۲۰۰</sup> بوده، که یک تجزیه برای کرنش‌های افزایشی کل، به اجزاء افزایشی خمیری و ارتجاعی، در نظر می‌گیرد. برای مشخص کردن کرنش‌های خمیری، سه ویژگی از ماده مورد نیاز می‌باشد: تعریف تابع تسلیم<sup>۲۰۱</sup> از جایی که جریان خمیری شروع می‌گردد، یک قانون جریان<sup>۲۰۲</sup> که افزایش کرنش‌های خمیری در سطح تنش مورد نظر را به افزایش تنش مرتبط می‌کند و یک قانون سخت‌شوندگی<sup>۲۰۳</sup> که تغییرات تابع تسلیم در هنگام جریان خمیری را مشخص می‌کند. در رفتار

<sup>199</sup> confining pressure

<sup>200</sup> Prandtl-Reuss

<sup>201</sup> yield function

<sup>202</sup> flow rule

<sup>203</sup> hardening rule



خمیری وابسته<sup>۲۰۴</sup>، فرض می‌شود که قانون جریان بوسیله تابع تسلیم تعریف می‌گردد (مرجع [۴۱] مطالعه شود).

در مدل سازی خمیری مواد مشابه بتن، شرط مقاومت نهائی، یعنی شرط گسیختگی باید فرض گردد - که بیانگر حد بالا<sup>۲۰۵</sup> قابل دسترس برای تنش می‌باشد. برای بتن معمولاً از شرط تسلیم دراکر - پراگر<sup>۲۰۶</sup> استفاده میشود. یک قانون ساختاری خمیری<sup>۲۰۷</sup> برای بتن نیازمند بیان رفتار ایستاده، نه تنها در محدوده قبل از آسیب دیدگی (سخت شوندگی) بلکه در محدوده پس از آسیب دیدگی (نرم شوندگی) می‌باشد. در چارچوب فضای کرنش خمیری، رفتار نرم شوندگی کرنش می‌تواند بطور کلی توصیف گردد و همچنین تفکیک تغییر شکل‌های کشسان همراه با خمیری نیز می‌تواند بوسیله تئوری‌های آسیب دیدگی فرمول بندی شود (مرجع [۳۰] مطالعه شود). اگر کرنش‌ها بصورت متغیرهای مستقل استفاده شوند در اینصورت فرمول بندی روابط ساختاری خمیری، رفتار سخت شوندگی و نرم شوندگی می‌تواند به طور همزمان مدل گردد. اگر تنش‌ها بعنوان متغیرهای مستقل استفاده گردند در اینصورت نرم شوندگی بصورت سخت شوندگی منفی رفتار خواهد کرد.

#### ۴-۴- روشهای بر اساس مکانیک آسیب دیدگی<sup>۲۰۸</sup>

مکانیک آسیب دیدگی بر پایه مفاهیم تنش‌های موثر<sup>۲۰۹</sup> و کرنش‌های موثر<sup>۲۱۰</sup> در یک محیط پیوسته می‌باشد. تنش‌ها و کرنش‌های موثر، بوسیله تانسورهای با مقادیر مختلف تنش‌ها و کرنش‌های ظاهری<sup>۲۱۱</sup> یا اسمی<sup>۲۱۲</sup> بیان می‌شود. مقادیر اسمی و موثر در هر مرحله به کمک

---

<sup>204</sup> associated plasticity  
<sup>205</sup> upper bound  
<sup>206</sup> Drucker-Prager  
<sup>207</sup> plastic constitutive law  
<sup>208</sup> damage mechanics  
<sup>209</sup> effective stresses  
<sup>210</sup> effective strains  
<sup>211</sup> apparent  
<sup>212</sup> nominal

متغییرهای آسبیدیدگی

به یکدیگر مربوط می‌گردند. با پیشنهاد لِمیتِر<sup>۲۱۳</sup> (۱۹۹۲) [۴۳] متغییرهای آسبیدیدگی می‌توانند به صورت نسبتی از ناحیه آسبید دیده به ناحیه اولیه بدست آیند.

روابط بین کرنش‌ها و تنش‌های موثر و اسمی (یا ظاهری) می‌تواند با سه روش زیر بدست آید: روش تنش معادل<sup>۲۱۴</sup>، با فرض مساوی بودن کرنش‌های موثر و اسمی، اصل کرنش معادل<sup>۲۱۵</sup>، با فرض مساوی بودن تنش‌های اسمی و موثر (و اینکه هر معادله ساختاری کرنش برای یک ماده آسبید دیده می‌تواند به طریق مشابه برای یک ماده آسبید ندیده بدست آید بدین صورت که تنش معمولی با تنش موثر جایگزین شود)؛ و اصل تعادل انرژی<sup>۲۱۶</sup> که بیانگر مساوی بودن انرژی مکمل<sup>۲۱۷</sup> ماده آسبید دیده تحت تنش اسمی با انرژی مکمل ماده آسبید ندیده تحت تنش موثر می‌باشد. آخرین روش، معمولترین روش بکار رفته در کارهای تحقیقاتی می‌باشد (مرجع [۴۳] مطالعه شود).

یک روش کلاسیک برای فرمول بندی ریز مقیاس آسبیدیدگی<sup>۲۱۸</sup> در فضاهای دوبعدی و سه بعدی، فرض وجود دو تابع پتانسیل انرژی بنحوی می‌باشد که بتوان قوانین حالت<sup>۲۱۹</sup> و روابط ساختاری جنبشی<sup>۲۲۰</sup> را بدست آورد. حالت پتانسیل<sup>۲۲۱</sup> قوانین حالت و متغیرهای مربوطه (آسبیدیدگی، کرنش‌های خمیری و غیره) را در ارتباط با متغیرهای حالت تعریف می‌نماید. پتانسیل پراکندگی<sup>۲۲۲</sup>، مرتبط با متغیرهائی می‌باشد که برای قوانین جنبشی جهت ارزیابی متغیرهای پراکندگی شار<sup>۲۲۳</sup> حساب می‌شود.

<sup>213</sup> Lemaitre

<sup>214</sup> stress equivalence approach

<sup>215</sup> strain equivalence principle

<sup>216</sup> energy equivalence principle

<sup>217</sup> complementary energy

<sup>218</sup> micro-mechanics of damage

<sup>219</sup> state laws

<sup>220</sup> kinetic constitutive equations

<sup>221</sup> state potential

<sup>222</sup> potential of dissipation

<sup>223</sup> flux dissipative variables

در حالت آسیب‌دیدگی ساده همسان‌گرد، تانسور تاثیر آسیب‌دیدگی، یک ضرب عددی در تانسور واحد مرتبه چهار<sup>۲۲۴</sup> می‌باشد که این پارامتر آسیب‌دیدگی می‌تواند به آسانی با نتایج عملی شناسایی گردد. اما، برای مدل‌های با آسیب‌دیدگی ناهمسان‌گرد، تانسور مرتبه چهار آسیب‌دیدگی پیچیده‌تر بوده و ساخت آن نیازمند مهارت بیشتری می‌باشد.

#### ۴-۵- مدل‌های ترک‌گسسته<sup>۲۲۵</sup>

مدل ترک‌گسسته به وسیله محاسبه ناپیوستگی در سراسر ترک در چهارچوب تحلیل اجزاء محدود<sup>۲۲۶</sup> صورت می‌گیرد. اگر مقدار میانگین بزرگترین تنش اصلی در مزر مشترک بین دو جزء بیشتر از مقاومت کششی گردد، یک ترک بوسیله جدا شدن گره‌های مشترک دو جزء مدل می‌شود. متأسفانه، تنش‌های محاسبه شده صفحات کوچک ترک، وابسته به شبکه مش<sup>۲۲۷</sup> می‌باشد و هر چه اجزاء محدود کوچکتر باشد، تنش‌های کششی محاسبه شده از روش عددی در ناحیه ترک خورده بزرگتر می‌گردد. یک راه حل برای مقابله با این مشکل، فرمول بندی ارزیابی ترک بر مبنای انرژی آسیب‌دیدگی مخصوص<sup>۲۲۸</sup> می‌باشد که بعنوان یک فراسنج ماده در نظر گرفته شده و بصورت مقدار انرژی پراکنده شده در هنگام باز شدگی کامل ترک در سطح واحد تعریف می‌گردد. جدا شدن گره‌ها بوسیله معرفی گره‌های جدید از هنگامی که ترک خوردگی بتن شروع می‌شود

و یا بوسیله فراهم کردن گره‌های دوگانه<sup>۲۲۹</sup> - که به اجزاء پیوندی سخت<sup>۲۳۰</sup> متصل می‌شوند - همراه می‌گردد. در حالت ترک خوردگی، گره‌های دوگانه با کاهش مقاومت اجزاء پیوندی با افزایش عرض ترک جدا می‌شود.

---

<sup>224</sup> unit fourth order tensor  
<sup>225</sup> Discrete crack models  
<sup>226</sup> finite element analysis  
<sup>227</sup> mesh-dependent  
<sup>228</sup> specific fracture energy  
<sup>229</sup> double nodes  
<sup>230</sup> stiff linkage elements

روش گره‌های دو گانه، به علت محدودیت اعمالی در موقعیت و جهات ترک‌ها، معمولاً به پیش‌بینی عددی سخت‌تری برای پاسخ سازه منجر می‌گردد. بمنظور مقابله با این نقص، گره‌های اجزاء محدود مجاور یک ترک می‌تواند مجدداً تعیین مکان گردند، به نحوی که مرزهای عناصر<sup>۲۳۱</sup> منطبق با جهات ترک‌های محاسبه شده باشد. راه‌حل دیگر استفاده از اجزاء محدود بر پایه یک درونیابی منفصل<sup>۲۳۲</sup> از تنش‌ها و تغییرمکانها با اجتناب از معرفی گره‌های جدید و تعریف مجدد شبکه مش می‌باشد. اما درونیابی‌های منفصل نیازمند تعریف درجات آزادی<sup>۲۳۳</sup> اضافی برای ارائه لغزش موازی ترک و تغییرات عمق ترک می‌باشد.

عیب عمده مدل ترک‌منفصل، محاسبات بسیار زیاد مورد نیاز در آن می‌باشد. بنابراین، این مدل تنها در مطالعات مسائلی مناسب است که در آنها تعداد ترک‌خوردگیهای عمده کم می‌باشد (مراجع [۴۴،۴۵] مطالعه شود).

#### ۴-۶- مدل‌های آغشته به ترک<sup>۲۳۴</sup>

این مدل‌ها بر پایه این فرض هستند که ترک‌ها در ناحیه تحت بررسی بصورت آغشته می‌باشند. پیوستگی تغییرمکان برای حجم ماده ترک‌خورده در نظر گرفته می‌شود. این فرضیه با ناپیوستگی تغییرمکان‌ها در نواحی ترک خورده مغایرت داشته و ممکن است منجر به قفل شدگی تنش<sup>۲۳۵</sup> گردد (یعنی تخمین دست بالای سختی و بار نهائی). الزام پیوستگی تغییر مکانها برای بتن ترک خورده منجر به انتقال کرنش‌های نسبتاً بزرگی به اجزاء مجاور می‌گردد - که غیرسازگار

\_\_\_\_\_ک \_\_\_\_\_رنش‌های

<sup>231</sup> boundaries of the elements  
<sup>232</sup> discontinuous interpolation  
<sup>233</sup> degrees of freedom  
<sup>234</sup> Smearred crack models  
<sup>235</sup> stress-locking

مشاهده شده در محل مورد نظر می‌باشد. مدل‌های ترک آغشته امکان توصیف دقیق رفتار ماده را در مجاورت ترک‌ها فراهم نمی‌آورند، اما برای پیش‌بینی رفتار کلی سازه مناسب هستند. برای بررسی مفصل و ارزیابی اصول اولیه، مراجع [۴۶، ۴۷، ۴۸] مطالعه شود.

اکثر مدل‌های آغشته به ترک بر مبنای تئوری کشسانی بوده و بتن یک ماده ارتوتروپیک<sup>۲۳۶</sup> با مقاومت کاهش یافته (یا صفر) عمود بر جهت ترک خوردگی فرض می‌گردد. این جهت، عمود بر جهت تنش اصلی حداکثر کششی در هر مرحله بارگذاری فرض می‌شود.

#### ۴-۶-۱- مدل‌های ترک متعامد ثابت<sup>۲۳۷</sup>

عبارت ترک ثابت بیانگر این فرض است که جهات ترک در طول مراحل بارگذاری تغییر نمی‌کند و نسبت به محورهای ماده ثابت می‌باشد. این مدل‌ها، تنها توسعه ترک‌های اضافی عمود بر ترک‌های موجود قبلی را مجاز می‌دانند. بنابراین، تنها دو یا سه ترک بترتیب در حالت‌های دو بعدی یا سه بعدی امکان پذیر می‌باشد.

#### ۴-۶-۲- مدل‌های ترک غیرمتعامد ثابت<sup>۲۳۸</sup>

فرض ترک‌های متعامد با در نظر گرفتن تنش‌های برشی در صفحات ترک‌خورده سازگار نمی‌باشد. تنش‌های برشی در امتداد ترک، در فرآیند بارگذاری، با چرخش محورهای اصلی تنش نسبت به محورهای اصلی ارتوتروپی ماده ایجاد می‌گردد. این ناسازگاری مکانیکی مدل‌های ترک متعامد، همراه با مشاهدات تجربی، منجر به توسعه مدل‌های ترک خوردگی غیرمتعامد ثابت می‌گردد. این مدل‌ها امکان ایجاد تعداد زیادتری از ترک در یک نقطه در جهات مختلف را فراهم

---

<sup>236</sup> orthotropic

<sup>237</sup> Fixed orthogonal crack models

<sup>238</sup> Fixed non-orthogonal crack models

می‌آورد که الزاماً عمود بر ترک‌های موجود قبلی نیستند. در این مدلها، اطلاعات تمامی ترکها در یک نقطه انتگرال گیری باید ذخیره شود. بعلاوه، توسعه ترک‌های جدید خیلی اوقات توام با بسته شدن ترک‌های موجود قبلی بوده که باید به نحو مناسبی در نظر گرفته شود.

#### ۴-۶-۳- مدل‌های ترک چرخشی<sup>۲۳۹</sup>

مدل‌های ترک چرخشی بر این پایه می‌باشند که هنگام شکل گرفتن یک ترک در زاویه‌ای دیگر، ترک‌های موجود تمایل به بسته شدن دارند. در نتیجه تنها آخرین ترک را در نظر می‌گیرند که جهت آن عمود بر جهت محور اصلی تنش (در آن لحظه) می‌باشد. بنابراین، جهات ترک‌ها، همراه با جهات تنش‌های اصلی کششی دوران کرده و در نتیجه، تنش‌های برشی روی صفحات ترک موجود نمی‌باشد.

#### ۴-۷- مدل ریزصفحه‌ای<sup>۲۴۰</sup> بآزنت

پیشینه موضوعی روش صفحات ریز مقیاس (ریز صفحات) که در مرجع [۴۹] به تفصیل بدان اشاره می‌شود، به ایده ابتکاری دانشمند بزرگ آقای G. I. Taylor به سال ۱۹۳۸ بازمی‌گردد، زمانیکه ایشان مشغول مطالعه رفتار خمیری فلزات کریستالی بود [۵۰]. او برای اولین بار رفتار

---

<sup>239</sup> Rotating crack models

<sup>240</sup> microplane model

ساختاری فلزات کریستالی را با تعریف ارتباط میان بردارهای تنش و کرنش روی صفحات با جهات گوناگون و سپس دستیابی به تانسورهای تنش و کرنش از طریق برآیندگیری میان بردارهای یاد شده تحت قید استاتیکی<sup>۲۴۱</sup> بدست آورد. ایده تیلور حدود ده سال بعد یعنی سال ۱۹۴۹ میلادی توسط آقایان Batdorf و Budiansky با جزئیات بیشتری روابط شد و تحت نام " نظریه خمیری برشی"<sup>۲۴۲</sup> مشهور گشت [۵۱]. بعد از گذشت مدت کوتاهی این نظریه به عنوان ابزار قدرتمندی جهت مدلسازی رفتار فلزات خمیری - سخت شونده شناخته شد. نظریه خمیری برشی در خلال تحقیقات دانشمندانی چون Lin و Ito (۱۹۶۵ و ۱۹۶۶)، Kroner (۱۹۶۱) [۵۲]، Budiansky و Wu (۱۹۶۲)، Hill (۱۹۶۵ و ۱۹۶۶)، Rice (۱۹۷۰) اصلاح گردید [۵۳]. در تمام کارهای انجام شده فرض بر این بود که روی صفحات ریزمقیاس فقط کرنشهای غیرخطی برشی روی می دهد و از کرنشهای غیرخطی عمود بر صفحات خبری نیست. بعدها این نظریه طی انجام اصلاحاتی تحت عنوان روش " چند صفحه ای " توسط محققینی همچون Zienkiewicz و Pande (۱۹۷۷) [۵۴]، [ Pande و Sharma (۱۹۸۳) [۵۵] جهت شبیه سازی رفتار سنگهای ناهمسان و نیز توسط صدرنژاد و Pande [۵۶] جهت شبیه سازی رفتار ماسه ناهمسان مورد استفاده قرار گرفت.

در همه مدل‌های رفتاری فوق، چنین فرض شده است که صفحاتی که لغزش برشی خمیری روی آنها اتفاق می افتد و در مدل‌های یاد شده " صفحات لغزش"<sup>۲۴۳</sup> نامیده شده و اکنون در مطالعه ما " صفحات ریزمقیاس" خوانده می شوند در اصطلاح علمی به شکل استاتیکی به هم وابسته هستند به عبارت دیگر بردار تنش روی صفحات ریزمقیاس تصویر تانسور تنش در مقیاس ماکروسکوپی هستند. همچنین در مدل‌های فوق الذکر، کرنشهای خطی در مقیاس میکروسکوپی ( ریز مقیاس ) روی صفحات در محاسبات وارد نشده و به شکل جداگانه در مقیاس ماکروسکوپی ( درشت مقیاس ) به تانسور کرنشهای غیر خطی اضافه می شوند. شبیه سازی رفتار نرم شوندگی

---

<sup>2</sup> Static Constraint

<sup>3</sup> Slip Theory of Plasticity

<sup>4</sup> Slip Planes

کرنش<sup>۲۴۴</sup> در مطالعات یاد شده در بالا مد نظر نبوده است گو اینکه در صورت توجه هم، این رفتار بوسیله مدل‌های ذکر شده قابل شبیه سازی نبوده است. چرا که وابستگی استاتیکی در نظر گرفته شده در مدل‌های فوق سبب می شود تا در صورت تعریف رفتار نرم شوندگی کرنش روی صفحات ریزمقیاس رفتار ماده در مقیاس ماکروسکوپی ناپایدار گردد حتی اگر تانسور کرنش از پیش تعیین شده باشد.

در ادامه مدل‌های دیگری عمدتاً توسط Bazant در جهت تکمیل و برطرف کردن مشکلات این مدل ارائه گشتند که شرح آنها در مراجع ذکر شده در مقدمه قابل دسترس می باشند. در مطالعه حاضر از مدل پیشنهادی آقایان لیبب زاده و صدرنژاد که ترکیبی از مدل ریزصفحه بازنت و تئوری آسیب می باشد جهت پیشبینی رفتار بتن استفاده گردیده که به تفصیل مورد بررسی قرار می گیرد.

مدل ریزصفحه‌ای و روش ریز مقیاس چند صفحه‌ای دارای ایده اصلی یکسان برای فرمول بندی قوانین ساختاری تانسوری بوسیله تجزیه محیط پیوسته به تعداد محدودی از صفحات، توزیع شده بصورت یکنواخت در جهات مختلف در داخل ماده، می‌باشد. قوانین ساختاری تانسوری کلاسیک در هر دو روش مستقیماً از مولفه‌های تانسور تنش و کرنش بدست نمی‌آید، بلکه بوسیله تجزیه در حالتی که قانون ساختاری برای یک جز محیط پیوسته<sup>۲۴۵</sup> اعمال می‌گردد، محاسبه می‌شود. در هر دو شیوه قید جنبشی فرض شده است، یعنی کرنش‌های قائم و برشی از مولفه‌های تانسور کرنش  
بدست می‌آیند. بنابراین در این حالت پایداری رفتار نرم شوندگی کرنش پس از حداکثر تنش، تضمین می‌گردد. برای این منظور، توصیف روش ریزصفحه‌ای، در ادامه با جزئیات بیشتر بیان می‌گردد.

---

<sup>1</sup>Strain Softening  
<sup>245</sup> sub-continuum



#### ۴-۷-۱- اصول اولیه مدل ریزمقیاس

در این قسمت مدل‌های کلی چند صفحه‌ای برای مواد ناهمگن شکننده-خمیری<sup>۲۴۶</sup> مانند بتن - که مبین پاسخ سه بعدی در فشار، کشش و برش می‌باشد- توصیف شده است. خواص ساختاری بصورت جداگانه روی صفحات با جهات متعدد در داخل ماده -که ریز صفحات نامیده می‌شود- مشخص شده است، بطوریکه تنها تعداد کمی از مؤلفه‌های تنش و کرنش موجود بوده و نیاز به بررسی روابط تانسوری کلاسیک نمی‌باشد و این روابط بصورت خودکار، با انتگرال گیری روی تمام جهات در فضا، ارضاء می‌گردد. حالت هر یک از ریز صفحات با کرنشهای نرمال انحرافی و حجمی و همچنین کرنش برشی مشخص می‌گردد که این امر باعث دستیابی به هر ضریب پواسون<sup>۲۴۷</sup>، در محدوده مجاز شده و فرض می‌شود که کرنش‌های هر ریز صفحه، تجزیه تانسورکرنش درشت مقیاس روی همان ریز صفحه می‌باشد. فرض اصلی آن است که در مقیاس ریز، منحنیهای تنش-کرنش برای بارگذاری یکنواخت وابسته به مسیر<sup>۲۴۸</sup> نبوده و تمام وابسته به مسیر بودن رفتار درشت مقیاس ماده به علت باربرداری می‌باشد -که روی برخی از صفحات در جهات مشخصی به وقوع می‌پیوندد. فرض می‌شود پاسخ هر ریز صفحه به کرنش‌های قائم جانبی وابسته است. در نتیجه تانسور ضرایب کشسان افزایشی<sup>۲۴۹</sup>، نامتقارن بوده که برای مدل‌سازی اصطاک و اتساع<sup>۲۵۰</sup> لازم می‌باشد. این تانسور همچنین در حالت کلی دارای اجزاء غیرصفر می‌باشد (یعنی هیچکدام از اجزاء را نمی‌توان به صورت پیش‌فرض صفر در نظر گرفت). این مدلها شامل تعداد کمی از فراسنجهای ماده نسبت به مدل‌های ساختاری درشت مقیاس، برای شناسائی رفتار بتن، می‌باشد.

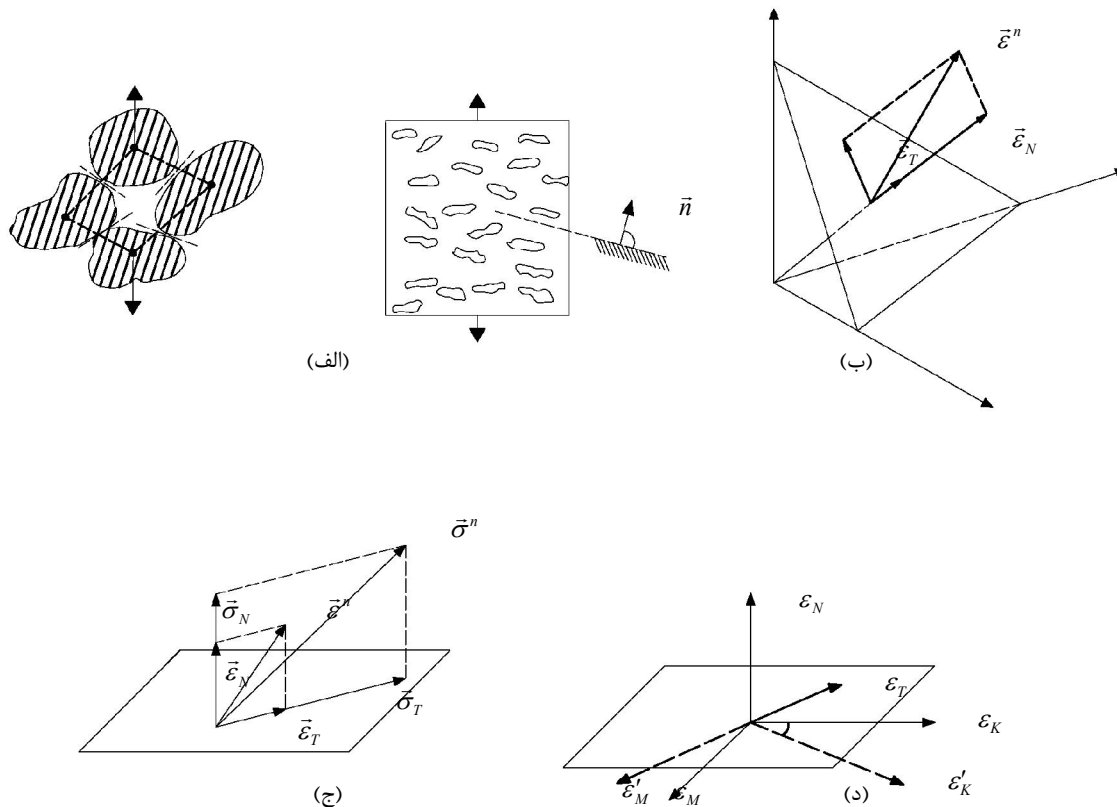
<sup>246</sup> brittle-plastic

<sup>247</sup> Poisson ratio

<sup>248</sup> path dependence

<sup>249</sup> incremental elastic moduli tensor

<sup>250</sup> dilatancy



شکل ۴-۱: (الف) ریزساختار فرضی؛ (ب) مؤلفه‌های کرنش روی ریز صفحه؛ (ج) تنش و کرنش روی ریز صفحه؛ (د) کرنش‌های جانبی

#### ۴-۷-۲- توصیف تئوری مدل

در یک نقطه داخل ماده، هر صفحه از مدل چند صفحه‌ای در مقیاس ریز بوسیله ریزصفحات گذرنده از نقطه مورد نظر، با مؤلفه‌های بردارهای یکه آنها  $n_i$  تعریف می‌گردد. سریع‌ترین و آسان‌ترین تفسیر فیزیکی یک صفحه از مشاهده ساختار ماده در مقیاس ریز، بعنوان فصل مشترک یا ناپیوستگی صفحات بین دانه‌ها یا نواحی دیگر در محیط‌های غیرهمگن، حاصل می‌گردد. در یک ریزصفحه کلی، مؤلفه‌های بخصوصی از تنش‌ها و کرنش‌ها در نظر گرفته می‌شود که تنش‌ها و کرنش‌های قائم و برشی در آن صفحه می‌باشد. یکسری از قوانین تنش-کرنش بعنوان

روابط بین تنش‌ها و کرنش‌ها در مقیاس ریز تعریف می‌گردد. این روابط به همراه روابط بین تنش‌های مقیاس ریز و درشت و همچنین بین کرنش‌های مقیاس ریز و درشت، مدل رفتاری ماده مورد نظر را تشکیل می‌دهد.

#### ۴-۷-۳ - سیستم چند صفحه‌ای با قید جنبشی

در مدل‌های اولیه چند صفحه‌ای برای فلزات و خاکها، قید استاتیکی (یعنی تنش‌های ریز صفحات مساوی با تصاویر مولفه‌های تانسور تنش بر آن صفحه باشد) بعنوان رابطه اصلی بین مقیاس درشت و ریز فرض شده است. اما برای ارائه رفتار مواد شبه شکننده مانند بتن یا صخره - که رفتار نرم شوندگی کرنش از خود نشان می‌دهند- در نظر گرفتن قید جنبشی (یعنی کرنش‌های ریز صفحات مساوی با تصاویر مولفه‌های تانسور کرنش بر آن صفحه باشد) ضروری می‌باشد (فصل سه). همانطور که در فصل شش نشان داده می‌شود، این فرضیه در روش بکار رفته برای محاسبات عددی بسـ

مناسب بوده و همچنین منجر به محاسبات کاملاً صریح می‌گردد.

چهارچوب تئوری مدل چند صفحه‌ای جدید بر مبنای سه فرضیه زیر، مشابه با فرضیات استفاده شده در فصل سه (با مقداری تغییر) می‌باشد - که روی فرمول‌های نهایی و همچنین کاربرد عددی تاثیر می‌گذارد.

فرض یک:

کرنش‌های قائم و برشی (مماسی)  $\varepsilon_N$  و  $\varepsilon_{T_i}$  روی یک ریز صفحه با بردار قائم واحد  $n_i$ ، از تجزیه مؤلفه‌های تانسور کرنش درشت مقیاس  $\varepsilon_{ij}$  روی آن صفحه بدست می‌آید، یعنی:

$$\varepsilon_N = \varepsilon_{ij} n_i n_j \quad (1-4)$$

$$\varepsilon_{T_i} = \varepsilon_{ij} n_j - \varepsilon_N n_i = (\delta_{ij} - n_i n_j) n_k \varepsilon_{jk} \quad (۲-۴)$$

بعلاوه، کرنش قائم به دو قسمت تقسیم می‌گردد، کرنش حجمی  $\varepsilon_V$  و کرنش انحرافی (قائم)  $\varepsilon_D$ ، و عبارات موردنظر بصورت زیر می‌باشد:

$$\varepsilon_V = \varepsilon_{kk} / 3 \quad (۳-۴)$$

$$\varepsilon_D = \varepsilon_N - \varepsilon_V \quad (۴-۴)$$

در روابط فوق، زیرنویس‌های با حروف کوچک لاتین به جهات دستگاه مختصات کارتزین  $x_i (i=1,2,3)$  اشاره کرده و تکرار زیرنویس‌ها به معنای جمع می‌باشد.

توجه شود که کرنش برشی یک بردار است که دارای سه مولفه در فضا می‌باشد، اما جهت آن همواره بر روی صفحه با بردار قائم  $n_i$  قرار دارد (می‌توان  $\varepsilon_{T_i} n_i = 0$  را با معادله ۲-۴ به سادگی کنترل کرد). همچنین کرنشهای قائم، بردارهایی با سه مولفه در دستگاه مختصات کارتزین، درجهت بردار واحد قائم  $n_i$  می‌باشد، بنابراین تنها از اندازه‌های  $\varepsilon_V$ ،  $\varepsilon_N$  و  $\varepsilon_D$  استفاده می‌شود. تفسیر دیگری از متغیرهای  $\varepsilon_V$ ،  $\varepsilon_D$  و  $\varepsilon_{T_r}$  را می‌توان با استخراج اجزاء حجمی  $\varepsilon_V$  و انحرافی

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_V \delta_{ij}$$

از کرنش درشت مقیاس بجای استفاده مستقیم از تانسور  $\varepsilon_{ij}$  بدست آورد. بنابراین، کرنش حجمی در مقیاس ریز  $\varepsilon_V$  - که برای تمام ریز صفحات یکسان می‌باشد - دقیقاً مساوی با کرنش حجمی درشت مقیاس است. کرنش قائم انحرافی  $\varepsilon_D$  و کرنش مماسی  $\varepsilon_{T_r}$  - که برای هر ریز صفحه متفاوت می‌باشد - مساوی با مؤلفه‌های قائم و مماسی تصویر تانسور کرنش انحرافی  $e_{ij}$ ، روی صفحه مورد نظر در نظر گرفته می‌شود.

فرض دو:

مرتبط با سه کرنش  $\varepsilon_V$ ،  $\varepsilon_D$  و  $\varepsilon_T$ ، سه تنش متناظر  $\sigma_V$ ،  $\sigma_D$  و  $\sigma_T$  بنحوی می‌باشند که حاصل ضرب متناظر هر یک از آنها، مستقیماً کار انجام شده روی هر ریزصفحه را خواهد داد. قوانین تنش-کرنش در این مقیاس، یک سری روابط تجربی هستند که توسعه هریک از این سه تنش را منحصراً بصورت توابعی از سه کرنش ریز صفحه (و همچنین تاریخچه کرنش) مشخص خواهند کرد.

این حقیقت که مقادیر  $\sigma_V$ ،  $\sigma_D$  و  $\sigma_T$  منحصراً توابعی از کرنش‌ها می‌باشند، تفاوت مهمی با نسخه‌های قدیمی از این نوع مدل‌سازی را فراهم می‌آورد (فصل سوم). این فرضیه باعث می‌شود که مدل مورد نظر بصورت کاملاً جنبشی مقید شود. بنابراین، وابستگی‌های دیگر مانند وابستگی  $\sigma_T$  به یک نامتغییر از تانسور تنش درشت‌مقیاس که در کارهای قبلی فرض شده بود در این حالت، از فرمول‌ها خارج می‌گردد (در حقیقت، نسخه‌های قدیمی یک قید مرکب استاتیکی-جنبشی برای مدل فراهم می‌کردند).

فرض سه:

روابط بین تنش‌های ریزصفحه  $\sigma_V$ ،  $\sigma_D$  و  $\sigma_T$  با تانسور تنش درشت مقیاس  $\sigma_{ij}$ ، با کاربرد اصل کار مجازی بدست خواهد آمد. جزئیات این کاربرد برای مدل موردنظر، در پیوست ۱- الف بیان شده که ملاحظات بخصوصی در مورد ملزومات تقارن تانسورهای  $\sigma_{ij}$  و  $\varepsilon_{ij}$  که برای قابلیت تعویض‌پذیری اندیس‌های  $i$  و  $j$  در عبارتهای نهائی ضروری می‌باشد، را بیان می‌کند (ملاحظات در نظر گرفته شده برای تقارن در این زمینه، روشی دیگر نسبت به استفاده معادله متقارن در کارهای گذشته می‌باشد که منجر به نتیجه یکسان می‌گردد). بنابراین رابطه تنش درشت مقیاس بصورت زیر می‌باشد:

(۵-۴)

$$\sigma_{ij} = \sigma_V \delta_{ij} + \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \sigma_D n_i n_j d\Omega + \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \frac{\sigma_{Tr}}{2} (n_i \delta_{rj} + n_j \delta_{ri} - 2n_i n_j n_r) d\Omega$$

که در آن ناحیه انتگرالی با سطح بالایی نیمکره  $\Omega$  مشخص شده و  $\delta_{ij}$ ، دلتا کرونیکر<sup>۲۵۱</sup> می‌باشد.

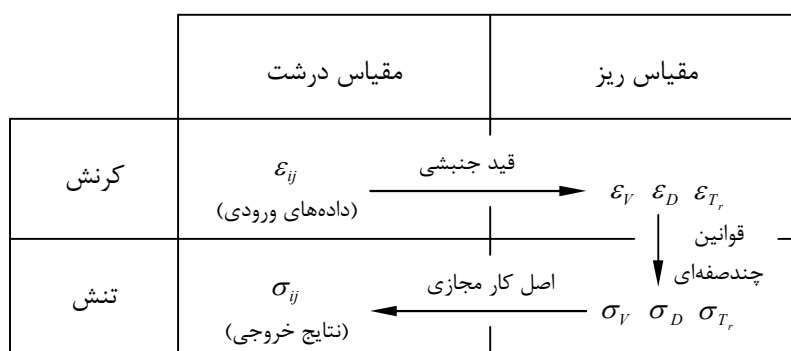
یک ویژگی مهم و جدید معادله ۵-۴ این است که معادله مذکور بصورت اجزاء با مقادیر کل تنش، بجای حالت افزایشی دیفرانسیلی، نوشته شده است. همچنین این معادله در صورتیکه تمام متغیرهای تنش با افزایشهای دیفرانسیلی خود جایگزین گردند نیز معتبر است - که این حالت در فرمول بندی اصلی ارائه شده. اما اگر این معادله بصورت اجزاء با مقادیر کل نوشته شود، در اینصورت مقادیر کل تانسور تنش درشت مقیاس  $\sigma_{ij}$  را می‌توان در هر لحظه در فرآیند بارگذاری، از مقادیر کل تنش‌های ریز مقیاس  $\sigma_V$ ،  $\sigma_D$  و  $\sigma_{Tr}$  با کاربرد معادله ۴-۵ بدست آورد - که این ویژگی مطلوب در معادلات از نوع افزایشی وجود ندارد.

ویژگی دیگر معادله ۴-۵ آن است که تصویری شفاف از تاثیر هر یک از تنش‌های ریز صفحه  $(\sigma_V$ ،  $\sigma_D$  و  $\sigma_{Tr})$  بر روی تانسور تنش درشت مقیاس  $\sigma_{ij}$  ارائه می‌کند. از معادله مذکور، تاثیر حجمی عبارت  $\sigma_V$  بر  $\sigma_{ij}$  و همچنین تاثیر انحرافی خالص عبارت  $\sigma_{Tr}$  روی تانسور تنش درشت مقیاس معلوم می‌شود (که این امر با توجه به صفر شدن این عبارت در صورت  $i=j$ ، مشخص می‌گردد). عبارت  $\sigma_D$  تنها عبارتی است که بر روی تانسور تنش درشت مقیاس، هر دو تاثیر حجمی و انحرافی را خواهد داشت. در نتیجه، این عبارت دلیل ادغام ذاتی مدل می‌باشد - که بین رفتارهای حجمی و انحرافی برقرار می‌گردد.

با سه فرضیه ارائه شده و تعریف مشخص روابط بین تنش‌ها و کرنش‌ها، مطابق با فرضیه دو، چهارچوب اصلی مدل کامل گردیده و مدل مورد نظر برای محاسبه تنش‌های درشت مقیاس

<sup>251</sup> Kronecker delta

با افزایش مقادیر کرنش‌های درشت مقیاس (به طرح مشخص شده در شکل ۴-۲ مراجعه شود) آماده می‌باشد. افزایش کرنش‌های هر ریز صفحه با استفاده از معادلات ۴-۱ تا ۴-۴ بدست آمده، سپس تنش‌های هر ریز صفحه با استفاده از قوانین تعریف شده در مقیاس ریز محاسبه می‌گردند و در نهایت مقادیر جدید تانسور تنش درشت مقیاس بوسیله انتگرالگیری از تنش‌های ریز صفحات مطابق با معادله ۴-۵ بدست می‌آید.



شکل ۴-۲ - طرح اصلی برای محاسبه تنش‌های درشت مقیاس از کرنش‌های درشت مقیاس

در برخی مسائل محاسبه تانسور سختی مماسی درشت مقیاس  $D_{ijkl}$ ، متناظر با افزایش‌های تنش و کرنش درشت مقیاس، ضروری می‌باشد که در عمل این تانسور برای بدست آوردن تانسور سختی مماسی سازه مورد نیاز است. عبارتهای تانسور  $D_{ijkl}$  را می‌توان به آسانی از اجزاء افزایشی معادله ۴-۵ بوسیله جایگزینی تنش‌های هر ریز صفحه با عبارتهای کرنش‌های همان ریزصفحه و همچنین جایگزینی کرنش‌های ریز صفحات، با عبارتهای کرنش‌های درشت مقیاس، بدست آورد.

#### ۴-۸- نظریه آسیب پیوسته<sup>۲۵۲</sup>:

نظریه آسیب پیوسته، یک نظریه ساختاری است که جهت توصیف زوال مقاومتی مصالح در نتیجه پیدایش، رشد و انتشار ترکها در مقیاس ریز به کار می رود. در حقیقت در نتیجه انتشار ترکها در مقیاس ذره بینی، سختی<sup>۲۵۳</sup> و مقاومت<sup>۲۵۴</sup> مصالح در مقیاس درشت (مهندسی) دچار نقصان می شود. این نظریه نخستین بار توسط آقای Kachanov در مورد پدیده خزش به کار گرفته شد [۵۸ و ۵۷].

مدلهای آسیب مجهز به متغیرهای درونی<sup>۲۵۵</sup> هستند که چگالی و جهت ترکها را کنترل می کنند. ساده ترین نوع مدل‌های آسیب، مدل آسیب همسانگرد<sup>۲۵۶</sup> است که در آن تانسور سختی آسیب دیده مساوی حاصلضرب عدد اسکالر در تانسور سختی ارتجاعی اولیه است. یک مدل آسیب همسانگرد معمولی حداقل باید دارای دو متغیر اسکالر مطابق با دو ثابت مستقل موجود در ماتریس رفتاری ارتجاعی مصالح باشد (ضریب الاستیسیته و ضریب پواسون). سادگی این مدل از نقاط قوت آن است. مدل‌های آسیب ناهمسانگرد برای نمایش متغیر آسیب از خانواده بردارها [۵۹] یا تانسورهای مرتبه دو [۶۰] و یا تانسورهای مرتبه چهارم استفاده می کنند. حتی گاهی در بعضی مدلها از تانسور مرتبه هشتم هم استفاده شده است.

---

<sup>1</sup> Continuum Damage Theory

<sup>2</sup> Stiffness

<sup>3</sup> Strength

<sup>4</sup> Internal Variables

<sup>5</sup> Isotropic Damage Model



در تقسیم بندی دیگری مدل‌های مبتنی بر نظریه آسیب به دو دسته موضعی<sup>۲۵۷</sup> و غیر موضعی<sup>۲۵۸</sup> گروه بندی می شوند. دلیل این تقسیم بندی مشاهده پدیده تمرکز کرنش<sup>۲۵۹</sup> در سازه ها تحت بارهای وارده می باشد. بسیاری از سازه ها وقتی تحت تأثیر بارهای شدید قرار می گیرند، توزیع یکنواخت اولیه کرنشها در آنها به هم خورده و کرنشها در نواحی خاصی متمرکز می شوند. به بیان دیگر رشد کرنشها در منطقه کوچکی از سازه صورت می گیرد در حالیکه نواحی اعظم باقیمانده جسم در حال باربرداری است. این تمرکز کرنش به دو دلیل ممکن است پدیدار شود: هندسه جسم مانند باریک شدن میله فلزی تحت کشش و یا ناپایداری جنس مصالح مانند رشد ترکها، لغزش اصطکاکی و یا جریان خمیری غیر همراه.

مدل‌های آسیب موضعی استاندارد توانایی توصیف پدیده تمرکز کرنش را به شکل ذاتی ندارند. برای حل این مسئله از مدل‌های آسیب غیر موضعی استفاده می شود که در آنها تنش در هر نقطه نه تنها به تاریخچه کرنش در همان نقطه بستگی دارد بلکه به تاریخچه کرنش در همسایگی آن نقطه هم بستگی دارد. در ادامه این بخش جهت آشنایی بیشتر با مفهوم نظریه آسیب و در عین حال جلوگیری از غامض شدن مطلب، اشاره ای کوتاه به مدل‌های موضعی و غیر موضعی در مبحث نظریه آسیب همسانگرد پیوسته می کنیم.

#### ۴-۸-۱- مدل‌های آسیب همسانگرد موضعی<sup>۲۶۰</sup>

مدل‌های آسیب همسانگرد بر این فرض ساده کننده استوار هستند که روند زوال سختی یا مقاومت جسم در تمامی جهات صرفنظر از جهت اعمال بار وارده یکسان است. از آنجا که رفتار یک جسم همسانگرد ارتجاعی با دو ثابت ارتجاعی مستقل از هم مشخص می شود، لذا هر مدل آسیب

<sup>6</sup>Local Damage Theory

<sup>7</sup>Non-local Damage Theory

<sup>8</sup> Strain localization

<sup>1</sup> Local Isotropic Damage Model

همسانگرد حداقل دارای دو متغیر یا متغیر آسیب می باشد. مدل‌های ساده تر آسیب همسانگرد که فقط از یک متغیر درونی آسیب استفاده می کنند بر این فرض استوار هستند که ضریب پواسون از مفهوم آسیب تعریف شده در نظریه آسیب در امان هستند. به عبارت دیگر حرکت‌های جانبی جسم ما تحت تأثیر رشد و انتشار ترکها قرار نمی گیرند. در این مدلها رابطه ساختاری تنش و کرنش به صورت زیر نوشته می شوند:

$$\sigma = (1 - \omega) D_e \varepsilon, \omega = g(\kappa) \quad (۴-۶)$$

$\sigma$  بردار تنش،  $\varepsilon$  بردار کرنش،  $D_e$  ماتریس رفتار ارتجاعی و  $\omega$  متغیر آسیب می باشد. تغییرات متغیر آسیب  $\omega$  در ضمن رشد و انتشار ترکها بین صفر تا حداکثر مقدار واحد باید بوسیله یک رابطه مناسب بیان شود. معمولترین نوع رابطه، رابطه ای است که تابع آسیب  $\omega$  را به شکل مستقیم بر اساس متغیر سطح کرنش موجود در جسم تعریف نماید. از آنجا که در حالت سه بعدی کرنش تانسوری از مرتبه دوم است لذا باید معیاری عددی از اندازه یا سطح کرنش موجود داشته باشیم که آن را کرنش معادل<sup>۲۶۱</sup> ( $\tilde{\varepsilon}$ ) می نامیم. علاوه بر تعریف کرنش معادل، جهت کنترل رفتار جسم تحت باربرداری و بارگذاری مجدد نیاز به تعریف متغیر دیگری است که بر اساس کرنش معادل تعریف می شود و اساساً برابر با حداکثر کرنش معادل در طول زمان از ابتدای بارگذاری تا لحظه مورد نظر است و  $\kappa$  نامیده می شود. در واقع با این تعریف در طول مدت بارگذاری یک سویه مقدار  $\kappa$  برابر با مقدار  $\tilde{\varepsilon}$  است اما در خلال باربرداری مقدار  $\tilde{\varepsilon}$  کاهش می یابد در حالیکه  $\kappa$  ثابت می ماند. نوع تعریف ما برای کرنش معادل  $\tilde{\varepsilon}$  به شکل مستقیم روی شکل ناحیه حدی ارتجاعی در فضای سه بعدی کرنش تأثیر گذار است. به عنوان مثال می توان کرنش معادل را بصورت زیر و بر اساس نرم انرژی تعریف نمود:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{\varepsilon^T D_e \varepsilon}{E}} \quad (۴-۷)$$

<sup>1</sup>Equivalent Strain

در اینصورت شکل ناحیه حدی ارتجاعی بصورت یک بیضیگون در می آید که نسبت به مبدأ فضای سه بعدی کرنش متقارن است و در این حالت رشد متغیرآسیب تحت دو حالت بارگذاری کششی و فشاری یکسان است. برای مواد شبه ترد نظیر بتن روند رشد متغیرآسیب تحت بارهای کششی بسیار سریعتر از حالت بارهای فشاری است، لذا برای دخالت دادن این مسئله در شبیه سازی رفتار بتن آقای Mazars [۶۱]، پیشنهاد نمود تا کرنش معادل به صورت زیر تعریف شود:

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\sum_{I=1}^3 \langle \varepsilon_I \rangle^2} \quad (۸-۴)$$

که در آن  $\varepsilon_I, I=1,2,3$  کرنشهای اصلی بوده و علامت براکت  $\langle \cdot \rangle$  معرف عملگر مثبت است به نحوی که طبق آن داریم  $\langle x \rangle = \max(0, x)$  یعنی  $\langle x \rangle = x$  در صورتی که  $x$  مثبت باشد و  $\langle x \rangle = 0$

در صورتی که  $x$  منفی باشد. از جمله توابع آسیبی که در مقالات علمی استفاده شده می توان به موارد زیر اشاره نمود:

(۹-۴)

$$g(k) = \begin{cases} 0 & \text{if } k \leq \varepsilon_0 \\ \frac{\varepsilon_f}{\varepsilon_f - \varepsilon_0} \left( 1 - \frac{\varepsilon_0}{k} \right) & \text{if } \varepsilon_0 \leq k \leq \varepsilon_f \\ 1 & \text{if } \varepsilon_f \leq k \end{cases}$$

در رابطه بالا ،  $\varepsilon_0$  مقدار کرنش معادل در نقطه اوج مقاومت کششی است و  $\varepsilon_f$  پارامتری برای کنترل نمودن شیب شاخه نرم شوندگی کرنش در نمودار تنش - کرنش می باشد .

$$g(k) = \begin{cases} 0 & \text{if } k \leq \varepsilon_0 \\ 1 - \frac{\varepsilon_0}{k} \exp\left(-\frac{k - \varepsilon_0}{\varepsilon_f - \varepsilon_0}\right) & \text{if } \varepsilon_0 \leq k \leq \varepsilon_f \end{cases} \quad (10-4)$$

#### ۴-۸-۲- مدل‌های آسیب همسانگرد غیر موضعی<sup>۲۶۲</sup> [۳۱۳۰ و ۳۹]

به طور کلی در روش غیر موضعی ، یک متغیر معین موضعی با مقدار نظیر غیر موضعی خود که از طریق میانگین گیری وزنی مکانی آن متغیر موضعی در همسایگی آن بدست می آید جایگزین می‌شود . به طور مثال اگر  $f(x)$  یک تابع موضعی در دامنه  $V$  باشد ، تابع نظیر غیر موضعی آن به صورت زیر تعریف می شود :

$$\bar{f}(x) = \int_V \alpha(x, \xi) f(\xi) d\xi \quad (11-4)$$

که در آن  $\alpha(x, \xi)$  یک تابع وزنی غیر موضعی نامیده می شود . در یک جسم نامحدود ، این تابع وزنی بستگی به فاصله مکانی نقطه مبدأ یعنی  $\xi$  از نقطه مقصد یعنی  $x$  دارد . لذا با توجه به تعریف فوق ، در اینگونه مدلها ، برای تعریف کرنش معادل از مفهوم میانگین وزنی مکانی<sup>۲۶۳</sup> استفاده می شود یعنی کرنش معادل به صورت زیر تعریف می شود :

$$\bar{\varepsilon}(x) = \int_V \alpha(x, \xi) \tilde{\varepsilon}(\xi) d\xi \quad (12-4)$$

<sup>1</sup>Non-local Isotropic Damage Model  
<sup>1</sup>Weighted Spatial Averaging

توجه به این نکته مهم است که تابع آسیب بر اساس کرنش معادل غیر موضعی محاسبه می شود  
اما کرنشی که در معادله (۱) استفاده می شود کرنش موضعی است . در محدوده ارتجاعی ،  
متغیر آسیب مساوی عدد صفر باقی مانده و رابطه تنش و کرنش موضعی است.

## فصل پنجم

### کاربرد روش بدون المان گالرکین و مدل صفحات ریزمقیاس

#### در شبیه سازی مسیر گسترش ترک

##### ۵-۱- مقدمه

همانطور که در فصل اول اشاره شد هدف از مطالعه حاضر بکارگیری روش عددی بدون شبکه به همراه مدل رفتاری مناسب برای پیش بینی رفتار بتن معمولی<sup>۲۶۴</sup> است. در فصل پیش رو کاربرد روش عددی بدون شبکه گالرکین در مسائل مورد نظر بیان گردیده و نیز روابط حاکم بر رفتار حرارتی مواد بیان گشته و در نهایت مدل رفتاری یاد شده تا جای ممکن و با رعایت اختصار شرح داده می شود و جهت نشان دادن اعتبار مدل<sup>۲۶۵</sup>، نتایج رفتاری حاصل از آن با نتایج آزمایشگاهی معتبر یافت شده در مقالات علمی معتبر مقایسه شده اند.

---

<sup>1</sup> Plane Concrete  
<sup>2</sup> Verification

## ۵-۲- مدل بدون المان گالرکین جهت تحلیل سازه

در این قسمت نحوه به کارگیری روش بدون شبکه گالرکین در حل عددی مسائل بوسیله مثال های شرح داده می شود. در این میان تکنیک های مناسب جهت برنامه نویسی و مدلسازی که ما را به جواب های صحیح تر می رساند و می تواند در حل مسائل کارگشا باشد بیان گردیده و در حل بکاربرده می شود.

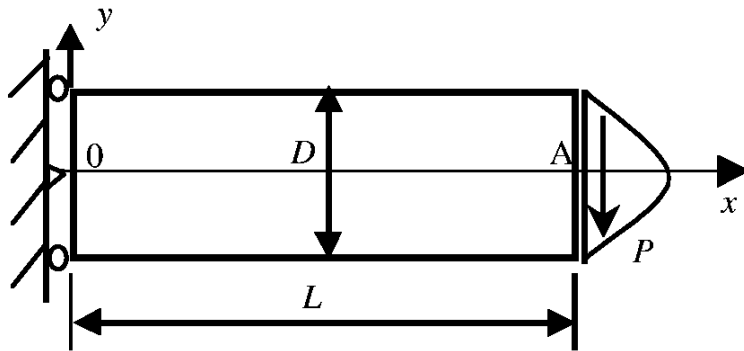
در ادامه مثالهایی جهت نشان دادن نحوه عملکرد و استانداردهای روش بدون المان گالرکین در تحلیل مسائل آورده می شود. بدین منظور کدهای مربوطه توسط برنامه MATLAB نگارش شده و مورد استفاده قرار گرفت. در تهیه این کدها از روابط گفته شده در فصل سوم استفاده گردید و برای انتگرالگیری نیز روش عددی گوس انتخاب شد.

برای اینکه بتوانیم از یک روش عددی و به تبع آن کدهای آن برای حل مسائل مکانیک جامدات استفاده کنیم نیاز است که ابتدا توسط مسائلی که دارای جوابهای تحلیلی مشخص می باشند این روشها صحتسنجی گردند. از این رو مثالهای زیر آورده شده و نتایج آنها در حالات مختلف آورده شده و تفسیر شده اند.

## ۵-۲-۱- تیر طره تحت بار سهموی در انتها

این مساله که در بسیاری از روشهای عددی بعلت وجود پاسخ تحلیلی جهت صحتسنجی بکاربرده می شود در شکل ۵-۱ نشان داده شده است. هدف از بکاربردن این مساله این است که با توجه به کدهای نوشته شده برای این مساله بتوان نشان داد که عوامل موثر در حل عددی روش بدون المان گالرکین به چه صورتی در پاسخ مساله تاثیرگذارند. از جمله این عوامل که اثر آنها مورد بررسی قرار گرفته تعداد نقاط گرهی، شبکه انتگرالگیری پس زمینه و تعداد نقاط انتگرالگیری بوده

است. همانطور که از شکل مشخص است تیر طره مورد نظر توسط نیروی انتهایی سهموی تحت تأثیر قرار گرفته است.



شکل ۵-۱- تیر کنسول تحت بار گسترده سهموی  $P$  در انتها

برای تیر مذکور پاسخ دقیق بصورت زیر بدست آمده است (تیموشنکو و گودیر ۱۹۷۷). در این مثال تغییرمکان در جهت  $X$  بصورت زیر بدست می‌آید:

(۱-۵)

$$u_x = -\frac{P}{6EI} \left[ (6L - 3x)x + (2 + \nu) \left[ y^2 - \frac{D^2}{4} \right] \right]$$

که در آن ممان اینرسی مقطع مستطیلی با عرض واحد برابر است با:

(۲-۵)

$$I = \frac{D^3}{12}$$

و نیز برای تغییرمکان در جهت  $y$  داریم:



(۳-۵)

$$u_y = \frac{P}{6EI} \left[ 3\nu y^2(L-x) + (4+5\nu) \frac{D^2 x}{4} + (3L-x)x^2 \right]$$

تنش نرمال به روی مقطع نیز از رابطه زیر بدست می آید:

(۴-۵)

$$\sigma_x = -\frac{P(L-x)}{I}$$

در حالیکه برای تنش نرمال در جهت Y داریم:

(۵-۵)

$$\sigma_y = 0$$

همچنین تنش برشی در مقطع نیز از رابطه زیر بدست می آید:

(۶-۵)

$$\tau_{xy} = \frac{P}{2I} \left[ \frac{D^2}{4} - y^2 \right]$$

برای حل عددی مثال ذکر شده از مقادیری که در ادامه می آید استفاده شده است.

$$P = 1000 \text{ N}$$

$$E = 3 \times 10^7 \text{ N/m}^2$$

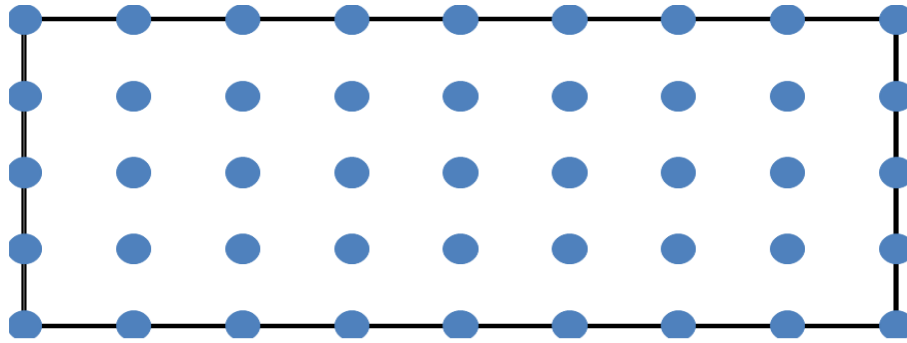
$$\nu = 0.3$$

$$D = 12 \text{ m}$$

$$L = 48 \text{ m}$$

و نحوه توزیع نیروی P در انتهای تیر بصورت رابطه  $\frac{P}{2I} \left[ \frac{D^2}{4} - y^2 \right]$  می باشد.

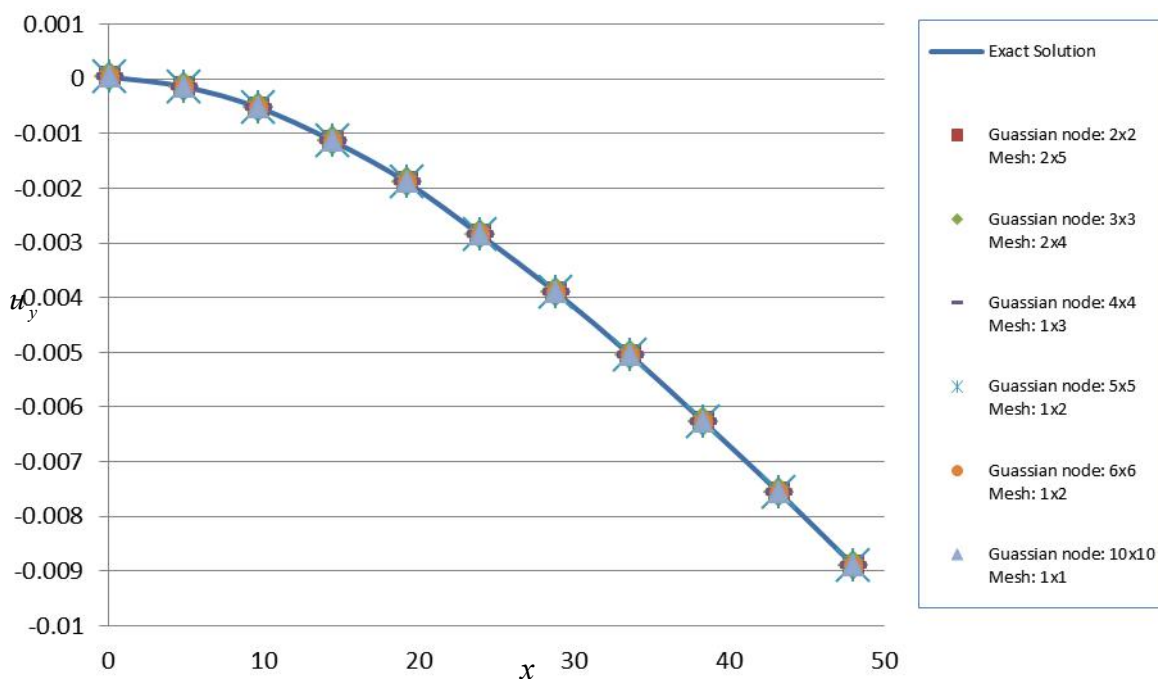
برای این مسأله مدل کامپیوتری بشکل زیر ایجاد شد تا نتایج در حالات مختلف بررسی شوند.



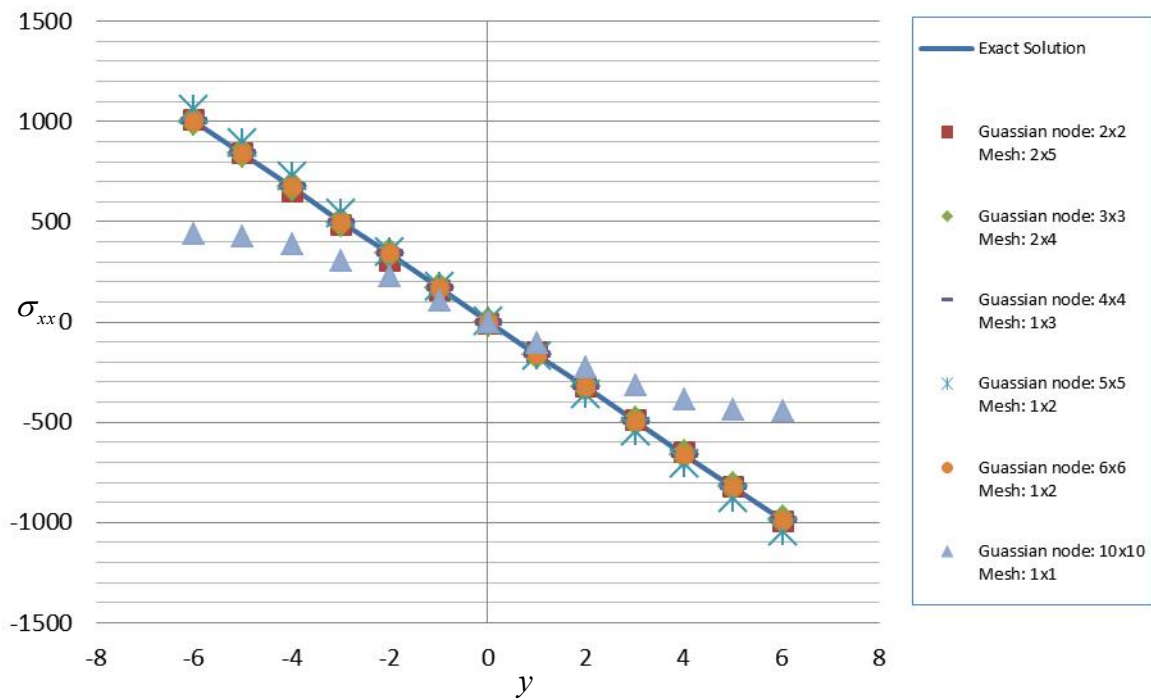
شکل ۵-۲- مدل کامپیوتری تهیه شده برای حل مثال تیر طره تحت بار گسترده در انتها

در ادامه نتایج بدست آمده از تحلیل عددی مسأله شرح داده شده با کدهای نوشته شده در MATLAB نشان داده شده است.

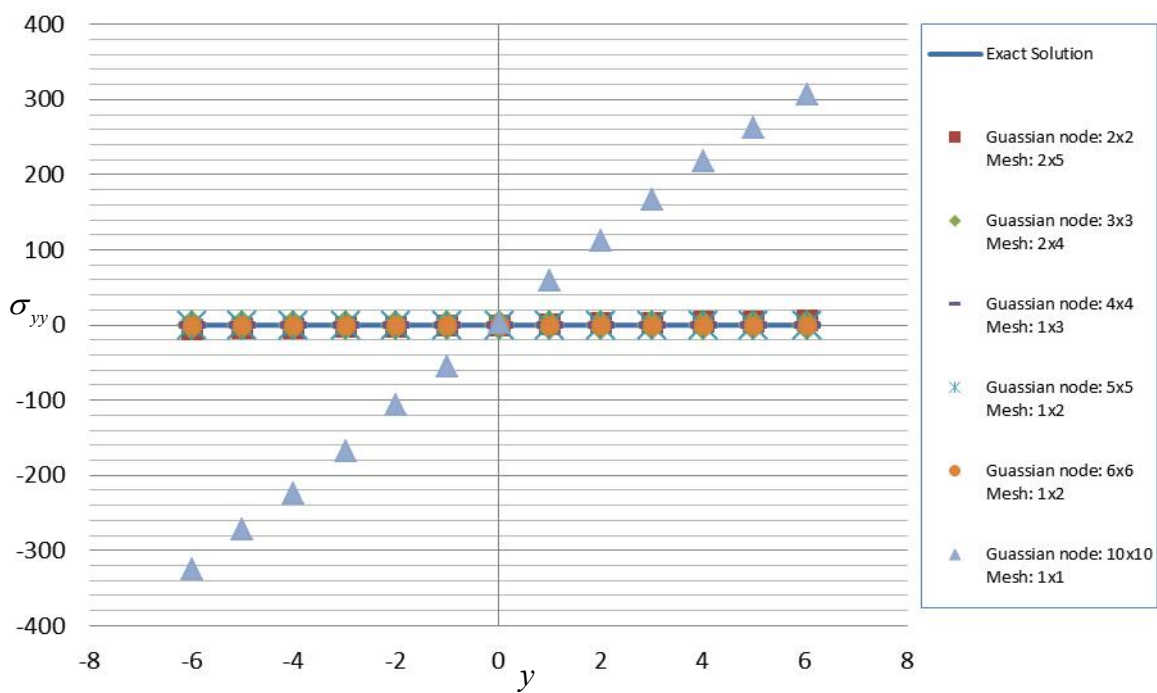
این تحلیلها بر اساس تراکم نقاط و سلولهای انتگرالگیری مختلف آمده اند. ابتدا مقدار تغییر مکانها و تنشها در طول تیر و در نیز در مقطع میانی تیر نشان داده شده اند.



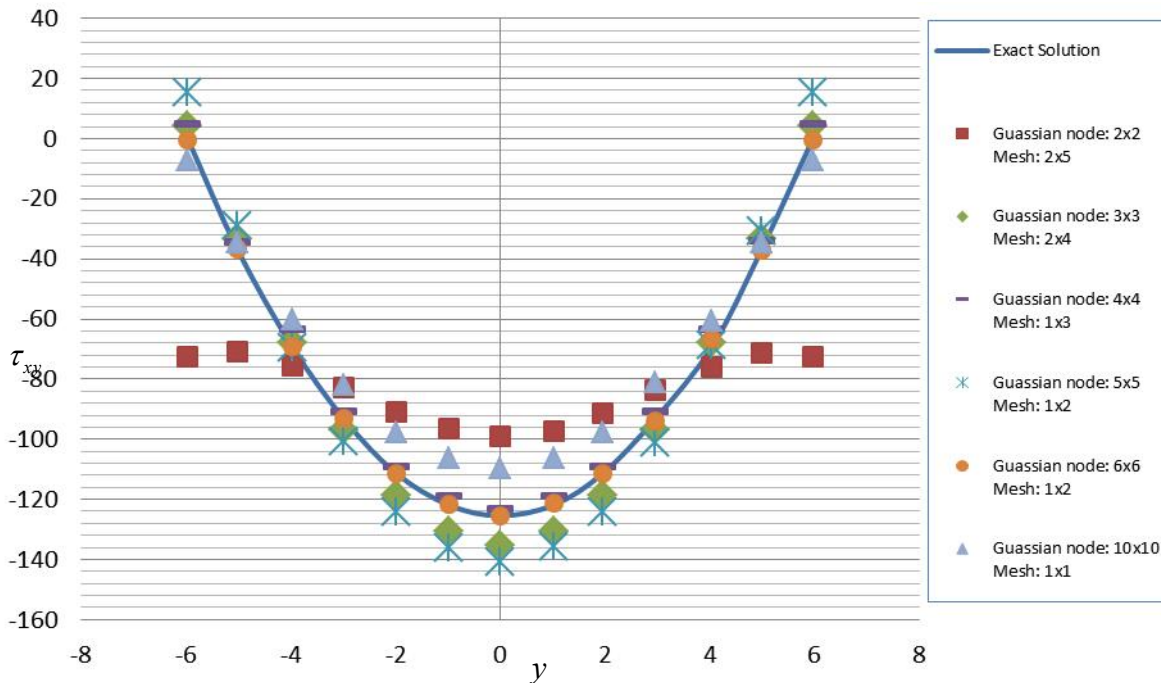
شکل ۵-۳- تغییر مکان قائم تار میانی تیر



شکل ۵-۴- توزیع تنش نرمال  $\sigma_{xx}$  در محل میانه تیر طره ( $x=L/2$ )



شکل ۵-۵- توزیع تنش نرمال  $\sigma_{yy}$  در محل میانه تیر طره ( $x=L/2$ )



شکل ۵-۶- توزیع تنش برشی  $\tau_{xy}$  در میانه تیر طره ( $x=L/2$ )

نتایج بدست آمده نشان می دهند که باید میان تعداد سلولهای انتگرالگیری و نقاط گوسی تعادل مناسبی برقرار باشد بدین معنی که باید برای رسیدن به پاسخ مناسب علاوه بر افزایش تعداد نقاط گوسی به میزان لازم که در ادامه مورد بحث قرار می گیرد سلولهای انتگرالگیری نیز به شکل متناسبی افزایش یابند و تعداد زیاد سلولهای انتگرالگیری با توزیع کم نقاط گوسی و نیز تعداد نقاط گوسی زیاد با چگالی کم سلولها نتایج دقیقی ارائه نمی دهند. این مسأله در مورد تنش ها حساستر است و برای نتایج بهتر الزاماً باید سلولهای انتگرالگیری را ریزتر در نظر گرفت.

#### ۵-۲-۲- تعیین حداقل تعداد نقاط گوسی لازم جهت دستیابی به پاسخ دقیق

برای تعیین رابطه بین تعداد نقاط گوسی و نقاط گرهی برای رسیدن به پاسخ مناسب از شاخص دیگری با عنوان خطای انرژی کرنش<sup>۲۶۶</sup> استفاده شد تا از این طریق رابطه مناسب جهت تعیین

<sup>1</sup> Strain energy error

نقاط گوسی مورد نیاز بدست آید. خطای انرژی کرنش از رابطه زیر بدست می‌آید که روی دامنه تعریف می‌شود و در اینجا برای تعدادی مشخص از نقاط گوسی مورد استفاده قرار گرفته است.

(۷-۵)

$$e_e = \left\{ \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\varepsilon^{num} - \varepsilon^{exact}) D (\varepsilon^{num} - \varepsilon^{exact}) d\Omega \right\}^{1/2}$$

از آنجاییکه آنچه در روش بدون المان گالرکین اهمیت دارد علاوه بر نقاط گرهی که طبعاً با افزایش آنها دقت پاسخ افزایش می‌یابد نقاط گوسی و تعداد سلولهای انتگرالگیری می‌باشد در ادامه این مساله مورد بررسی قرار گرفته است.

زینکوویچ (۱۹۸۹) برای اجزاء محدود نشان داد که هرگاه تعداد روابط مستقل ایجاد شده توسط نقاط انتگرالگیری کمتر از تعداد مجهولات یا همان تغییرمکانها باشد آنگاه ماتریس سختی ماتریسی منفرد خواهد شد این اصل را می‌توان برای روش بدون المان گالرکین نیز برقرار دانست. بطوریکه برای حالت دوبعدی تعداد مجهولات از رابطه زیر بدست می‌آید.

(۸-۵)

$$N_u = 2 \times n_t - n_f$$

که  $n_t$  و  $n_f$  بترتیب تعداد کل گره‌ها و قیود مسأله می‌باشند. در محاسبه انتگرال عددی در نقاط گوسی سه معادله مستقل کرنش مورد استفاده قرار می‌گیرند و بنابراین تعداد کل معادلات بصورت زیر بدست می‌آید.

(۹-۵)

$$N_Q = 3 \times n_Q$$

که  $n_Q$  تعداد نقاط گوسی درون مسأله است و در نتیجه برای اینکه ماتریس سختی منفرد نباشد باید رابطه زیر را داشته باشیم.

(۵-۱۰)

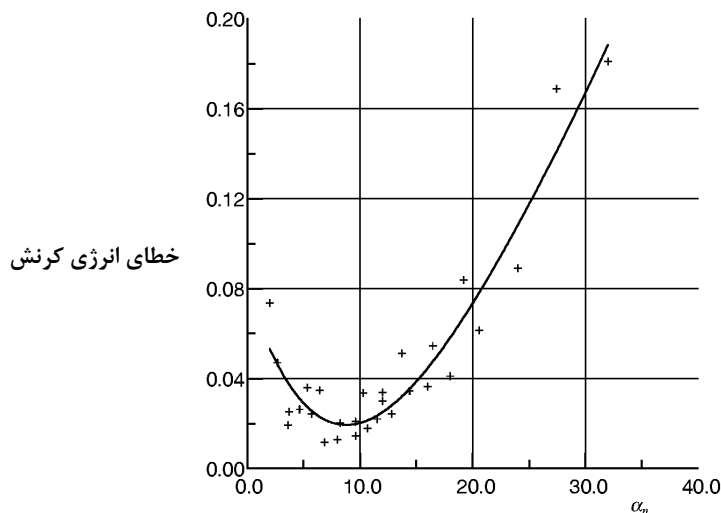
برای مسائل ۲ بعدی

$$N_Q > N_u \approx 2n_t \quad \text{or} \quad n_Q > \frac{2}{3}n_t$$

شایان ذکر است که شرط گفته شده شرط لازم است ولی کافی نمی‌باشد از این رو از باید جهت انتخاب تعداد نقاط گوسی مطلوب جهت رسیدن به پاسخ مناسب از حل مسائل نمونه استفاده نمود. لیو [۲۴] نشان داد که اگر نسبت  $\alpha_n$  را بصورت زیر در نظر گیریم بر اساس خطای انرژی کرنش رابطه ای بصورت شکل زیر بین تعداد نقاط گوسی و دقت حل در یک مسأله با دامنه مستطیلی وجود دارد.

(۵-۱۱)

$$\alpha_n = \frac{n_Q}{n_t}$$

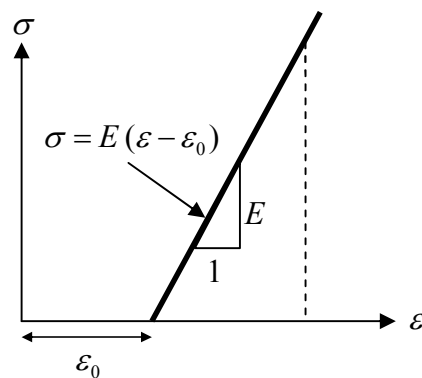


شکل ۵-۷- رابطه بین نسبت نقاط گوسی به نقاط گرهی و خطای انرژی کرنش

همانطوری که مشاهده می‌شود هنگامیکه  $\alpha > 3$  یا  $n_Q > 3n_t$  جوابها مناسب خواهند بود و هنگامیکه  $7 < \alpha < 10$  بهترین نتایج را خواهیم داشت. از این مسأله در ادامه به جهت مدلسازی در نظر گرفته خواهد شد.

### ۳-۵- روابط حاکم بر رفتار حرارتی بتن و اثر تغییر درجه حرارت

تنشهایی که در اثر تغییر درجه حرارت در یک جسم همسان یا ایزوتروپ حاصل می شوند تنشهای حرارتی نامیده می شوند. بدیهی است که در اثر تغییر درجه حرارت ما در جسم تغییر شکل داریم و در نتیجه میدان کرنش حاصل مجموع اثرات حرارتی و مکانیکی موجود می باشد در روشهای عددی اثرات حرارتی را بصورت تغییرشکلهای نسبی که عملاً مشابه تغییرشکلهای اولیه می باشد منظور می کنند.



شکل ۵-۸- رفتار خطی جسم در صورت وجود تغییر درجه حرارت

در حالت کلی که تغییر درجه حرارت بصورت  $\Delta t(x, y, z)$  می باشد و در حالت وجود تغییرشکلهای کوچک می توان کرنش کلی را بصورت مجموع کرنش حرارتی و مکانیکی بصورت زیر در نظر گرفت.

$$(۵-۱۲)$$

$$e_{ij} = e_{ij}^{(M)} + e_{ij}^{(T)}$$

حال اگر  $T_0$  را بعنوان دمای مرجع در نظر گیریم و  $T$  دمای دلخواه باشد، کرنش حرارتی یک جسم مقید نشده را می توان بصورت رابطه خطی زیر نوشت.

$$(۱۳-۵)$$

$e_{ij}^{(T)} = \alpha_{ij}(T - T_0)$  که در آن  $\alpha_{ij}$  تانسور ضریب انبساط حرارتی می باشد. توجه کنید که کرنش در هنگام تغییر درجه حرارت ایجاد می شود. در حالتیکه ماده مورد نظر ایزوتروپ در نظر گرفته شود آنگاه  $\alpha_{ij}$  یک تانسور ایزوتروپ مرتبه دو می باشد که حاصل بصورت ساده شده زیر در می آید.

$$(۱۴-۵)$$

$$e_{ij}^{(T)} = \alpha(T - T_0)\delta_{ij}$$

که  $\alpha$  یک ثابت برای ماده است که ضریب انبساط حرارتی نامیده می شود. در جدول ۵-۱ این ضریب برای تعدادی از مواد معمول نشان داده شده است.

جدول ۵-۱- مقادیر ضریب انبساط حرارتی برای چند ماده معمول [۶۲]

$\alpha(10^{-6} / ^\circ C)$	$E (GPa)$	نوع ماده
25.5	68.9	آلومینیوم
11	27.6	بتن
18	89.6	مس
8.8	68.9	شیشه
102	28.3	نایلون
200	0.0019	لاستیک
13.5	207	فولاد



باید این نکته را در نظر داشت که برای مواد ایزوتروپ هیچگونه کرنش برشی در اثر تغییر دما ایجاد نخواهد شد. بر اساس آنچه گفته شد بطور کلی می توان تنش ها را بصورت تانسوری زیر نشان داد.

(۱۵-۵)

$$e_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} - \beta_{ij} (T - T_0)$$

که  $\beta_{ij}$  تانسور مرتبه دومی است که شامل مدول حرارتی می شود. این رابطه را بعنوان قانون دوهمال-نیومان نیز می شناسند [مرجع]. همین رابطه را بصورت ساده شده و غیر تانسوری زیر می توان نوشت.

(۱۶-۵)

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0)$$

حال با توجه به این نتایج در ادامه جهت مدلسازی مسائل در حالتیکه تغییر درجه حرارت را در نظر می گیریم کرنشهای ناشی از تغییر درجه حرارت را به همان صورت گفته شده بشکل کرنش های اولیه تأثیر داده و آنها را درون نرم افزار با کرنشهای مکانیکی حاصل ماتریس سختی سازه جمع می کنیم.

#### ۴-۵- روش بدون المان گالرکین در حل مسائل غیر خطی

همانطور که پیشتر گفته شد، برای حل یک معادله غیر خطی باید آن را به صورت نموی حل کرد زیرا نتایج هر مرحله از محاسبات به نتایج مرحله قبل وابسته است و هر قدر این نموهای افزایشی

کوچکتر باشند نتایج حاصله دقیقتر خواهند بود. به همین دلیل در قسمت قبل، رابطه نموی بین بردار نمو تنش و نمو کرنش را محاسبه کردیم. حال در این قسمت لازم است که دستگاه معادلات کل حاکم بر روش EFG به صورت نموی نوشته شوند. رابطه (۱۰۹-۳) که همان دستگاه معادلات گسسته حاکم بر مسأله می باشد، را می توان به صورت زیر نوشت :

(۱۷-۵)

$$\left[ \underbrace{\mathbf{K} + \mathbf{K}^\alpha + \mathbf{K}^\beta}_{\mathbf{K}_{ep}} \right] \mathbf{U} = \underbrace{\mathbf{F} + \mathbf{F}^\alpha}_{\mathbf{F}_{total}}$$

که ماتریس  $K_{ep}$  به صورت حاصل جمع سه ماتریس  $K, K^\alpha, K^\beta$  در نظر گرفته شده که از بین این سه ماتریس، تنها ماتریس  $K$  است که پارامترهای سختی گره‌های موجود در مسأله را در بر دارد که این پارامترهای سختی گره‌های خود به ماتریس رفتاری مصالح وابسته اند و در مسائل غیر خطی که به دلیل غیر خطی بودن مصالح<sup>۲۶۷</sup> می باشند، این ماتریسها طی نموهای مختلف افزایش بار (یا تغییر شکل) تغییر می کنند و در نتیجه ماتریس سختی گره‌های کل که از رویهم گذاری ماتریسهای سختی گره‌های حاصل می شود نیز طی نموهای مختلف تغییر می کند و ماهیت غیر خطی به کل مسأله می دهد که این مسائل را می توان به یکی از روشهای حل دستگاه معادلات غیر خطی که چند نمونه از آنها در مرجع [۱۸] آمده اند حل کرد. ماتریسهای  $K^\beta, K^\alpha$  به ترتیب ماتریسهای مربوط به اعمال شرایط مرزی تکیه گاهی و اعمال شرایط پیوستگی مربوط به مصالح مختلف می باشند که تنها به موقعیت گره های موجود بر روی مرزهای تکیه گاهی و مرز بین مصالح مختلف وابسته اند و غیرخطی بودن رفتار مصالح بطور مستقیم در آنها دخالتی ندارد.

رابطه (۴۱-۴) را می توان بصورت نموی زیر نوشت :

(۱۸-۵)

$$\mathbf{K}_{ep} \cdot \Delta \mathbf{U} = \Delta \mathbf{F}_{total}$$

از این پس، جهت سادگی، ماتریس  $K_{ep}$  ماتریس سختی، بردار  $\Delta U$  بردار تغییرشکل گرهی و بردار  $\Delta F_{total}$  بردار نیرو خوانده می شوند.

از بین روشهای موجود حل دستگاه معادلات غیر خطی، در اینجا از روش نموی خالص ۲۶۸، به دلیل سادگی و قابل قبول بودن جوابهای آن (در صورت اعمال برخی فنون محاسباتی)، استفاده شده است که الگوریتم حل در زیر تشریح شده است. قابل ذکر است که مراحل حل ذکر شده در زیر با رعایت حداکثر سادگی نوشته شده اند و از بیان جزئیات محاسباتی و همچنین روشهای کاهش حجم و زمان محاسبات خودداری شده است.

(۱) ابتدا شرایط اولیه اعمال شده و مساله در حالت الاستیک و قبل از هرگونه اعمال بار یا تغییر شکل تحلیل می شود و ماتریس سختی کل و بردار تغییر شکل گرهی محاسبه شده و از روی آن و همچنین با توجه به ماتریس رفتاری مصالح در حالت الاستیک، کرنشها و تنشهای اولیه در نقاط گوسی محاسبه می شوند. سپس بردار تغییر شکل گرهی کل برابر صفر می شود تا از تغییر شکل اولیه گره ها، قبل از شروع تحلیل غیرخطی خودداری شود. بدین ترتیب ماتریس سختی کل اولیه و همچنین تنشها و کرنشهای اولیه برای شروع تحلیل غیر خطی محاسبه می گردند.

(۲) در هر گام افزایشی،  $\Delta f_i$  با استفاده از صورت نموی رابطه (۳-۷۷) محاسبه شده و پس از رویهم گذاری بردارهای نیروی گرهی، بردار  $\Delta F$  حاصل می شود که این بردار با بردار  $F^{\alpha}$  حاصل از رویهم گذاری بردارهای گرهی رابطه (۳-۱۰۴) جمع شده و بردار نمو نیروی کل،  $\Delta F_{total}$ ، را نتیجه می دهد. در صورتیکه اعمال بار به صورت اعمال تغییر شکل باشد نیازی به این مرحله نیست.

(۳) با توجه به رابطه (۵-۱۸) می توان بردار نمو تغییر شکل گرهی را محاسبه و از روی آن بردار نمو تنش و کرنش را در تمام نقاط گوسی محاسبه کرد

۴) با توجه به مقادیر تنشهای بدست آمده از انتهای گام افزایشی قبل و نیز با توجه به مدل رفتاری در نظر گرفته می توان ماتریس رفتاری در تمام نقاط گوسی محاسبه کرد. سپس از رویهم گذاری ماتریسهای سختی گرهی ماتریس سختی کل را بدست آورد. سپس با استفاده از رابطه مقدار نمو تغییر شکل گرهی و از روی آن مقدار نمو تنش و کرنش در نقاط گوسی را محاسبه می کنیم.

۵) مقدار بردار نمو تغییرشکل گرهی بدست آمده را با بردار تغییر شکل گرهی کل جمع کرده و برابر بردار تغییرشکل گرهی کل قرار می دهیم. همین کار را در مورد کرنشها و تنشها در نقاط گوسی نیز انجام می دهیم.

۶) با جمع مولفه های مکانی بردار نمو تغییر شکل گرهی بدست آمده در هر گام افزایشی با مختصات گرهی هر یک از گره ها، موقعیت جدید آنها را در انتهای هر گام افزایشی بار تعیین می کنیم.

۷) گام بعدی افزایش بار را اعمال کرده و به مرحله ۲ می رویم و این کار را تا انتهای بارگذاری ادامه می دهیم.

## ۵-۵- مدل رفتاری پیشنهادی بتن

در مطالعه حاضر پس از جستجو در مقالات علمی منتشر شده در مورد مدلهای رفتاری بتن ، تصمیم بر آن گرفته شد تا از مدل رفتاری پیشنهاد شده توسط آقایان لیبب زاده و صدرنژاد که شامل ترکیب دو نظریه صفحات ریز مقیاس<sup>۲۶۹</sup> و نظریه آسیب<sup>۲۷۰</sup> و حاوی نو آوری در تعریف نظریه آسیب بتن است استفاده شود. در ادامه ابتدا روابط صفحات ریز مقیاس بتن مورد استفاده

---

<sup>1</sup> Microplane Theory

<sup>2</sup> Damage Theory

که از مدل M4 [۵۳] پیشنهادی بازانت برای آن بهره گرفته شده شرح داده می شود و سپس به روابط آسیب بتن پیشنهادی مورد استفاده در مطالعه حاضر پرداخته می گردد.

#### ۵-۵-۱- مدل صفحات ریز مقیاس با قید حرکتی

در نظریه صفحات ریز مقیاس که مختصری از تاریخچه و نحوه شکل گیری آن در فصل دوم اشاره شد، تعریف روابط ساختاری میان تانسورهای تنش و کرنش به جای آنکه مستقیماً بین آنها و در اصطلاح علمی مقالات در مقیاس مهندسی صورت گیرد، روی صفحاتی با جهات گوناگون و از پیش تعریف شده در اطراف هر نقطه مادی<sup>۲۷۱</sup> و بین بردارهای تنش و کرنش عمل کننده روی آن صفحات انجام می گیرد. این کار چندین مزیت نسبت به مدل‌های کلاسیک درشت مقیاس مبتنی بر تعریف روابط ساختاری تانسوری دارد که به چند تای آنها اشاره می کنیم:

۱- تعریف روابط ساختاری مبتنی بر جملات برداری نسبت به روابط نظیر مبتنی بر جملات تانسوری، روشن تر، از لحاظ مفهومی و درک انسانی ساده تر و جهت روابط هم آسان تر هستند.

۲- با نمایش روابط ساختاری به صورت برداری می توان به شکل مستقیم تغییر شکل‌های جهت دار از پیش تعریف شده را سازماندهی کرد همانطور که می توان تمرکز آنها را در یک جهت خاص اعمال نمود در حالیکه انجام این کار در مدل‌های تانسوری دشوارتر و بصورت غیر مستقیم صورت می گیرد. به عنوان مثال روابط میان فشار هیدرواستاتیکی<sup>۲۷۲</sup> و نامتغیر دوم تنش انحرافی<sup>۲۷۳</sup> نمی تواند توصیف کننده لغزش اصطکاکی روی صفحه ای با جهت معین باشد.

---

<sup>1</sup> Material Point

<sup>2</sup> Hydrostatic Pressure

<sup>3</sup> Second Deviatoric Stress Invariant

۳- بسیاری از ویژگیهای بتن که وابسته به جهت اعمال بار یا حرکت وارده هستند بوسیله مدل‌های تانسوری قابل شبیه سازی نیستند .

۴- قید یا وابستگی حرکتی موجود میان صفحات ریز مقیاس سبب می شود تا بسیاری از اثرات تقابلی یا ضربدری<sup>۲۷۴</sup> موجود در رفتار بتن مانند تورم ناشی از برش<sup>۲۷۵</sup> یا حساس بودن به فشارهای محصور کننده<sup>۲۷۶</sup> به شکل خودکار برقرار شود .

۵- هر چند بتن را معمولاً به عنوان یک جسم همسانگرد در مدل‌های رفتاری در نظر می گیرند ( با دقت قابل قبول ) ، اما با مدل صفحات ریز مقیاس بتن می توان به راحتی با تعریف ویژگیهای وابسته به جهت برای بتن روی هر صفحه خاص ، این ماده را بصورت ناهمسانگرد هم در رفتار شبیه سازی نمود .

جهت هر صفحه ریز مقیاس با بردار یکه عمود بر آن صفحه یعنی  $\mathbf{n}$  معین می شود . مؤلفه های این بردار به شکل  $n_i$  نمایش داده می شوند که از این پس در این روابط پسوندهای  $i$  و  $j$  معرف جهات دستگاه مختصات کارتزین  $x_i$  هستند . در روابط صفحات ریز مقیاس با قید حرکتی<sup>۲۷۷</sup> ، که سبب سهولت شبیه سازی و پایداری عددی رفتار نرم شوندگی بتن می شود ، بردار کرنش  $\bar{\epsilon}_N$  روی هر صفحه ریز مقیاس ( شکل ۵-۱ ) در واقع تصویر تانسور کرنش درشت مقیاس  $\epsilon_{ij}$  می باشد . تصاویر این بردار در جهات کارتزین بصورت  $\epsilon_{Ni} = \epsilon_{ij} n_j$  تعریف می شود . حال مؤلفه عمود بر صفحه بردار کرنش  $\bar{\epsilon}_N$  بصورت  $\epsilon_N = n_i \epsilon_{Ni}$  بدست می آید که شکل دقیق تر بیان آن به صورت زیر است :

$$(۱۹-۵)$$

$$\epsilon_N = N_{ij} \epsilon_{ij} ; \quad N_{ij} = n_i n_j$$

<sup>4</sup> Cross Effects

<sup>5</sup> Shear Dilatancy

<sup>6</sup> Pressure Sensitivity

<sup>۲۷۷</sup> Kinematic Constraint

در رابطه بالا تکرار شدن یک زیر نویس به معنای علامت جمع روی آن زیر نویس از ۱ تا ۳ است . مؤلفه کرنش میانگین عمود بر ریز صفحه یا همان کرنش حجمی  $\varepsilon_V$  و مؤلفه کرنش انحرافی  $\varepsilon_D$  روی هر ریز صفحه به شکل زیر تعریف می شوند :

(۲۰-۵)

$$\varepsilon_V = \varepsilon_{KK} / 3; \quad \varepsilon_D = \varepsilon_N - \varepsilon_V$$

این جداسازی یا تقسیم مؤلفه عمود بر صفحه کرنش ریز صفحه به دو بخش حجمی و انحرافی همانطور که در فصل دوم در هنگام معرفی مدل‌های مختلف صفحات ریزمقیاس بیان شد به دلیل کنترل رفتار تأثیر پذیر مواد چسبنده - اصطکاکی نظیر بتن از فشار محصور است . برای تعریف دو مؤلفه برشی یا مماس بر صفحه ریز مقیاس نیاز به تعریف دو راستای دیگر درون هر ریز صفحه داریم . این راستاها را  $M$  و  $L$  نامیده و بردارهای یکه در امتداد آنها را با  $\mathbf{m}$  و  $\mathbf{l}$  نمایش می دهیم . این دو راستای  $M$  و  $L$  در هر ریز صفحه بر هم عمود بوده و مؤلفه های بردارهای یکه  $\mathbf{m}$  و  $\mathbf{l}$  را با  $m_i$  و  $n_i$  نشان می دهیم . در مطالعه حاضر برای راحت تر شدن محاسبات یکی از راستاهای درون هر ریز صفحه را عمود بر محور  $z$  دستگاه مختصات کارتزین در نظر گرفتیم . بزرگی مؤلفه های کرنش در راستاهای  $\mathbf{m}$  و  $\mathbf{l}$  بصورت  $\varepsilon_M = m_i (\varepsilon_{ij} n_j)$  و  $\varepsilon_L = l_i (\varepsilon_{ij} n_j)$  بدست می آیند . به دلیل تقارن موجود در تانسور کرنش  $\varepsilon_{ij}$  می توان مؤلفه های کرنش درون ریز صفحه را به شکل زیر هم نمایش داد :

(۲۱-۵)

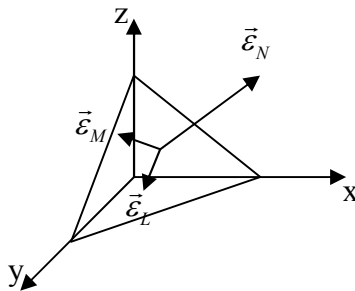
$$\varepsilon_M = M_{ij} \varepsilon_{ij}; \quad \varepsilon_L = L_{ij} \varepsilon_{ij}$$

که در آن

(۲۲-۵)

$$M_{ij} = (m_i n_j + m_j n_i) / 2; \quad L_{ij} = (l_i n_j + l_j n_i) / 2$$

حال که مؤلفه های کرنش روی هر ریز صفحه بدست آمدند ، می توانیم با اعمال روابط ساختاری روی هر ریز صفحه بین مؤلفه های کرنش و تنش ، مؤلفه های تنش ریز صفحه را بدست آوریم . این روابط ساختاری می توانند به شکل عبارات جبری و یا به صورت دیفرانسیلی بیان شوند .



شکل ۵-۹- مؤلفه های کرنش ریز صفحه

در اینجا باید به این نکته مهم توجه کنیم که در روابط صفحات ریز مقیاس به روش قید حرکتی ، مؤلفه های تنش بدست آمده روی صفحات همواره برابر با تصویر تانسور تنش درشت مقیاس نیستند و فقط در شرایطی خاص و با تعریف روابط ساختاری منحصر بفردی آن هم در محدوده رفتار ارتجاعی خطی اولیه بتن، این مؤلفه های تنش برابر تصویر تانسور تنش می شوند. لذا در حالت کلی مؤلفه های تنش بدست آمده روی صفحات ریز مقیاس از هم مستقل بوده و هیچگونه وابستگی بین آنها به شکلی که تصاویر تانسور تنش روی صفحات مختلف باشند وجود ندارد . بنابراین برای آنکه اصل تعادل نیز مانند اصل همسازی کرنشها در هر نقطه رعایت شود باید از اصل کار مجازی<sup>۲۷۸</sup> استفاده نمود [۸] . با اعمال این اصل بین مؤلفه های تنش و کرنش ریز صفحات و تانسور های درشت مقیاس تنش و کرنش خواهیم داشت :

<sup>1</sup> Principal of Virtual Work



(۲۳-۵)

$$\sigma_{ij} = \sigma_V \delta_{ij} + \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} \left[ \sigma_D \left( N_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \right) + \sigma_L L_{ij} + \sigma_M M_{ij} \right] d\Omega$$

در رابطه بالا،  $\Omega$  معرف سطح یک نیمکره به شعاع واحد،  $\sigma_V$  و  $\sigma_D$  بخشهای حجمی و انحرافی مؤلفه تنش عمود بر هر ریز صفحه و  $\sigma_L$  و  $\sigma_M$  مؤلفه های برشی تنش روی ریز صفحات هستند. رابطه (۵-۶) بیان کننده تساوی کار مجازی درون یک نیمکره و سطح روی آن است که توسط بازانت در سال ۱۹۹۶ اصلاح شده است.

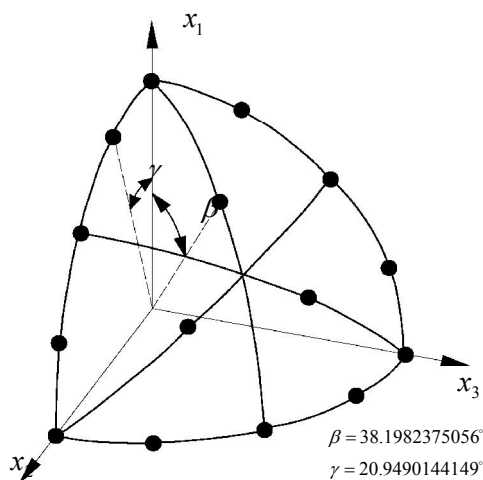
#### ۵-۲-۵-۲- انتگرالگیری عددی

همانطور که از روابط مشاهده می کنیم برای رسیدن به تانسور تنش باید یک انتگرال را محاسبه نمود. در روشهای عددی و به کمک رایانه این انتگرال به صورت عددی و با استفاده از یک رابطه تقریبی صورت می گیرد. برای اینکار از روش انتگرال گیری عددی گوس و با اتخاذ نقاطی به عنوان نقاط نمونه<sup>۳۷۹</sup> روی سطح نیمکره استفاده می شود. در واقع در این نقاط مقدار تابع انتگرال محاسبه شده و در وزنه های مربوطه روش گوس ضرب شده و سپس با هم بصورت ساده جمع می شوند. تعداد زیادی از این روابط در مراجع [۴] موجود می باشند و همانطور که در فصل قبل بیان شد، این روابط بطور کلی انتگرالهای مورد نظر را بصورت زیر تخمین می زنند (برای حالت ۳۳ نقطه ای):

(۲۴-۵)

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) d\Omega \approx 4\pi \sum_{i=1}^{33} w_i f(x_i, y_i, z_i)$$

که در آن، زیرنویس  $i$  بیانگر یک سری جهات مشخص در فضا است و  $w_i$ ، وزنه‌ها (ضرایب انتگرال‌گیری عددی) برای آن جهات می‌باشند (یعنی برای نقاط روی یک نیم کره با شعاع واحد).  
تعریف ۳۳ صفحه نمونه در نیم کره و مقادیر کسینوسهای هادی آنها و همچنین ضرایب وزنه برای قانون انتگرال‌گیری عددی در شکل ۴-۴ و جدول ۴-۱ مشخص شده است.



شکل ۵-۱۰ - مثالی از فرمول انتگرال‌گیری ۳۳ گره‌ای (نقاط مشخص شده با دایره بیانگر جهات بردارهای قائم ریز صفحات می‌باشد) [۶].

جدول ۵-۲: مقادیر کسینوسهای هادی و ضرایب وزنه نقاط انتگرال‌گیری برای حالت ۳۳ نقطه ای [۶].

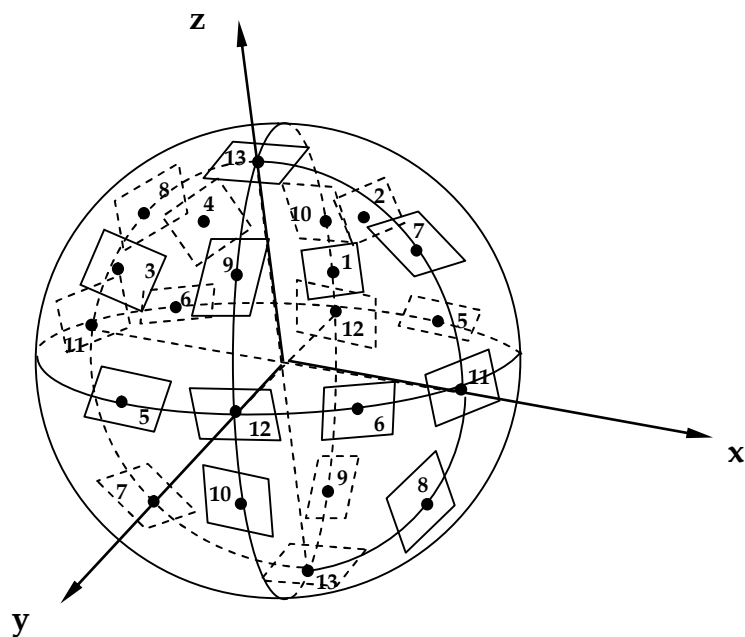
شماره نقطه انتگرالی یا شماره ریز صفحه	کسینوس هادی ریز صفحه نسبت به محور X	کسینوس هادی ریز صفحه نسبت به محور Y	کسینوس هادی ریز صفحه نسبت به محور Z	ضریب وزن
1	1	0	0	0.00985353993433
2	0	1	0	0.00985353993433
3	0	0	1.000000000000	0.00985353993433
4	0.707106781187	0.707106781187	0	0.0162969685886
5	0.707106781187	-0.707106781187	0	0.0162969685886
6	0.707106781187	0	0.707106781187	0.0162969685886
7	0.707106781187	0	-0.707106781187	0.0162969685886
8	0	0.707106781187	0.707106781187	0.0162969685886
9	0	0.707106781187	-0.707106781187	0.0162969685886

10	0.933898956394	0.357537045978	0	0.0134788844008
11	0.933898956394	-0.357537045978	0	0.0134788844008
12	0.357537045978	0.933898956394	0	0.0134788844008
13	0.357537045978	-0.933898956394	0	0.0134788844008
14	0.933898956394	0	0.357537045978	0.0134788844008
15	0.933898956394	0	-0.357537045978	0.0134788844008
16	0.357537045978	0	0.933898956396	0.0134788844008
17	0.357537045978	0	-0.933898956394	0.0134788844008
18	0	0.933898956394	0.357537045978	0.0134788844008
19	0	0.933898956394	-0.357537045978	0.0134788844008
20	0	0.357537045978	0.933898956394	0.0134788844008
21	0	0.357537045978	-0.933898956394	0.0134788844008
22	0.437263676092	0.437263676092	0.785875915868	0.0175759129880
23	0.437263676092	0.437263676092	-0.785875915868	0.0175759129880
24	0.437263676092	-0.437263676092	0.785875915868	0.0175759129880
25	0.437263676092	-0.437263676092	-0.785875915868	0.0175759129880
26	0.437263676092	0.785875915868	0.437263676092	0.0175759129880
27	0.437263676092	0.785875915868	-0.437263676092	0.0175759129880
28	0.437263676092	-0.785875915868	0.437263676092	0.0175759129880
29	0.437263676092	-0.785875915868	-0.437263676092	0.0175759129880
30	0.785875915868	0.437263676092	0.437263676092	0.0175759129880
31	0.785875915868	0.437263676092	-0.437263676092	0.0175759129880
32	0.785875915868	-0.437263676092	0.437263676092	0.0175759129880
33	0.785875915868	-0.437263676092	-0.437263676092	0.0175759129880

در مطالعه حاضر، از ۲۶ نقطه نمونه روی سطح کره استفاده شده که در شکل ۵-۱۱ محل آنها و

در جدول ۵-۳ مشخصات هر یک ارائه شده است. با توجه به خاصیت قرینه بودن نقاط تنها نیمی

از نقاط در جدول نشان داده شده اند.



شکل ۵-۱۱- محل قرار گیری نقاط نمونه روی سطح کره به شعاع واحد در تکنیک انتگرال گیری عددی گوس

با به کار گیری روش انتگرال گیری عددی گوس برای محاسبه انتگرال موجود در رابطه (۵-۶) خواهیم داشت :

(۲۵-۵)

$$\sigma_{ij} = \sigma_V \delta_{ij} + \frac{3}{2\pi} \int_{\Omega} s_{ij} d\Omega \approx \sigma_V \delta_{ij} + 6 \sum_{\mu=1}^{N_m} w_{\mu} s_{ij}^{(\mu)}, s_{ij} = \sigma_D \left( N_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \right) + \sigma_L L_{ij} + \sigma_M M_{ij}$$

در رابطه بالا ،  $N_m$  معرف تعداد نقاط انتگرالی موجود روی سطح نیمکره است . بر اساس روابط ارائه شده در بالا ، ماتریس ساختاری رفتاری به شکل زیر بدست می آید :

(۲۶-۵)

$$D_{ijkl} = \frac{3}{4\pi} \int_{\Omega} \left( \frac{E}{1+\nu} \right) \left[ \left( N_{ij} - \frac{\delta_{ij}}{3} \right) \left( N_{kl} - \frac{\delta_{kl}}{3} \right) + M_{ij} M_{kl} + L_{ij} L_{kl} \right] d\Omega + \frac{E}{1-2\nu} \frac{\delta_{kl}}{3} \delta_{ij}$$

که در آن  $E$  و  $\nu$  به ترتیب ضریب ارتجاعی و پواسون هستند .

جدول ۵-۳- مشخصات نقاط انتگرالی عددی گوس در حالت ۲۶ نقطه ای

شماره نقطه انتگرالی یا شماره ریز صفحه	کسینوس هادی ریز صفحه نسبت به محور X	کسینوس هادی ریز صفحه نسبت به محور Y	کسینوس هادی ریز صفحه نسبت به محور Z	ضریب وزن
1	0.57735	0.57735	0.57735	0.032143
2	0.57735	-0.57735	0.57735	0.032143
3	-0.57735	0.57735	0.57735	0.032143
4	-0.57735	-0.57735	0.57735	0.032143
5	0.707107	0.707107	0	0.038095
6	-0.70711	0.707107	0	0.038095
7	0.707107	0	0.707107	0.038095
8	-0.70711	0	0.707107	0.038095
9	0	-0.70711	0.707107	0.038095
10	0	0.707107	0.707107	0.038095
11	1	0	0	0.047619
12	0	1	0	0.047619
13	0	0	1	0.047619

### ۵-۳-۵- توابع آسیب مورد استفاده روی ریز صفحات

همانطور که از روابط بر می آید ماتریس رفتاری ساختاری از دو قسمت حجمی و انحرافی تشکیل شده است. بخش حجمی وابسته به جهت نیست. این مسئله براحتی قابل تحقیق است. کافی است که تانسور تنش را به دو قسمت حجمی و انحرافی تقسیم کرده و سپس تانسور حجمی را روی صفحات ریز مقیاس تصویر کنیم. مشاهده می کنیم که روی هر ریز صفحه تنها یک مؤلفه عمود بر صفحه بدست می آید و مقدار آن در تمام ریز صفحات یکسان است. اما اگر تانسور انحرافی تنش را روی ریز صفحات ارزیابی کنیم روی هر ریز صفحه علاوه بر مؤلفه عمود بر صفحه، مؤلفه های برشی هم خواهیم داشت که مقادیر آنها را روی ریز صفحات با هم فرق می کنند. لذا

می بینیم که تنها بخشی از ماتریس رفتاری که متأثر از جهات صفحات ریز مقیاس است بخش انحرافی آن است. از همین رو در مطالعه حاضر، روش به کار رفته برای محاسبه ماتریس ساختاری به این شکل است که در هر گام اعمال تانسور کرنش، ابتدا تانسور کرنش به دو بخش حجمی و انحرافی تقسیم شده و سپس بخش انحرافی آن روی ریز صفحات تصویر می شود. آنگاه با اعمال روابط ساختاری که بر گرفته از نظریه آسیب می باشد، مؤلفه های تنش روی هر ریز صفحه بدست می آید و آنگاه با اعمال اصل کار مجازی تانسور تنش در انتهای گام مربوطه محاسبه می شود. در این مطالعه برای محاسبه متغیر یا تابع آسیب<sup>۲۸۰</sup> مورد نیاز در هر ریز صفحه جهت اعمال روابط ساختاری، از روش پیشنهادی استفاده شده که در ادامه شرح می شود.

همانطور که اشاره شد در مطالعه پیش رو جهت اعمال روابط ساختاری در هر ریز صفحه از نظریه آسیب استفاده شده است. لذا باید روی هر ریز صفحه تابع آسیب یا متغیر آسیب ( $w$ ) که در واقع نشان دهنده آسیب وارده در آن ریز صفحه است محاسبه شود. برای یافتن تابع آسیب روی هر ریز صفحه از روش پیشنهادی استفاده شده و آن تعریف تابع آسیب با توجه به نوع شرایط بارگذاری روی ریز صفحه است. در مطالعه حاضر پنج حالت پایه بارگذاری در نظر گرفته شده و برای هر کدام تابع آسیب مربوطه تعریف شده است. آنگاه در هر لحظه روی هر ریز صفحه با توجه به شرایط بارگذاری ممکن است یکی از پنج حالت یاد شده بارگذاری اتفاق افتد.

در زیر پنج حالت پایه بارگذاری معرفی شده اند:

۱- فشار هیدرواستاتیکی

۲- کشش هیدرواستاتیکی

۳- برش خالص

۴- برش + فشار

۵- برش + کشش

در ادامه توابع آسیب متناظر تعریف شده با حالت‌های پنج گانه فوق ذکر شده اند .

تابع آسیب در حالت فشار هیدرواستاتیک

(۲۷-۵)

$$\omega_{HC} = 0.0$$

تابع آسیب در حالت کشش هیدرواستاتیک

(۲۸-۵)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega_{HT} = 0.0 & \text{if } \varepsilon_{eq} \leq \sqrt{3}a \\ \omega_{HT} = 1.0 - \left( \frac{\sqrt{3}a}{\varepsilon_{eq}} \right) \times \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon_{eq} - \sqrt{3}a}{b - \sqrt{3}a} \right) \right] & \text{if } \varepsilon_{eq} > \sqrt{3}a \end{array} \right.$$

تابع آسیب در حالت برش خالص

(۲۹-۵)

$$\omega_{SH} = 0.5 \times (\omega_C + \omega_T)$$

تابع آسیب در حالت برش + فشار

(۳۰-۵)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega_C = d \times \varepsilon_{eq} & \text{if } \varepsilon_{eq} \leq e \\ \omega_C = f (\varepsilon_{eq} - e)^2 + g (\varepsilon_{eq} - e) + h & \text{if } e < \varepsilon_{eq} \leq i \\ \omega_C = 1.0 - \left( \frac{j}{\varepsilon_{eq}} \right) \times \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon_{eq} - i}{k - i} \right) \right] & \text{if } \varepsilon_{eq} > i \end{array} \right.$$

تابع آسیب در حالت برش + کشش

(۳۱-۵)

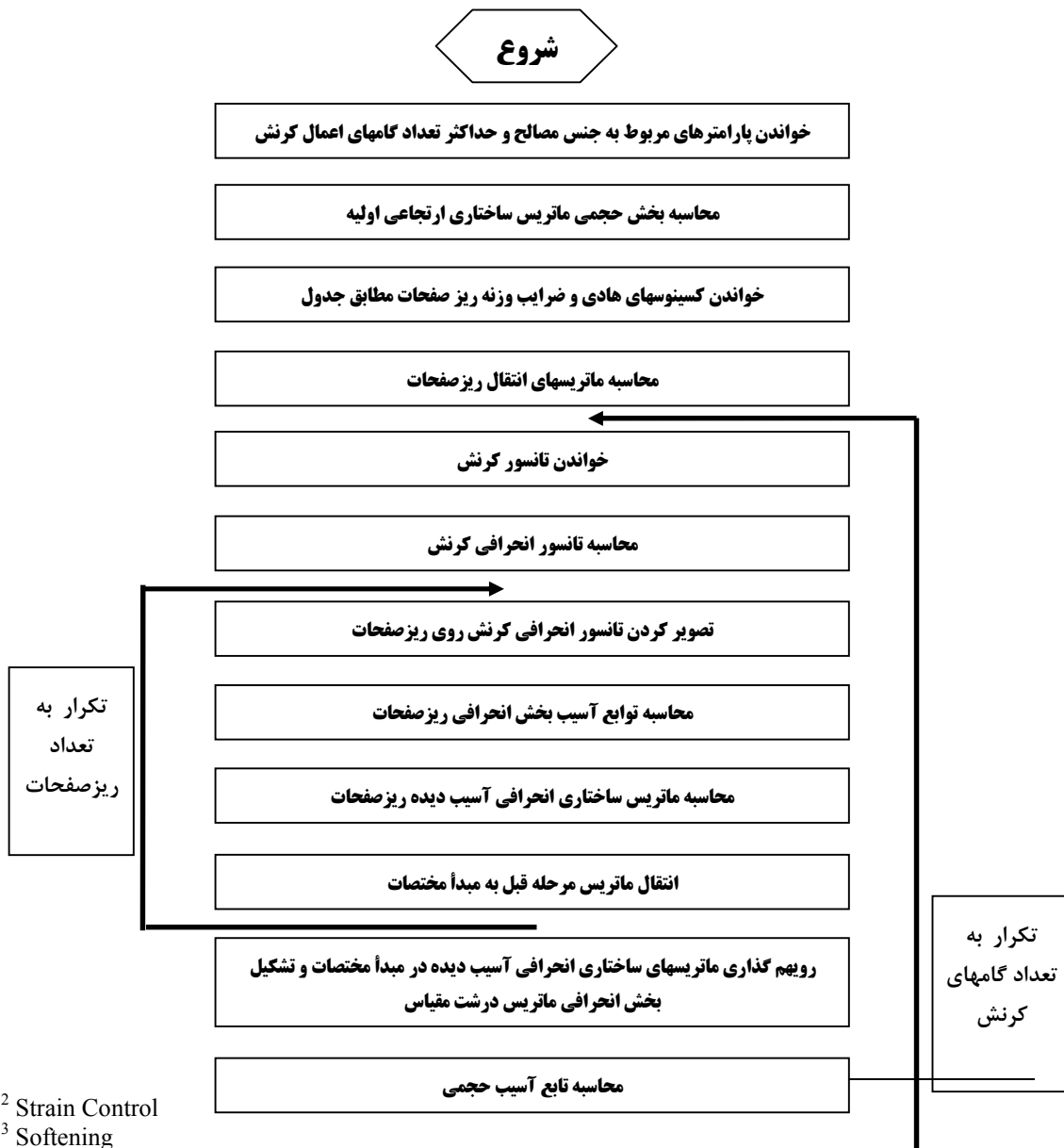
$$\left\{ \begin{array}{ll} \omega_T = 0.0 & \text{if } \varepsilon_{eq} \leq a \\ \omega_T = 1.0 - \left( \frac{a}{\varepsilon_{eq}} \right) \times \exp \left[ - \left( \frac{\varepsilon_{eq} - a}{c - a} \right) \right] & \text{if } \varepsilon_{eq} > a \end{array} \right.$$

پارامترهای  $a$  تا  $k$  به کار رفته در روابط بالا با توجه به نتایج آزمایشگاهی بدست آمده برای بتن مورد نظر در آزمایشهای فشار تک محوری، کشش تک محوری و فشار سه محوری تعیین می شوند. این مقادیر درون زیر برنامه مدل رفتاری بتن تعریف شده‌اند که در پیوست بطور کامل آمده است. جمله  $\varepsilon_{eq}$  به کار رفته در روابط بالا همان کرنش معادل یا کرنش هم ارز<sup>۲۸۱</sup> است و در حالت‌های دو بعدی و سه بعدی ناگزیر از به کار بردن آن برای نمایش عددی سطح تانسور کرنش هستیم. کرنش هم ارز یاد شده در مطالعه حاضر به کار رفته در معادله (۶-۹) برابر با کرنش حجمی یا کرنش میانگین و در معادلات دیگر برابر با بزرگی بردار کرنش انحرافی تصویر شده روی ریز صفحات در نظر گرفته شده است. در شکل ۵-۱۲ الگوریتم روش حل مدل رفتاری به کمک

<sup>1</sup> Equivalent Strain



رایانه نشان داده شده است . نکته قابل ذکر آن است که مدل رفتاری توسعه داده شده در حالت کنترل کرنش<sup>۲۸۲</sup> است تا بتواند رفتار نرم شوندگی<sup>۲۸۳</sup> بتن را پس از نقطه اوج منحنی تنش - کرنش نمایش دهد .



محاسبه بخش حجمی آسیب دیده ماتریس ساختاری درشت مقیاس

محاسبه ماتریس ساختاری درشت مقیاس

محاسبه نانسور تنش

پایان

شکل ۵-۱۲- الگوریتم زیربرنامه مدل رفتاری مورد استفاده

## ۵-۶- نرم افزار حل عددی به روش بدون المان گالرکین

با توجه به الگوریتم مدل رفتاری که شرح آن در قسمت قبلی داده شد و نیز پیش از آن که نحوه حل مسائل غیرخطی را به کمک روش بدون المان گالرکین بیان گردید، نرم افزار مورد نظر در بستر MATLAB تهیه شد. این نرم افزار شامل یک برنامه اصلی که وظیفه ایجاد هندسه شکل (در حالات هندسه پیچیده تر زیربرنامه مخصوص نوشته شده) و شبکه انتگرالگیری و نیز تشکیل ماتریسهای گرهی و ماتریس سیستم و نهایتاً نمایش نتایج را به عهده دارد و تعدادی زیربرنامه که هر کدام قسمتی از الگوریتم حل را به انجام می رسانند می باشد. در ادامه به وظیفه هر کدام از آنها اشاره مختصری خواهد شد.

Root برنامه اصلی است که به آن اشاره شد. برنامه ابتدا مقادیر اولیه ای برای ماتریسهای سختی و نیرو و در صورت نیاز تغییر مکان تعریف می کند و سپس با توجه به تعداد نقاط گرهی و نیز نقاط گوسی مورد نظر کاربر و هندسه شکل که برای آن تعریف شده است مسأله را مشخص می نماید.

آنگاه برای رسیدن به جواب مناسب و دوری کردن از ماتریسهای منفرد در مسیر حل برای هر نقطه دامنه حمایتی را بشکل متغییر در نظر میگیرد. این امر با توجه به تعداد جملات پایه مورد استفاده در ایجاد توابع شکل تغییر میکند و در حل اغلب مسائل مورد بررسی بعلت استفاده از توابع پایه خطی در حالت سه بعدی که دارای چهار جمله می باشد معیاری برابر حداقل ۱۰ نقطه موجود در دامنه در نظر گرفته شد تا امکان دسترسی به جواب مناسب حاصل گردد.

این مسأله به این خاطر مورد توجه قرار گرفته که افزایش دامنه حمایتی بطور غیر منطقی باعث افزایش بی فایده ماتریسهای محاسباتی می شود که خود نه تنها زمان محاسبات را بسیار بالا میبرد، بلکه حافظه دستگاه محاسب را گاه تا حد قطع محاسبات و ناتوانی دستگاه در ادامه حل تحت تاثیر قرار داده و مانع ادامه کار میشود. از این رو حتی المقدور لازم است که با استفاده از تکنیک های خاص محاسبات و حافظه دستگاه بصورت بهینه مورد استفاده قرار گیرد که در این زمینه تلاش زیادی صورت گرفته است.

زیربرنامه `func_shapef` در این مرحله با توجه به نیاز مسأله توابع شکل را بصورت سه بعدی، دوبعدی و یا با استفاده از توابع وزن مختلف برای هر نقطه گوسی محاسبه کرده و در مرحله بعد ماتریس **B** تشکیل می شود. در این مرحله ماتریسهای سختی گرهی ایجاد شده و بعد از آن با رویهم گذاری آنها ماتریس سیستم ایجاد می شود. بدین شکل تغییرمکان گرهی سازه تعیین می شود.

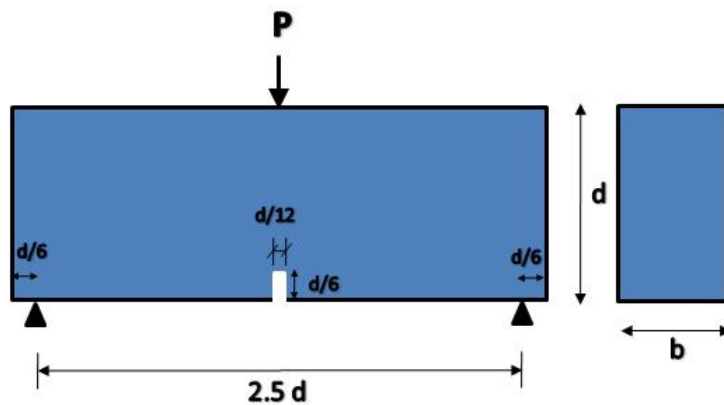
در این مرحله با توجه به روابط شرح داده شده بترتیب کرنش ماکروسکوپی و پس از آن با زیربرنامه `func_micro3d` و تبدیلات لازم که در الگوریتم مربوطه شرح داده شده است به ماتریس تنش در سازه مورد نظر دست پیدا می کنیم و نهایتاً نتایج بصورت گرافیکی نمایش داده می شوند.

## ۵-۷- صحت سنجی و مقایسه با نتایج آزمایشگاهی

در این مرحله برای بررسی اعتبار عملکرد نرم افزار تهیه شده چند مسئله استاندارد موجود در مراجع [۶۶ و ۶۷] و نیز مرجع [۶۴] انتخاب شده و نتیجه تحلیل آنها بوسیله نرم افزار پیشنهادی با نتایج موجود در مراجع یادشده مقایسه شده اند .

### ۵-۷-۱- آزمایش خمشی سه نقطه ای<sup>۲۸۴</sup> [۶۷]

در شکل ۵-۱۳ هندسه مسئله نشان داده شده است . همانطور که ملاحظه می شود یک شکاف باریک در سطح تحتانی تیر بتنی ایجاد شده تا محل شروع ترک خمشی از قبل تعیین شده باشد . عمق شکاف  $d/6$  و ضخامت آن  $d/12$  است .



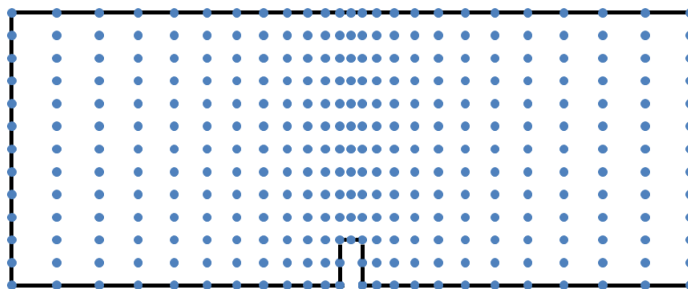
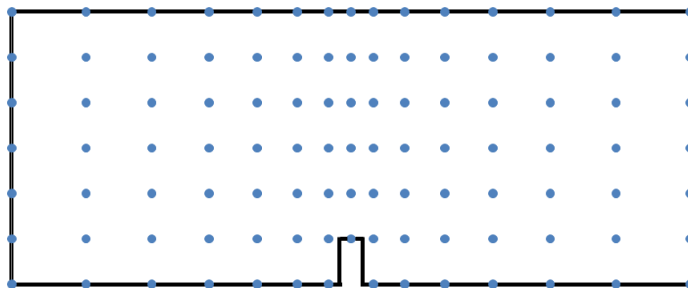
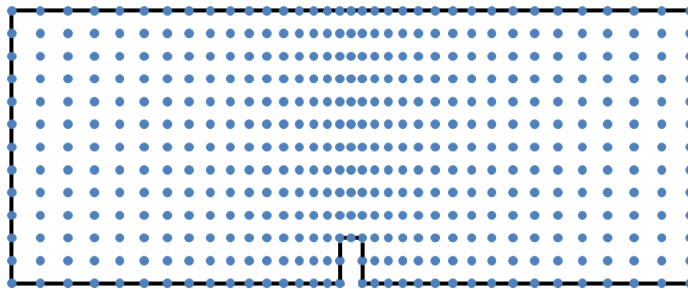
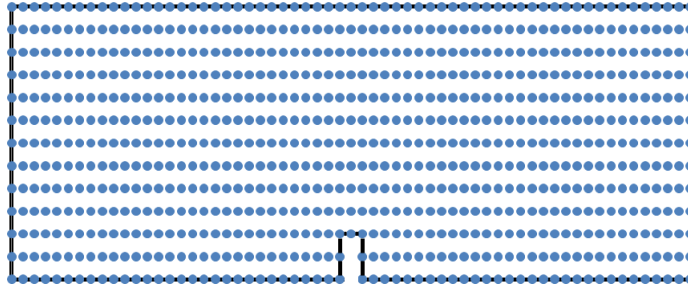
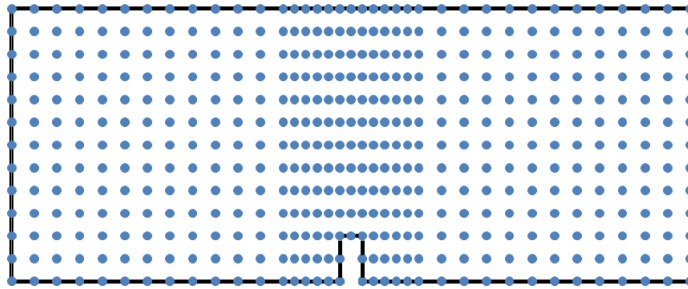
$$d = 7.62 \text{ cm}; \quad b = 3.81 \text{ cm}$$

شکل ۵-۱۳- هندسه آزمایش خمشی سه نقطه ای [۶۶]

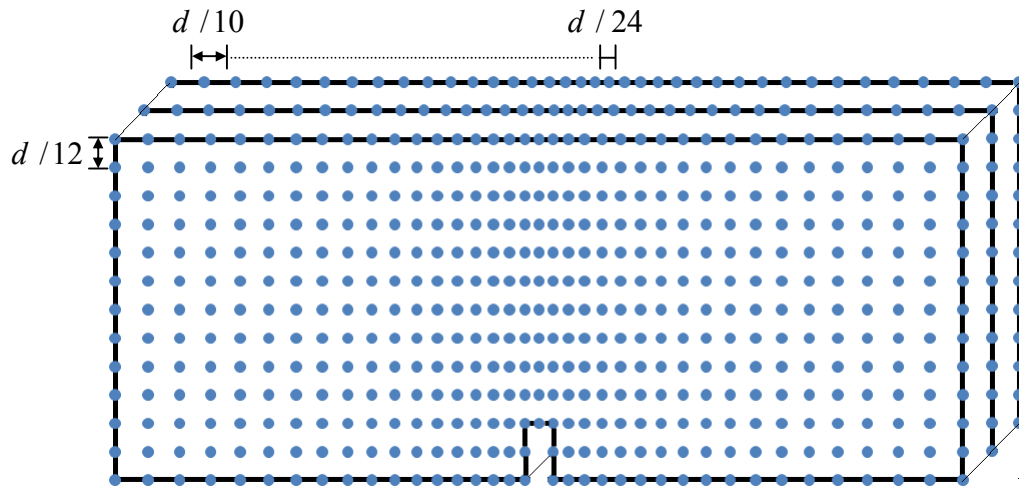
<sup>1</sup>Three-Point Bending Test

بار نقطه ای  $P$  درست در امتداد وسط شکاف اعمال می شود. ضریب ارتجاعی بتن  $E$  مطابق با مرجع [۶۷] برابر با ۲۷۵۰۰ مگا پاسکال و مقدار در نظر گرفته شده است. در اینجا به بررسی شکل و تعریف هندسه مدل برای نرم افزار می پردازید. همانگونه که مشخص است باید برای دستیابی به نتایج دقیق از تعداد بیشتری گره در مسأله استفاده کنیم و ولی با توجه به این مسأله که با افزایش تعداد گره‌ها ابعاد ماتریسهای ایجاد شده در مسأله بشدت افزایش یافته و این خود زمان و حافظه محاسباتی را شدیداً تحت الشعاع قرار می‌دهد باید در این زمینه راه بهینه برگزیده شود. در شکل ۱۴-۵ تعدادی از ترکیب‌های مختلف برای گره گذاری به گونه ای که دقت مسأله را مخصوصاً در اطراف شکاف تأمین نماید نشان داده شده است. نهایتاً برای مدل کردن مسأله بر اساس معیارهای مرجع [۶۴] و برای ایجاد شرایط مشابه همان تعداد نقاط گرهی در برنامه پیاده سازی شد که برای ممانعت از تکینه شدن ماتریسهای موجود تغییراتی در توزیع گره‌ها ایجاد گردید، بدین شکل که فاصله قائم گره‌ها برابر آنچه در اجزاء محدود داریم و  $d/12$  می باشد و فاصله افقی گره‌ها از  $d/10$  تا  $d/24$  در محل شکاف بصورت خطی تغییر می کند تا دقت پاسخ تأمین گردد. در جهت عمود بر صفحه اعمال بار نیز بفاصله  $b/3$  نقاط گرهی قرار گرفته اند.

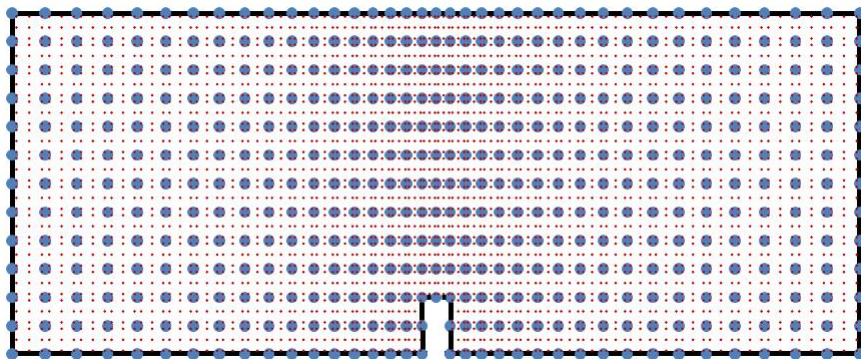
باید متذکر شد که با توجه به حساسیت بالای روش بدون المان گالرکین و بطور کلی تمام روشهای بدون شبکه به نحوه توزیع گره‌ها انتخاب این امر حاصل تکرارهای فراوان و اجرای متناوب برنامه تا رسیدن به جواب مطلوب و همگرا بود که نتیجه نهایی در مطالعه حاضر آورده شده و از بازگویی تمامی حالات و نتایج مختلف اجتناب شده است.



شکل ۵-۱۴- تعدادی از توزیع های انتخابی برای نقاط در نرم افزار



شکل ۵-۱۵- توزیع نقاط مدل مورد استفاده در نرم افزار

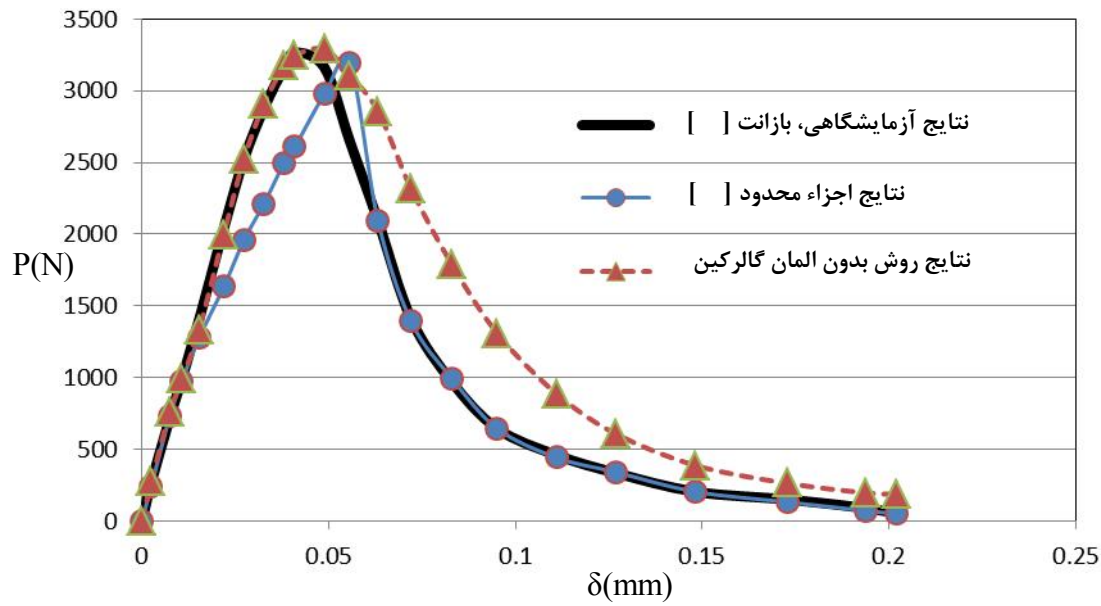


شکل ۵-۱۶- توزیع نقاط گرهی و نقاط گوسی مورد استفاده در مدل حاضر

در شکل ۵-۱۷ منحنی بار- تغییر مکان بدست آمده از نرم افزار با منحنی موجود در مرجع [۶۶] و نیز نتایج حاصل از روش اجزاء محدود در مرجع [۶۴] مقایسه شده است. چنانکه مشاهده می شود تطابق خوبی میان نتایج مدل و نتایج آزمایشگاهی وجود دارد.

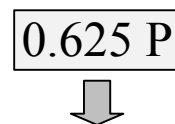
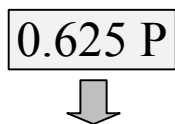
حداکثر بار وارده بدست آمده در مرجع [۶۶] برابر ۳۲۶۰ نیوتن و مقدار نظیر توسط مدل ۳۱۸۰ نیوتن بدست آمده است. مقدار بدست آمده در آزمایش طبق گفته مرجع [۶۶] برابر با ۳۱۰۵ نیوتن است. لذا مشاهده می شود که درصد خطای مدل نسبت به آزمایش کوچک است.

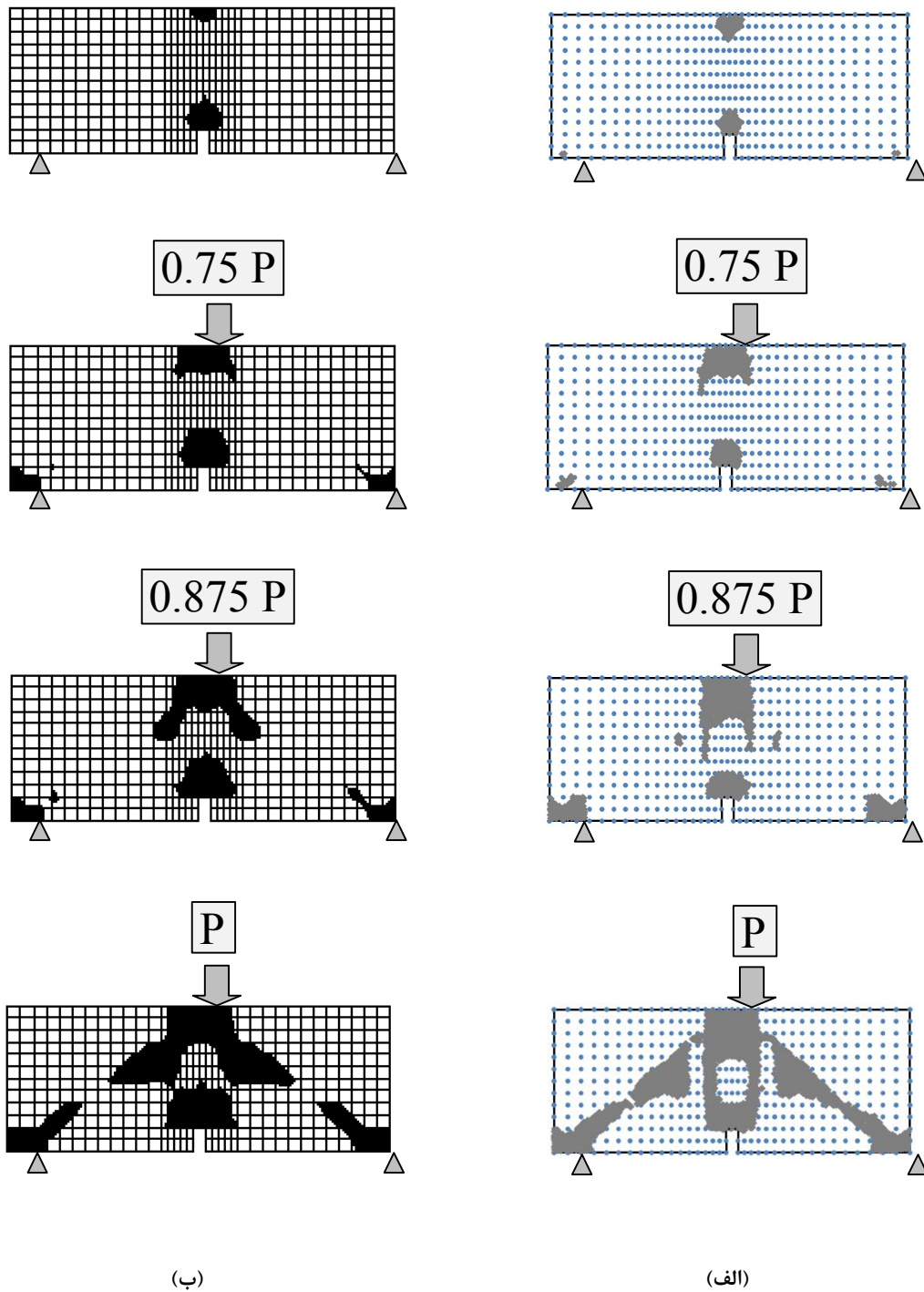




شکل ۵-۱۷- منحنی بار - تغییر مکان در آزمایش خمش سه نقطه ای

نکته قابل ذکر آنکه در مرجع [۴۶] ترکهای برشی ظهور پیدا نمی کنند حال آنکه در مدل مورد مطالعه ما همانطور که در شکل ۵-۱۸ دیده می شود این نوع ترکها هم گسترش می یابند. این مسئله می تواند ناشی از تفاوت در شرایط مرزی واقعی آزمایش و شرایط مرزی مدل باشد.





شکل ۵-۱۸- نحوه گسترش ترک در بتن الف- روش بدون گالرکین ب- روش اجزاء محدود [۶۴]

همانطور که در شکل ۵-۱۸ می بینیم ترک خمشی از محل شکاف شروع می شود و در امتداد بار گسترش می یابد و کم با افزایش نیروهای برشی در تیر، ترکهای ناشی از برش از محل تکیه

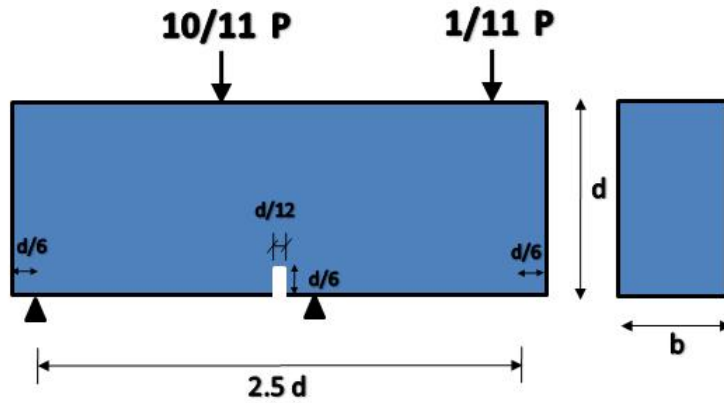
گاهها به سمت نقطه اعمال بار به زاویه ۴۵ شروع به انتشار می کنند . نحوه انتشار ترک در دو روش تحلیل ( عناصر محدود و بدون المان گالرکین) بسیار به هم نزدیک است . لازم به ذکر است که برای آنکه مقایسه در شرایط مشابه صورت گیرد در هر دو روش تعداد گره ها و نقاط انتگرال گیری با هم برابر است . در تحلیل به روش عناصر محدود تعداد ۴۲۸ المان سه بعدی ۸ گرهی و ۹۵۸ گره و ۳۴۲۴ نقطه انتگرال گیری استفاده شده است . در مقابل در روش بدون المان گالرکین هم ۹۵۸ گره و ۳۸۷۰ نقطه انتگرالی به کار رفته است تا مقایسه در شرایط تقریباً یکسان صورت گیرد.

## ۵-۷-۲- آزمایش برش چهار نقطه ای غیر متقارن<sup>۲۸۵</sup>

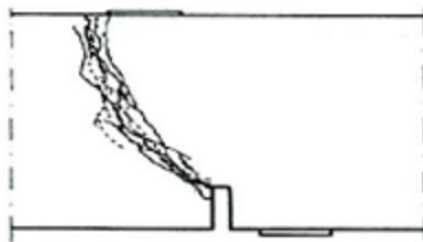
---

<sup>1</sup> Antisymmetric Four-Point Shear

شکل ۵-۱۹ هندسه مسئله و نحوه انتشار ترک را نمایش می دهد.

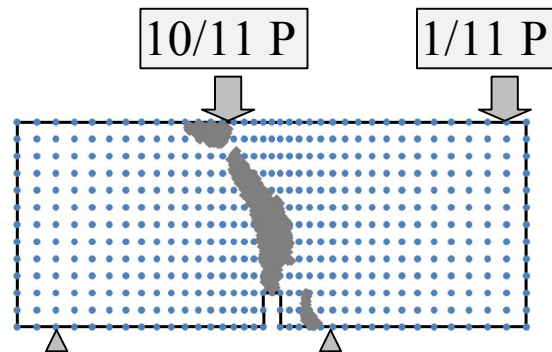
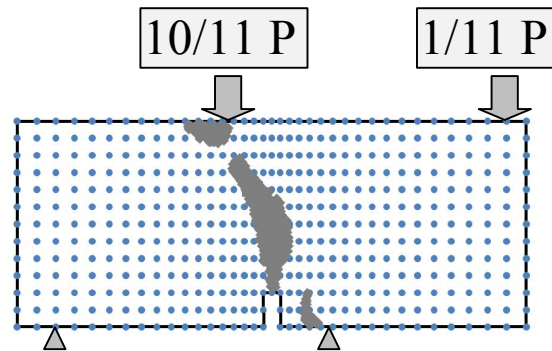
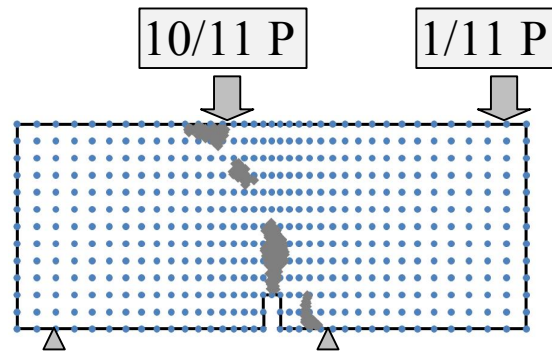


$$d = 7.62 \text{ cm}; \quad b = 3.81 \text{ cm}$$



شکل ۵-۱۹- هندسه آزمایش چهار نقطه ای برشی [۶۶]

ضریب ارتجاعی بتن در این مسئله همانند مسئله قبل است . ضخامت تیر هم مانند مسئله قبل در جهت عمود بر صفحه ۳۸ سانتیمتر است. نحوه مدلسازی و توزیع نقاط گرهی و گوسی مانند همان چیزی است که برای مسأله قبل در نظر گرفتیم. در شکل ۵-۱۹ مسیر رشد و انتشار ترک که بوسیله مدل مورد مطالعه بدست آمده نشان داده شده است.



شکل ۵-۲۰- نحوه گسترش ترک در بتن در روش بدون المان گالرکین

همانطور که دیده می شود تطابق خوبی میان نتایج روش بدون المان گالرکین و نتایج واقعی وجود دارد و با مقایسه شکل ۵-۱۹ و شکل ۵-۲۰ می شود که مدل مورد مطالعه مسیر انتشار ترک را به خوبی مدل می کند.

## فصل شش

# تحلیل استاتیکی سد شهیدعباسپور به روش بدون المان گالرکین و مدل ریزصفحات

### ۶-۱- مقدمه

در این بخش فرآیند تحلیل و ارزیابی سد بتنی دوقوسی شهید عباسپور (کارون ۱)، تحت بارهای استاتیکی بررسی می‌گردد. روش مورد قبول و سنتی تحلیل برای محاسبه تغییر شکلها و توزیع تنش در سد، روش اجزاء محدود می‌باشد و در اینجا اینکار با کمک روش بدون المان گالرکین و مدل رفتاری بتن که در قسمتهای قبلی شرح داده شده‌اند بوسیله برنامه نویسی در نرم‌افزار MATLAB توسط نگارنده انجام شده است. هر روش تحلیلی تنش در سد باید با مدل سازی دقیق سه بعدی سیستم سد و پی انجام شود و حالت‌های مختلف بارهای استاتیکی مشخص

گردد. نتایج تحلیل باید به شکل مناسبی ارائه گردد تا بررسی، تفسیر و ارزیابی اطلاعات به سهولت میسر شود.

## ۲-۶- فرضیات مدلسازی

تحلیل روش بدون المان گالرکین برای سد قوسی برپایه همان فرضیات در نظر گرفته شده برای تمامی تحلیلهای دیگر از جمله اجزاء محدود استوار است. در واقع اصول اولیه حاکم بر اعمال بارها، مدلسازی و فرضیات ساده کننده تحلیل مانند سایر تحلیلهای مکانیک جامدات، در تحیل سدهای قوسی نیز معتبر می باشد. اما مانند روش اجزاء محدود در اینجا نیز باید ملاحظات خاصی را در نظر گیریم:

۱- بطور معمول فرض می شود که بدنه سد در تمامی فصل مشترک خود با دره، بوسیله صخره پی مقید شده، اما اعتبار این فرضیه از مدل سازی اغلب به نتایج بدست آمده از تحلیل بستگی پیدا می کند. اگر این فرض منجر به تنشهای برشی یا کششی زیادی در سطح تماس با پی گردد، در این صورت باید این فرض از مدل سازی اصلاح شود.

۲- فرض می شود که سد، یک سازه یکپارچه با خواص مصالح کشسان- خمیری غیرخطی و ناهمسانگرد می باشد. اما درواقع سدهای قوسی معمول، با درزهای اجرائی، درزهای انقباض و ترکهای موجود تقسیم بندی می شوند که مدل سازی آنها، خارج از حوصله پایان نامه حاضر می باشد.

۳- صخره پی بصورت یک جسم یکپارچه با خواص مصالح کشسان خطی و همسانگرد فرض می‌گردد، در حالیکه در واقع دارای خصوصیات غیرخطی می‌باشد. استفاده از مدول تغییر شکل<sup>۲۸۶</sup> به جای مدول یانگ واقعی<sup>۲۸۷</sup>، کوششی جهت بررسی دقیق‌تر عملکرد پی می‌باشد.

### ۳-۶- مدل سد

داده‌های هندسی اولیه جهت تولید مدل سه بعدی برای سد را می‌توان از نقشه‌های اجرائی بدست آورد. در برخی موارد جهت کنترل صحت این داده‌ها، نیاز به بازرسی بصری و احتمالاً نقشه برداری در محل برای اطمینان از مطابقت نقشه‌ها با شرایط موجود در سد می‌باشد. به عنوان مثال تخریب شدید لایه بتن در مجاورت سطح سد می‌تواند باعث کاهش مقاومت گردد و در این حالت پیشنهاد می‌شود که کاهش در ضخامت سد و یا در مدول کشسان اعمال گردد تا در مدل‌سازی به شرایط واقعی نزدیکتر شویم. در حالت‌های دیگر، اصلاحات سازه‌ای صورت گرفته روی سد ممکن است بصورت افزایش سختی و جرم سد باشد. بلوکهای رانشی ثقیل ممکن است در یک یا دو سمت کوله‌های سد موجود باشند - که باید در مدل‌سازی لحاظ گردند. بلوکهای کوچک و کم اهمیت تر را میتوان به عنوان بخشی از پی در نظر گرفت و به صورت مجزا مدل نکرد. مدل ایجاد شده باید با هندسه سد به خوبی انطباق داشته و برای اعمال بارهای مختلف مناسب باشد.

### ۳-۶-۱- برنامه DSHAPE

با توجه به اینکه هندسه نامنظم سد دوقوسی باید بنحوی در نرم افزار اصلی تحلیل عددی بدون المان گالرکین مدل شود از زیربرنامه خاصی استفاده شده است. این زیربرنامه با عنوان *DSHAPE* که توسط نگاره تهیه شده از ورودی‌هایی براساس مشخصات سد از جمله خطوط

<sup>286</sup> deformation modulus

<sup>287</sup> actual youngs modulus



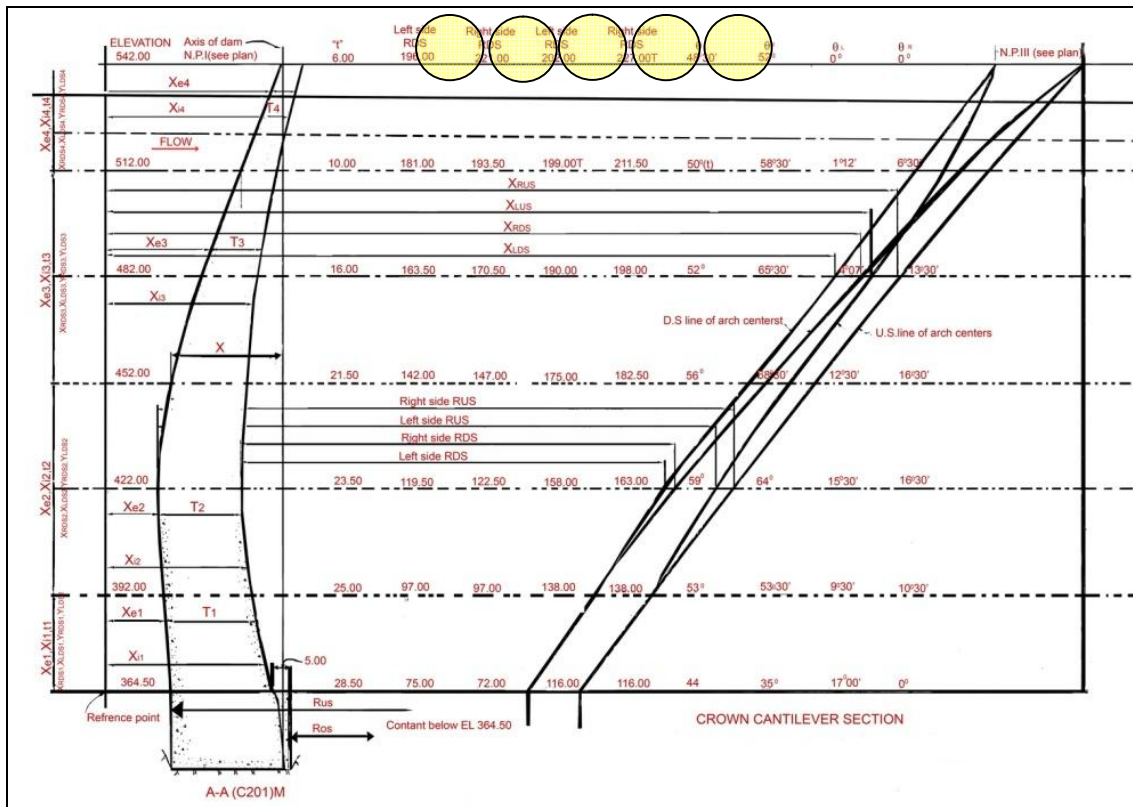
مراکز، شعاع قوسها و سایر جزئیات هندسی سد استفاده نموده و هندسه سد را بنحوی که قابل ارائه به برنامه اصلی باشد ایجاد می نماید. هندسه سد که خروجی این زیربرنامه است شامل نقاط با فواصل تعیین شده می باشد که دارای مختصات مشخص بوده و در برنامه اصلی بصورت گره های مساله در نظر گرفته می شوند.

حال برای تهیه مدل ابتدایی نیاز به نقاطی وجود داشت که بیانگر هندسه سد باشند که این امر با استفاده از نقاط برداشت شده از نقشه ها و برای نقاط میانی برداشت از منحنی های برآزش شده امکانپذیر گردید. این زیربرنامه قادر است که برای تمامی سدهایی که دارای مشخصات مشابه بوده و نقشه های آنها در دسترس باشند بکار رود و از این جهت می تواند کاربرد گسترده ای در تحلیل سدهای بتنی قوسی بوسیله نرم افزارهای تحلیلی حتی اجزاء محدود که نیازمند تولید هندسه سد قبل از تحلیل دارند داشته باشد. در پیوست این زیربرنامه که توسط کدهای MATLAB نوشته شده آمده است.

همانطور که در شکل ۶-۱ مشاهده می شود مطابق نقشه های موجود سد شهید عباسپور سدی دو قوسی دارای دو مرکز انحناء در طرف چپ و راست است که مقادیر شعاع و زوایای قوسها در ارتفاعات ۵۴۲، ۵۱۲، ۴۸۲، ۴۲۲، ۳۸۲ و ۳۶۴ متر در شکل نشان داده شده اند.

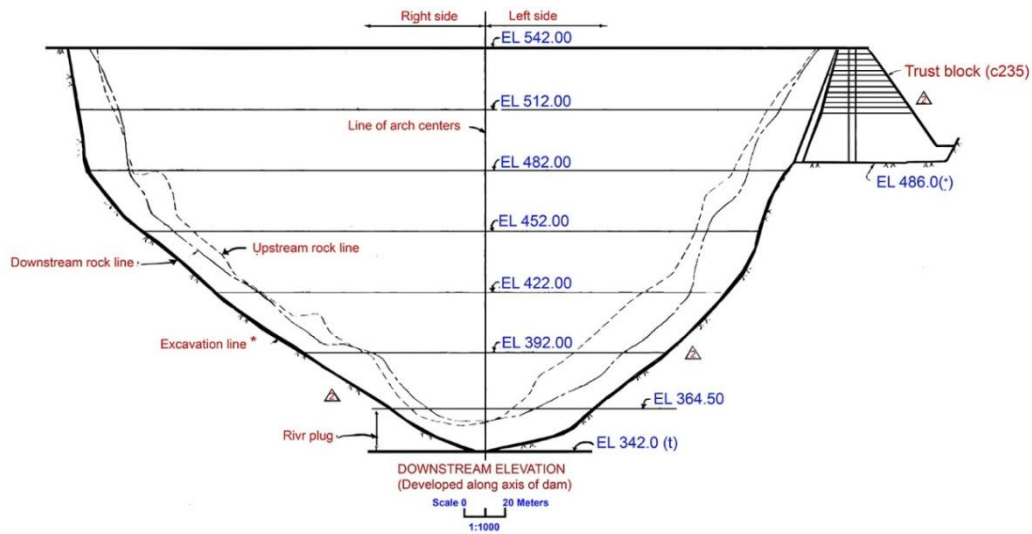
شعاع قوس در جناح چپ سد در سطح پایین دست

زاویه قوس در جناح راست سد در سطح پایین دست



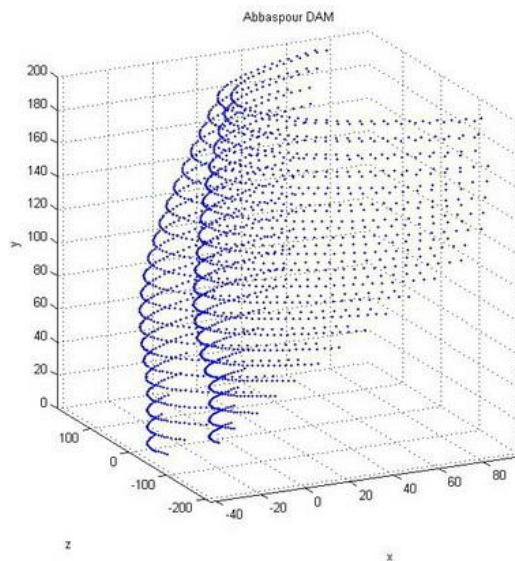
شکل ۶-۱- مقطع سد در محل طره مرکزی و منحنی مراکز قوسها سد شهید عباسپور





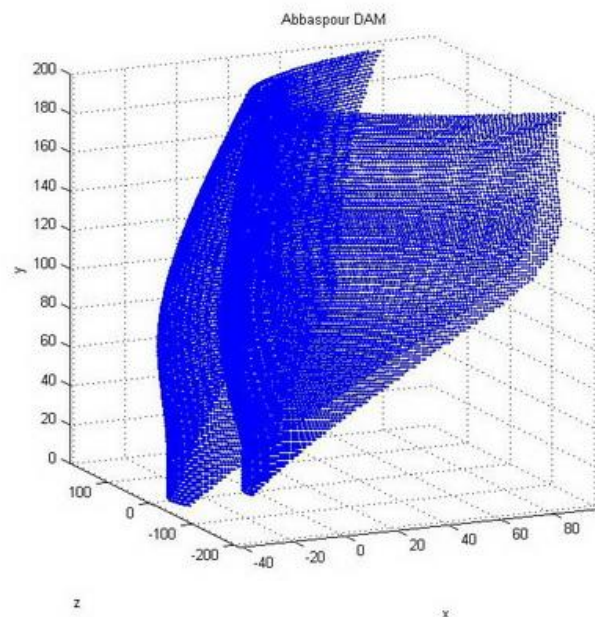
شکل ۶-۳- نمای پایین دست سد دو قوسی بتنی شهید عباسپور

در خروجی مختصات نقاط مورد نیاز جهت ایجاد مدل کامپیوتری سد شهید عباسپور بدست آمد. این نقاط کلیدی که بر اساس روابط قوسها و طره ها تعیین شده‌اند در شکل بصورت ۳ بعدی نشان داده شده‌اند. لازم به ذکر است که در این مرحله تعیین فواصل نقاط بر اساسی انتخاب گردید که دقت مورد نیاز ارضا شود.



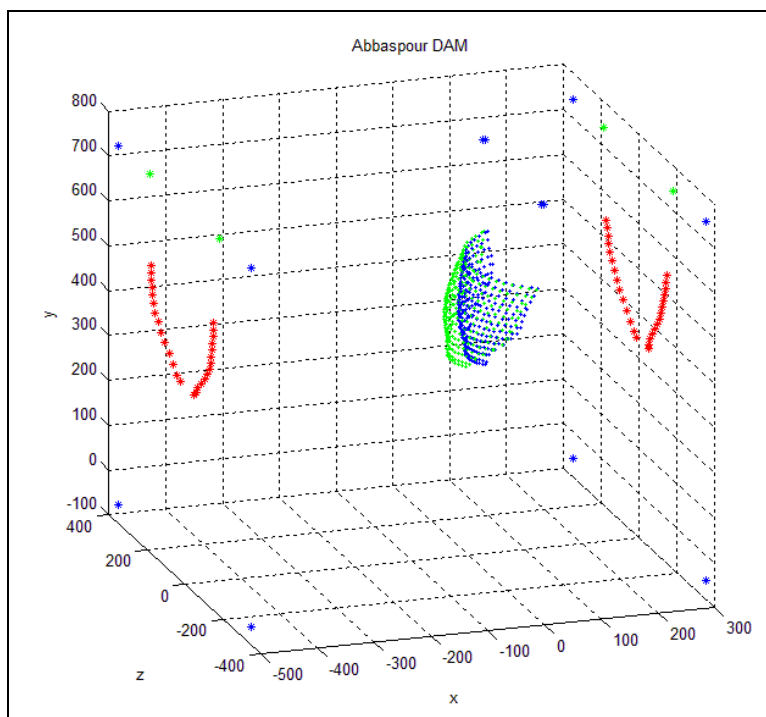
شکل ۶-۴- نمایش ۳ بعدی هندسه نقاط گرهی تولید شده توسط نرم افزار DSHAPE برای بدنه سد در حالت فواصل نقاط

۱۰متری



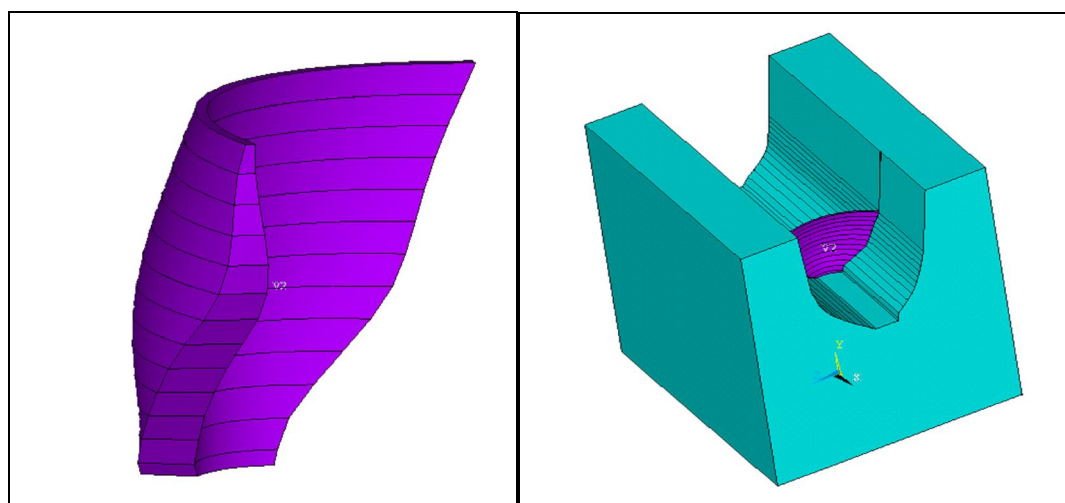
شکل ۶-۵- نمایش ۳ بعدی هندسه نقاط گرهی تولید شده توسط نرم افزار *DSHAPE* برای بدنه سد در حالت فواصل نقاط ۲ متری

در این مرحله نیاز است که تکیه گاه سد برای مدلسازی بگونه ای منظور شود که در برنامه های تحلیل سد مدل سد و تکیه گاه حتی الامکان به حالت واقعی نزدیک باشد و در عین حال از زمان محاسباتی اضافی اجتناب گردد. بدین منظور برای سد حاضر از فرضیات معمول که تکیه گاه سد را در بالادست به اندازه ۲/۵ برابر ارتفاع سد یعنی ۵۰۰ متر، در پایین دست ۱ برابر ارتفاع سد یعنی ۲۰۰ متر، در جهت عمودی بالای سد به اندازه ارتفاع سد (۲۰۰ متر) و در عمق به اندازه ۲ برابر ارتفاع سد (۴۰۰) متر امتداد می دهد استفاده شد.



شکل ۶-۶- مدل ۳ بعدی نقاط کلیدی سد و تکیه‌گاه خروجی برنامه *DSHAPE*

همانطور که در شکل ۶-۶ ملاحظه می‌شود مدل فیزیکی سد بصورت مختصات نقاط کلیدی در این مرحله بگونه‌ای بدست آمده که بتوان از آن برای ایجاد مدل مورد نیاز در نرم‌افزار اصلی تحلیلی بدون المان مورد نظر استفاده نمود.



شکل ۶-۷- مدل حجمی تکیه‌گاه و بدنه سد شهید عباسپور

## ۴-۶- مدل پی

حجم مناسبی از صخره پی باید همراه سد مدل شود تا تاثیر انعطاف پذیری پی در محاسبه تنشها و تغییر شکلهای سد لحاظ گردد. مدل پی باید تا فاصله‌ای امتداد داشته باشد که بعد از آن فاصله، اثر پی در تغییر شکلهای و تنشهای ایجاد شده در سد قابل اغماض باشد. اگر چه شبکه مش اجزاء محدود برای صخره پی باید مطابق با شرایط توپوگرافی محل باشد، اما در عمل نیازی به ساخت مدل بسیار دقیق و پر زحمت پی نبوده و در واقع با تصویر کردن ساده بخشهای انتهایی پی در امتداد محورهای مختصات کلی، شبکه پی گسترش می‌یابد. معمولاً از فواصل در مجاورت ناحیه تماس پی با سد، یعنی ناحیه تغییر شکلهای و تنشهای بزرگتر، استفاده شده و در نواحی دورتر از سد -که اثر عملکرد توام سد با پی کاهش می‌یابد- از فواصل بزرگتری برای گره‌ها استفاده می‌شود.

در جدول زیر مشخصات بتن بدنه سد کارون ۱ و پی آن که در برنامه مورد استفاده قرار گرفته آورده شده است.

جدول ۱-۶- مشخصات بدنه سد کارون ۱ و تکیه گاه

تکیه گاه سنگی	بدنه سد	
2000	2500	دانسیتته ( $\text{Kg m}^{-3}$ )
40	21	مدول یانگ (GPa)
0.25	0.2	نسبت پواسون
0.1	1.2	انتقال حرارت
9.9e-6	7e-6	ضریب انبساط ( $1/\text{C}^\circ$ )
2000	1000	گرمای مخصوص ( $\text{C}^\circ$ )

## ۵-۶- اعمال بارها

سدهای قوسی، تحت بارهای متعددی قرار دارند. بارها را می‌توان به دو بخش اولیه استاتیکی و دینامیکی تقسیم کرد. بارهای استاتیکی بارهای دائمی هستند که یا تغییر نمی‌کنند و یا در مقایسه با دوره‌های ارتعاش طبیعی سازه<sup>۲۹۱</sup>، دارای تغییرات آهسته‌ای هستند. سختی سد عامل مقابله با بارهای استاتیکی می‌باشد. مثالهایی از بارهای استاتیکی عبارتند از: بار مرده، بار هیدرولیکی در شرایط عادی یا سیلاب، نیروهای ناشی از انبساط یخ و تنشهای داخلی ایجاد شده از تغییرات دما. بارهای دینامیکی زودگذر بوده و معمولاً چند ثانیه یا کمتر ادامه می‌یابند. بخاطر سرعت اعمال این بارها، مشخصات میرایی<sup>۲۹۲</sup> و لختی<sup>۲۹۳</sup> سد، علاوه بر سختی، در رفتار سد تاثیرگذار هستند. مثالهایی از بارهای دینامیکی عبارتند از: نیروهای ناشی از زمین لرزه، نیروهای ناشی از انفجار، نیروهای لرزش آب روی سرریز و یا نیروهای ایجاد شده از برخورد یخ، قایق و غیره به بدنه سد. شایان ذکر است که در جهت در نظر گرفتن اثر حرارت بشکل ساده شده و دست بالا تغییرات درجه حرارت به میزان ۴۰ درجه سانتیگراد محاسبه شده و کرنشها وارد برنامه شده‌اند.

در روش تحلیل استاتیکی، بارهای استاتیکی برای هر یک از عناصر حساب می‌شود و بصورت نیروهای معادل گره‌ای بر مدل سد اعمال می‌گردد. بار آب، ناشی از فشارهای ایستائی<sup>۲۹۴</sup> تراز معمول آب<sup>۲۹۵</sup> و یا سیلاب می‌باشد که به صورت بارهای خارجی، تمامی گره‌های در تماس با آب، اعمال می‌گردد. این گره‌ها شامل گره‌های سد در تماس با آب و گره‌های دیواره‌ها و کف مخزن می‌باشد.

291 natural periods of vibration of the structure

292 damping

293 inertial

294 hydrostatic pressures

295 normal water level



بارهای قائم آب، شامل فشارهای ایستائی بر روی وجوه سد می‌باشد که از آب مخزن (سراب<sup>۲۹۶</sup>) و پایاب<sup>۲۹۷</sup> نتیجه می‌شود. ارتفاع آب مخزن مطابق با حداکثر تراز طبیعی آب<sup>۲۹۸</sup> در نظر گرفته می‌شود - که این تراز معمولاً برای سرریزهای بدون دریچه، ارتفاع تاج سرریز بوده و برای سرریزهای دریچه دار ارتفاع بالای سرریز لحاظ می‌گردد. ارتفاع آب پایاب را می‌توان از ثبتهای انجام شده بدست آورد.

برای محاسبه بارهای قائم آب، تغییرات فشار آب در سراب و پایاب نسبت به عمق به صورت خطی در نظر گرفته می‌شود که برسطوح سد به صورت عمودی اعمال می‌گردد. فشار آب سراب به غیر از سطح سد، باید بر صخره پی در کف و جناحین دره نیز اعمال گردد تا آب مخزن باعث تغییر شکل صخره پی و در نتیجه باعث تغییرات تنش و تغییر شکل در بدنه سد گردد.

با توجه به اعمال فشار آب پایاب در خلاف جهت آب مخزن، به طور کلی، پایاب باعث ایجاد تنش‌هایی با علامت مخالف تنشهای ناشی از آب مخزن شده و بنابراین باعث کاهش هم تنشهای فشاری و هم تنشهای کششی در عمق کمتر از تراز پایاب می‌شود. اگر عمق آب پایاب کمتر از ۲۰٪ ارتفاع سد باشد، این تاثیر کاهش می‌یابد. به همین خاطر برای در نظر گرفتن حالتی محافظه کارانه و همچنین به منظور سادگی، از بارهای پایاب در تحلیل تنش سد قوسی مورد نظر صرف‌نظر می‌شود. اما، پایاب روی فشار برکنش<sup>۲۹۹</sup> در صفحات گسیختگی مورد بررسی در تحلیل پایداری

<sup>296</sup> headwater

<sup>297</sup> tailwater

<sup>298</sup> Normal High Water Level (NHWL)

<sup>299</sup> uplift pressure

لغزش، موثر بوده و باید در نظر گرفته شود که البته این بررسی، خارج از اهداف تعریف شده در این پایان نامه می باشد.

## ۶-۶- ارائه نتایج

نتایج اولیه تحلیل، شامل تغییر مکانهای گره‌ها و تنشهای موجود در نقاط گوسی می باشد. تغییر مکانهای گره‌ها و تنشهای سطحی بوضوح و بصورت گرافیکی برای بارگذاری استاتیکی آب، شرح داده شده در بخش قبل، باید ارائه شود، بعلاوه نیروی رانش سد برای تحلیل پایداری گوه صخره مورد نیاز بوده و می توان آنرا از بارهای گره‌ای فصل مشترک سد با پی در سطح تماس بدست آورد.

اگر چه تغییر مکانها مستقیماً در ارزیابی ایمنی سد بکار نمی روند، اما ارائه گر تصویری هستند که می توان بوسیله آن، قابل قبول بودن نتایج را ارزیابی کرد. تغییر مکانها باید بصورت تغییر شکلهای ساده در مقاطع انتخابی قوسی یا طره‌ای و یا به صورت سه بعدی، برای تمامی سازه سد، ارائه گردد. در شکل ۳-۷، مثالی از تغییر شکلهای استاتیکی بدست آمده در تاج و همچنین در طره‌های سدها، ارائه شده است و همانطور که انتظار می رود بارهای ایستائی، سد را به سمت پائین دست هل می دهد.

## ۶-۷- جمع بندی

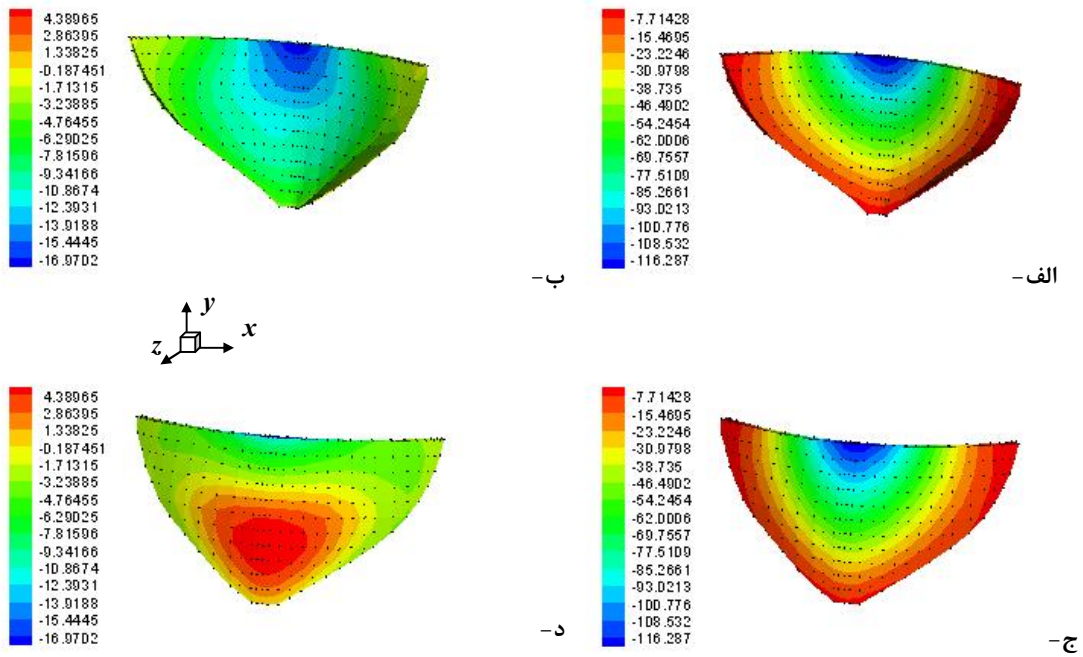
در این فصل کاربرد روش بدون جزء گالرکین بهمراه مدل رفتاری ریزصفحات در تحلیل سد دوقوسی نشان داده شد. بدین منظور ابتدا یک بررسی پارامتریک صورت گرفت که در آن فراسنجهای مناسب تحلیل در روش EFG بدست آمد. نتایج بدست آمده عبارت بودند از اینکه:

۱- انتخاب ضریب تأثیر برابر  $D_{max} = 2$  بهترین نتایج را در مورد تغییرشکل ها و تنش ها بدست می دهد و تأثیر ضریب تأثیر بر تنش ها (یا کرنش ها) بیشتر از تغییرشکل ها می باشد.

۲- تأثیر ضریب پنالتی بر نتایج بدست آمده اندک است و انتخاب ضریب پنالتی از  $10^2$  تا  $10^{10}$  برابر ماکزیمم مدول یانگ مصالح، اختلاف قابل ملاحظه ای را در حوزه تغییرشکل ها و تنش ها ایجاد نمی کند.

۳- نسبت تعداد نقاط گوسی به تعداد گره ها در صورتیکه حدود ۷ اختیار شود نتایج خوبی (در مورد تغییرشکل ها و تنش ها) بدست می دهد و تأثیر تعداد بیشتر نقاط گوسی بر دقت نتایج قابل ملاحظه نیست، حال آنکه موجب اضافه شدن حجم و زمان محاسباتی به مقدار قابل ملاحظه ای می شود.

نهایتاً باید ذکر شود که بخاطر پیچیدگی برنامه مورد استفاده در تحلیل سازه سد دوقوسی از بسیاری از نکات جهت ساده سازی و نیز کاهش زمان محاسباتی و ... صرفنظر شده است. جا دارد که در آینده از پتانسیل این روش به شکل کاملتری در جهت تحلیل دقیق تر استفاده شود.



شکل ۶-۸- تغییر مکان بدنه سد      الف- پایین دست در جهت Z      ب- پایین دست در جهت y  
 ج- بالادست در جهت Z      د- بالادست در جهت y

## فصل هفت

### خلاصه و نتیجه گیری

#### ۱-۷- مقدمه

در این فصل یافته‌های اصلی از کار انجام شده، خلاصه‌بندی شده و برخی پیشنهادات مربوط به روش بدون المان گالرکین و نیز چند صفحه‌ای ریز مقیاس، برای تحقیقات آینده، بصورت خلاصه ارائه می‌گردد.

#### ۲-۷- خلاصه تحقیق

روش بدون جزء گالرکین که تاکنون بیشتر در مسائل تحلیل تنش در حالت ارتجاعی بکار رفته است در این پایان نامه جهت تحلیل غیرخطی به کمک مدل ریزمقیاس بتن بکار گرفته شد. اساس تحلیل غیر خطی در این روش با آنچه که در روش اجزاء محدود انجام می‌شود یکی است

و مبتنی بر محاسبه تنش در نقاط گوسی و بروزرسانی موقعیت گره ها در هر مرحله از تحلیل می باشد.

برای بررسی رفتار واقعگرایانه بتن در حالت غیرخطی نیز از مدل پیشنهادی آقایان لیبب زاده و صدرنژاد که قبلاً کارایی مناسبی در ارتباط با مدلسازی در روش اجزاء محدود از خود نشان داده است استفاده شد که از طریق زیربرنامه مربوطه در برنامه اصلی تحلیل به روش بدون المان گالرکین اعمال گردید.

### ۷-۳- نتیجه گیری

بعد از مدلسازی و تحلیلهای متفاوت در روش بدون المان گالرکین می توان به معایب بارزی که در بسیاری از روشهای بدون جزء مانند روش بدون جزء گالرکین نسبت به روش اجزاء محدود وجود دارد بصورت زیر اشاره نمود :

- اعمال شرایط مرزی در روش EFG بدلیل آنکه توابع شکل مورد استفاده در این روش شرط تابع دلتای کروئکر را برآورده نمی سازند مشکلاتی همراه است. چنانچه از روش ضرایب لاگرانژ استفاده شود شرایط مرزی بطور دقیق ارضا می شوند ولی تعداد معادلات دستگاه کل دو برابر FEM می شود که حجم محاسباتی بسیار بیشتری را می طلبد. در صورت استفاده از روش پنالتی، با آنکه تعداد معادلات کل با FEM برابر است و کاربرد آن نیز ساده تر است اما هیچگاه شرایط مرزی بطور دقیق ارضا نمی شوند.

- پیچیدگی حل و محاسبات که عمدتاً بدلیل پیچیدگی توابع شکل مورد استفاده در این روشها می باشد، بطوریکه برنامه نویسی آنها، با توجه به عدم وجود اجزاء، ظرافت های خاصی دارد. به عنوان مثال، یکی از مشکلاتی که این روشها از جهت حجم محاسبات کامپیوتری دارند نیازمندی به یک الگوریتم جستجوی قوی برای یافتن گره های موجود در دامنه حمایتی نقطه گوسی می باشد. در صورتیکه از هیچ الگوریتم جستجوی خاصی استفاده نشود برای یافتن گره های موجود در دامنه حمایتی یک نقطه می باید تمامی گره های موجود در مسأله را وارد چرخه جستجو نمود که حجم زمانی زیادی را از کامپیوتر می گیرد. الگوریتم های جستجویی مانند روش Bucket Searching و نیز الگوریتم درختی وجود دارند که به نحوی گره های موجود در مسأله را به تعدادی ناحیه تقسیم بندی می کنند که جستجو برای یافتن گره ها تنها در نواحی خاصی صورت پذیرد اما با همه اینها به دلیل فقدان اجزاء و اتصالات گرهی مربوط به آنها، فرآیند جستجو برای یافتن گره ها و تشکیل توابع شکل همواره بسیار وقت گیرتر از روش اجزاء محدود می باشد. همچنین خود توابع شکل MLS نیز پیچیدگی خاص خود را دارند و در طی تشکیل توابع شکل، ماتریس گشتاور وزندار  $A$  در رابطه (۹-۳) (که یک ماتریس مربع و هر بعد آن برابر تعداد درجات تابع پایه می باشد) می باید معکوس شود که همین معکوس کردن ماتریس، مخصوصاً در حالاتی که درجه تابع پایه مورد استفاده از درجه ۲ و

بالتر باشد، با توجه به حجم بالای ماتریسهایی که باید معکوس شوند زمان بیشتری را از حافظه کامپیوتر می گیرد.

- زمان محاسبات، که با توجه به مطالب گفته شده در بندهای قبل، بسیار بیشتر از روش اجزاء محدود می باشد. در جدول ۱-۷ مقایسه ای بین زمان تحلیل یک نمونه مسأله در دو روش صورت گرفته است. همانطور که از جدول فوق بر می آید زمان تحلیل EFG از ۹ تا ۳۸ برابر کندتر از تحلیل با تعداد گره های مشابه در FEM می باشد.

- حساسیت روش نسبت به فراسنجهای موجود در آن موجب می شود که هیچگاه نتوان نسبت به دقت جوابهای بدست آمده مطمئن بود و حتماً می باید قبل از انجام تحلیل، یک تحلیل پارامتریک بر روی این فراسنجهای صورت گیرد تا حدود مناسب آنها برای تحلیل اصلی مشخص شود که همین کار نیز زمان بیشتری را از کاربر می گیرد.

جدول ۱-۷- مقایسه بین زمان تحلیل مثال تیر طره با تعداد گره های یکسان در دو روش (زمان برحسب ثانیه)

	<b>EFG</b>	<b>FEM</b>
۱۹۶ گره	۲۶۷	۷
۳۷۸ گره	۷۳۳	۴۴
۵۹۶ گره	۱۶۴۱	۱۸۱



با توجه به مطالب گفته شده در بالا بنظر نگارنده این پایان نامه استفاده از روش گالرکین بدون جزء و شاید بطور کلی روشهای بدون جزء و مبتنی بر نقاط محدود، به تنهایی مقرون به صرفه نیست و هنوز مباحث زیادی وجود دارد که می باید در ارتباط با آنها بررسی شود که تعدادی از آنها در قسمت پیشنهادات آورده شده اند.

مدل ارائه شده برای بتن با مشخص کردن خواص ساختاری بصورت مجزا، روی صفحات با جهات مختلف در داخل مواد - که ریز صفحات نامیده شده و اساساً رفتار صفحات ضعیف در

---

چهارچوب روش

ریز مقیاس را مشخص می کنند - دارای مفهومی ساده می باشد. روی هر ریز صفحه، تنها تعداد کمی از مؤلفه های تنش و کرنش وجود دارد و نیاز به ارضاء نامتغییرهای تانسوری نمی باشد. نیازمندیهای نامتغییرهای تانسوری، بصورت خودکار در مقیاس ریز با انتگرال گیری بر روی تمام جهات در فضا ارضاء می گردد.

سادگی مفهوم مدل ریزمقیاس چندصفحه ای ارائه شده باعث سهولت شناسایی رفتار مواد بشکل مناسبی می گردد. در این مدل، می توان تعدادی از فراسنجهای تجربی ماده را ثابت فرض کرد و برای تمام بتن ها یکسان در نظر گرفت. اما مدلهای درشت مقیاس موجود که توصیفی جامع از رفتار مواد در حالت های متعدد بارگذاری را ارائه می نمایند، نیازمند شناسایی فراسنجهای بیشتری از ماده، به کمک تطابق با داده های تجربی می باشند. همچنین، برای مدل مورد نظر، تطابق خوبی با داده های آزمایشگاهی موجود بدست آمده است.

در نهایت با توجه به مدل های بکاربرده شده می توان گفت مدل رفتاری پیشنهادی بتن در مطالعه حاضر قادر است تا وقوع و امتداد گسترش ترک در توده بتن را تحت هر ترکیب بار گذاری دلخواه با دقت بالایی پیش بینی نماید.

ارزیابی تنشهای محاسبه شده در سد دو قوسی کارون ۱ با اعتبارسنجی نتایج عددی، به کمک کنترل دقیق تغییر شکلهای و توزیع تنشهای بدست آمده از بارگذاری، انجام شده و در بررسی این داده‌ها، تغییر شکلهای غیر معمول، مقادیر استثنایی بزرگ یا کوچک تغییر مکان و تنش و همچنین توزیع‌های دور از انتظار تنش - که با نتایج سایر سدهای قوسی مغایرت داشته و نمی توان آنها را به صورت شهودی تعبیر کرد - مشاهده نشده است.

#### ۷-۴- پیشنهادات برای کارهای آتی

با توجه به آنکه روشهای بدون جزء بطورکلی نسبت به روش اجزاء محدود هنوز در ابتدای راه قرار دارند اما ایده عدم استفاده از اجزاء و شبکه بندی در این روشها موضوع بسیار فریبنده ای است که خصوصاً در تحلیل های سه بعدی (که شبکه بندی خودکار بسیار مشکل و در بعضی موارد امکان پذیر نیست) در صورت دقت کافی و مناسب بودن زمان تحلیل مقرون به صرفه باشد.

موارد زیر را می توان جهت نیل به اهداف فوق الذکر و ارتقاء برنامه ذکر کرد:

۱- تحقیق درباره روشهایی که در آنها به هیچ نحوی به اجزاء (حتی به منظور

انتگرالگیری روابط ساختاری) نیاز نباشد. چنین روشهایی در حال حاضر وجود

دارند اما روشهایی که جهت انتگرالگیری بر پایه گره ها ارائه شده اند هیچکدام از پایداری لازم برخوردار نیستند.

۲- بررسی روشهایی برای اعمال دقیق شرایط مرزی، بدون آنکه بر حجم دستگاه معادلات کل سیستم اضافه کند. در این ارتباط معمولاً به دو صورت عمل می شود، یکی بررسی روشهایی برای اعمال قیود بر توابع شکل (مانند روش بدون جزء گالرکین مقید شده<sup>۳۰۰</sup>) و دیگری بررسی اعمال شرایط مرزی در خود روش.

۳- بررسی در مورد توابع شکلی که نسبت به توابع شکل MLS پیچیدگی کمتری داشته باشند، مانند توابع شکل PIM<sup>۳۰۱</sup>.

۴- ارائه راهی برای محاسبه ضرایب تأثیر گره های مختلف بطور جداگانه و فعال<sup>۳۰۲</sup>

و بدون استفاده از اجزاء شبکه پیش زمینه در روش EFG

۵- ترکیب روشهای بدون جزء و اجزاء محدود در حل مسائل، مانند استفاده از اجزاء در مرزهای تکیه گاهی

مدل چند صفحه‌ای ریز مقیاس، روشی قوی جهت مدل سازی رفتار مواد گوناگون در شرایط مختلف بارگذاری می باشد. بنابراین استفاده از این روش و توسعه روابط موجود برای روابط ساختاری خاک و صخره‌ها و همچنین در نظر گرفتن فصل مشترک سازه های بتنی با پی، به نحو مناسب، امکان بررسی بهتر رفتار سدهای قوسی با روش چند صفحه‌ای را فراهم می آورد.

---

<sup>1</sup>Constrained Moving Least squares

<sup>2</sup>Point Interpolation Method

<sup>3</sup>Dynamic

مدل چند صفحه‌ای ریز مقیاس بکار رفته در این پایان نامه، صرفاً برای تحلیل‌های استاتیکی سازه‌های بتنی بوده و تعمیم روابط ساختاری ریز صفحات، جهت دستیابی به پاسخ سد تحت بارهای دینامیکی، می‌تواند مورد بحث و بررسی قرار گیرد.

با توجه به حجیم بودن سازه بتنی سدهای قوسی، اثر اندازه<sup>۳۰۳</sup> در بررسی رفتار این نوع سازه‌ها مهم بوده و باید به نحو مناسب اعمال گردد.

همچنین مدل‌سازی بتن با تقسیم این ماده به عناصر مربوط به خمیر سیمان سخت شده، سنگ‌دانه‌ها و ناحیه تماس خمیر سیمان سخت شده با سنگ‌دانه‌ها و در نظر گرفتن مدل ساختاری چند صفحه‌ای برای هر یک از عناصر مذکور و در نهایت بررسی عملکرد توام آنها می‌تواند مورد بحث و بررسی قرار گیرد.

کاربرد مدل حاضر جهت شبیه‌سازی رفتار مواد ناهمسانگرد با تعریف توابع آسیب وابسته به جهت روی ریز صفحات نیز می‌تواند مورد بررسی قرار گیرد.

همچنین با توجه به ساده‌سازی‌های که در این پایان‌نامه جهت مدل نمودن رفتار حرارتی بتن صورت گرفته می‌توان در کارهای آتی از روابط و تئوری‌های پیچیده‌تر و دقیق‌تری برای مدل کردن مسائلی همچون سد قوسی بتنی استفاده نمود.

نرم‌افزار مورد استفاده علی‌رغم انعطاف‌پذیری مناسبی که برای سازه‌های مختلف دارد قابلیت‌های زیادی در جهت افزایش سهولت و جامعیت دارد و می‌توان آنرا برای مدل‌های رفتاری دیگر و نیز روش‌های مختلفی از حل عددی از جمله روش معمول اجزاء محدود با تغییراتی بکار برد.

بدیهی است که حجم کار مورد نیاز برای هر یک از موارد مذکور، ممکن است جهت تعریف یک پایان نامه کارشناسی ارشد زیاد بوده و در هر مورد، بررسی دقیق موضوع با مطالعات اولیه و مشاوره، جهت دستیابی به اهداف مورد نیاز، لازم می‌باشد.

## پیوست الف

### نرم افزار DSHAPE برای مدل کردن سد قوسی

این نرم افزار که بر پایه MATLAB توسط نگارنده نوشته شده است بدین صورت عمل می کند که ابتدا براساس نقشه‌های موجود تمامی اطلاعات مورد نیاز جهت هندسه سد را ذخیره نموده و آنگاه بر اساس زوایای قوسها و سایر مشخصات سد و با درونیابی های لازم نقاط گرهی سد را در خروجی به دست می دهد که می تواند برای نرم افزارهای دیگر جهت تحلیل بکار رود.

```
clc
clear
%
EL = [542; 512; 482; 452; 422; 392; 364.5];
%
```

```

R_LDS1 = [196;181;163.5;142;119.5;97;75];
R_RDS1 = [221;193.5;170.5;147;122.5;97;75];
R_LUS1 = [202;199;190;175;158;138;116];
R_RUS1 = [227;211.5;198;182.5;163;138;116];
%
RX_LDS1 = [202;179;156.5;132;107.5;88;71];
RX_RDS1 = [227;191.5;163.5;137;110.5;88;71];
RX_LUS1 = [202;187;167;143.5;122.5;104;83.5];
RX_RUS1 = [227;199.5;175;151;127.5;104;83.5];
%
TETA_LDS1 = [48.5;50;52;56;59;53;44];
TETA_RDS1 = [52;58.5;65.5;68.5;64;53.5;35];
TETA_LUS1 = [48.5;47.5;48;51;51;45;35];
TETA_RUS1 = [52;56;61;61.5;55;45.5;31.5];
%
dl = 16;
NY = zeros(ceil(200/dl+1),1);
NY(1) = 542;
n = length(NY);
%
R_LDS = zeros(n,1); R_LDS(1) = R_LDS1(1);
R_RDS = zeros(n,1); R_RDS(1) = R_RDS1(1);
R_LUS = zeros(n,1); R_LUS(1) = R_LUS1(1);
R_RUS = zeros(n,1); R_RUS(1) = R_RUS1(1);
%
RX_LDS = zeros(n,1); RX_LDS(1) = RX_LDS1(1);
RX_RDS = zeros(n,1); RX_RDS(1) = RX_RDS1(1);
RX_LUS = zeros(n,1); RX_LUS(1) = RX_LUS1(1);
RX_RUS = zeros(n,1); RX_RUS(1) = RX_RUS1(1);
%
TETA_LDS = zeros(n,1); TETA_LDS(1) = TETA_LDS1(1);
TETA_RDS = zeros(n,1); TETA_RDS(1) = TETA_RDS1(1);
TETA_LUS = zeros(n,1); TETA_LUS(1) = TETA_LUS1(1);
TETA_RUS = zeros(n,1); TETA_RUS(1) = TETA_RUS1(1);
%
for i=2:n-1
%
NY(i) = NY(i-1)-dl;
%
R_LDS(i) = interp1(EL,R_LDS1,NY(i),'spline');
R_RDS(i) = interp1(EL,R_RDS1,NY(i),'spline');
R_LUS(i) = interp1(EL,R_LUS1,NY(i),'spline');
R_RUS(i) = interp1(EL,R_RUS1,NY(i),'spline');
%
RX_LDS(i) = interp1(EL,RX_LDS1,NY(i),'spline');
RX_RDS(i) = interp1(EL,RX_RDS1,NY(i),'spline');
RX_LUS(i) = interp1(EL,RX_LUS1,NY(i),'spline');
RX_RUS(i) = interp1(EL,RX_RUS1,NY(i),'spline');
%
TETA_LDS(i) = interp1(EL,TETA_LDS1,NY(i),'spline');
TETA_RDS(i) = interp1(EL,TETA_RDS1,NY(i),'spline');
TETA_LUS(i) = interp1(EL,TETA_LUS1,NY(i),'spline');
TETA_RUS(i) = interp1(EL,TETA_RUS1,NY(i),'spline');
%
end
for i=n
%
NY(i) = 342;
%
TETA_LDS(i) = interp1(EL,TETA_LDS1,NY(i),'spline');

```

```

TETA_RDS(i) = interp1(EL,TETA_RDS1,NY(i),'spline');
TETA_LUS(i) = interp1(EL,TETA_LUS1,NY(i),'spline');
TETA_RUS(i) = interp1(EL,TETA_RUS1,NY(i),'spline');
end
for i = 13:n
    R_LDS(i) = R_LDS(12);
    R_RDS(i) = R_RDS(12);
    R_LUS(i) = R_LUS(12);
    R_RUS(i) = R_RUS(12);
    %
    RX_LDS(i) = RX_LDS(12);
    RX_RDS(i) = RX_RDS(12);
    RX_LUS(i) = RX_LUS(12);
    RX_RUS(i) = RX_RUS(12);
end
%
n_LDS = max(TETA_LDS1)/0.5;
n_RDS = max(TETA_RDS1)/0.5;
n_LUS = max(TETA_LUS1)/0.5;
n_RUS = max(TETA_RUS1)/0.5;
%
NX_LDS = zeros(n,n_LDS);
NX_LUS = zeros(n,n_LDS);
NX_RDS = zeros(n,n_LDS);
NX_RUS = zeros(n,n_LDS);
%
NZ_LDS = NX_LDS;
NZ_LUS = NX_LUS;
NZ_RDS = NX_RDS;
NZ_RUS = NX_RUS;
%
k=1;
l=1;
k2=1;
%
for i=1:n
    teta=0;
    j=1;
    while teta < TETA_LDS(i) + 5
        %
        if teta > TETA_LDS(i)
            teta = TETA_LDS(i);
            XYZ1(k2,3) = - R_LDS(i) * sin(teta*pi/180);
            XYZ1(k2,2) = NY(i);
            XYZ1(k2,1) = 200;
        end
        %
        NZ_LDS(i,j) = - R_LDS(i) * sin(teta*pi/180);
        NX_LDS(i,j) = RX_LDS(i) - R_LDS(i) * cos(teta*pi/180);
        %
        ZD(k) = NZ_LDS(i,j);
        XD(k) = NX_LDS(i,j);
        YD(k) = NY(i);
        %
        teta = teta + 5;
        j=j+1;
        k=k+1;
    end
    teta=5;
    j=1;

```

```

while teta < TETA_RDS(i) + 5
%
if teta > TETA_RDS(i)
teta = TETA_RDS(i);
XYZ1(k2+1,3) = + R_RDS(i) * sin(teta*pi/180);
XYZ1(k2+1,2) = NY(i);
XYZ1(k2+1,1) = 200;
end
%
NZ_RDS(i,j) = + R_RDS(i) * sin(teta*pi/180);
NX_RDS(i,j) = RX_RDS(i) - R_RDS(i) * cos(teta*pi/180);
%
ZD(k) = NZ_RDS(i,j);
XD(k) = NX_RDS(i,j);
YD(k) = NY(i);
%
teta = teta + 5;
j=j+1;
k=k+1;
end
teta=0;
j=1;
while teta < TETA_LUS(i) + 5
%
if teta > TETA_LUS(i)
teta = TETA_LUS(i);
XYZ1(k2+2,3) = - R_LUS(i) * sin(teta*pi/180);
XYZ1(k2+2,2) = NY(i);
XYZ1(k2+2,1) = -500;
end
%
NZ_LUS(i,j) = - R_LUS(i) * sin(teta*pi/180);
NX_LUS(i,j) = RX_LUS(i) - R_LUS(i) * cos(teta*pi/180);
%
ZU(1) = NZ_LUS(i,j);
XU(1) = NX_LUS(i,j);
YU(1) = NY(i);
%
teta = teta + 5;
j=j+1;
l=l+1;
end
teta=5;
j=1;
while teta < TETA_RUS(i) + 5
%
if teta > TETA_RUS(i)
teta = TETA_RUS(i);
XYZ1(k2+3,3) = + R_RUS(i) * sin(teta*pi/180);
XYZ1(k2+3,2) = NY(i);
XYZ1(k2+3,1) = -500;
end
%
NZ_RUS(i,j) = + R_RUS(i) * sin(teta*pi/180);
NX_RUS(i,j) = RX_RUS(i) - R_RUS(i) * cos(teta*pi/180);
%
ZU(1) = NZ_RUS(i,j);
XU(1) = NX_RUS(i,j);
YU(1) = NY(i);
%

```



```

        teta = teta + 5;
        j=j+1;
        l=l+1;
    end
    k2=k2+4;
end
XYZ1(k2,:) = [200,742,350]; XYZ1(k2+1,:) = [200,742,-350];
XYZ1(k2+2,:) = [200,-58,350]; XYZ1(k2+3,:) = [200,-58,-350];
XYZ1(k2+4,:) = [-500,742,350]; XYZ1(k2+5,:) = [-500,742,-350];
XYZ1(k2+6,:) = [-500,-58,350]; XYZ1(k2+7,:) = [-500,-58,-350];
%-----
% define other nodes
%-----
n2 = 200/20 ;
Y2 = zeros(n2,1);
Y2(1) = 742;
for i=2:n2
    Y2(i) = Y2(i-1) - 20;
end
EL2 = [542;512;482];
%
R_LDS2 = [196;181;163.5];
R_RDS2 = [221;193.5;170.5];
R_LUS2 = [202;199;190];
R_RUS2 = [227;211.5;198];
%
TETA_LDS2 = [48.5;50;52];
TETA_RDS2 = [52;58.5;65.5];
TETA_LUS2 = [48.5;47.5;48];
TETA_RUS2 = [52;56;61];
%
k3=1;
for i=1:n2
    %
    R2_LDS = interp1(EL2,R_LDS2,Y2(i),'cubic');
    R2_RDS = interp1(EL2,R_RDS2,Y2(i),'cubic');
    R2_LUS = interp1(EL2,R_LUS2,Y2(i),'cubic');
    R2_RUS = interp1(EL2,R_RUS2,Y2(i),'cubic');
    %
    TETA2_LDS = interp1(EL2,TETA_LDS2,Y2(i),'cubic');
    TETA2_RDS = interp1(EL2,TETA_RDS2,Y2(i),'cubic');
    TETA2_LUS = interp1(EL2,TETA_LUS2,Y2(i),'cubic');
    TETA2_RUS = interp1(EL2,TETA_RUS2,Y2(i),'cubic');
    %
    Z2_LDS = - R2_LDS * sin(TETA2_LDS*pi/180);
    Z2_RDS = + R2_RDS * sin(TETA2_RDS*pi/180);
    Z2_LUS = - R2_LDS * sin(TETA2_LDS*pi/180);
    Z2_RUS = + R2_RDS * sin(TETA2_RDS*pi/180);
    %
    XYZ2(k3,1)= 200;      XYZ2(k3,2)=Y2(i);      XYZ2(k3,3)=Z2_LDS;
    XYZ2(k3+1,1)= 200;   XYZ2(k3+1,2)=Y2(i);   XYZ2(k3+1,3)=Z2_RDS;
    XYZ2(k3+2,1)=-500;   XYZ2(k3+2,2)=Y2(i);   XYZ2(k3+2,3)=Z2_LUS;
    XYZ2(k3+3,1)=-500;   XYZ2(k3+3,2)=Y2(i);   XYZ2(k3+3,3)=Z2_RUS;
    %
    k3=k3+4;
end
plot3(XD,ZD,YD,'*','MarkerSize',2)
hold on

```

```

plot3(XU,ZU,YU,'g*','MarkerSize',2)
grid
xlabel('x')
ylabel('z')
zlabel('y')
title('Abbaspour DAM')
hold on
plot3(XYZ1(:,1),XYZ1(:,3),XYZ1(:,2),'r*','markersize',5)
hold on
plot3(XYZ2(:,1),XYZ2(:,3),XYZ2(:,2),'g*','markersize',5)
%
xlswrite('output.xls',XD',1,'F2')
xlswrite('output.xls',YD',1,'H2')
xlswrite('output.xls',ZD',1,'J2')
xlswrite('output.xls',XU',2,'F2')
xlswrite('output.xls',YU',2,'H2')
xlswrite('output.xls',ZU',2,'J2')
xlswrite('output.xls',XYZ1(:,1),3,'F2')
xlswrite('output.xls',XYZ1(:,2),3,'H2')
xlswrite('output.xls',XYZ1(:,3),3,'J2')
xlswrite('output.xls',XYZ2(:,1),4,'F2')
xlswrite('output.xls',XYZ2(:,2),4,'H2')
xlswrite('output.xls',XYZ2(:,3),4,'J2')

```

## پیوست ب

### زیربرنامه مدل چندصفحه‌ای ریزمقیاس

این زیر برنامه کرنش های ماکروسکوپیک را از برنامه اصلی تحلیل دریافت کرده و آنگاه با روابط و ضرایب مورد نظر که درون زیربرنامه تعریف شده‌اند و توابع آسیب این کرنشها را تبدیل به تنشهای واقعی درون بتن می کند.

```

function
[stress1,W1]=func_micro3d(strain1,E_vol,E_dev,micro,microW,microTR,microTT)

clc
clear

```

```

strain1=[1.21998e-06;2.28965e-06;-8.37318e-07;-2.91165e-06;-
2.20082e-09;-1.42555e-09];
%
e_module=3e7;
poisson=0.2;
%
E_mat=e_module/((1+poisson)*(1-2*poisson))* ...
[(1-poisson)   poisson   poisson   0   0   0
;
  poisson   (1-poisson)   poisson   0   0   0
;
  poisson   poisson   (1-poisson)   0   0   0
;
    0   0   0   (1-2*poisson)/2   0   0
;
    0   0   0   0   (1-2*poisson)/2   0
;
    0   0   0   0   0   (1-
2*poisson)/2];
%
%
E_dev=e_module/(1+poisson)* ...
[1   0   0 ;
 0   1   0 ;
 0   0   1];
%
E_vol=e_module/(3*(1-2*poisson))* ...
[1   1   1   0   0   0 ;
 1   1   1   0   0   0 ;
 1   1   1   0   0   0 ;
 0   0   0   0   0   0 ;
 0   0   0   0   0   0 ;
 0   0   0   0   0   0];
%
%
num1=1/sqrt(2);
num2=1/sqrt(3);
num3=num1*num2;
num4=sqrt(2/3);
num5=27/840;
num6=32/840;
num7=40/840;
%
%
defining coordination of microplanes
%
micro=[ num2   num2   num2   -num1   num1   0   num3   num3
-num4;
  num2  -num2   num2   num1   num1   0   num3  -num3
-num4;
 -num2   num2   num2   num1   num1   0  -num3   num3
-num4;
 -num2  -num2   num2   -num1   num1   0   num3   num3
-num4;
  num1   num1   0   -num1   num1   0   0   0
1;
 -num1   num1   0   num1   num1   0   0   0
1;
  num1   0   num1   0   1   0  -num1   0
num1;
 -num1   0   num1   0   1   0   num1   0
num1;

```

```

num1;      0    -num1   num1      1    0    0    0    num1
num1;      0     num1   num1      1    0    0    0   -num1
num1;      1     0     0      0    1    0    0     0
1;         0     1     0      1    0    0    0     0
1;         0     0     1      0    1    0    1     0
0];
%
microW=[num5;num5;num5;num6;num6;num6;num6;num6;num6;num7;num7;num7;
num7];
%
%           defining transformation matrix of microplane
%
microTR=zeros(13,6,3);
microTT=zeros(13,3,6);
for r=1:13
    microTR(r,1,1)=micro(r,1)*micro(r,1)-1/3;
    microTR(r,1,2)=micro(r,1)*micro(r,4);
    microTR(r,1,3)=micro(r,1)*micro(r,7);
    microTR(r,2,1)=micro(r,2)*micro(r,2)-1/3;
    microTR(r,2,2)=micro(r,2)*micro(r,5);
    microTR(r,2,3)=micro(r,2)*micro(r,8);
    microTR(r,3,1)=micro(r,3)*micro(r,3)-1/3;
    microTR(r,3,2)=micro(r,3)*micro(r,6);
    microTR(r,3,3)=micro(r,3)*micro(r,9);
    microTR(r,4,1)=micro(r,1)*micro(r,2);
    microTR(r,4,2)=(micro(r,4)*micro(r,2)+micro(r,5)*micro(r,1))/2;
    microTR(r,4,3)=(micro(r,7)*micro(r,2)+micro(r,8)*micro(r,1))/2;
    microTR(r,5,1)=micro(r,2)*micro(r,3);
    microTR(r,5,2)=(micro(r,5)*micro(r,3)+micro(r,6)*micro(r,2))/2;
    microTR(r,5,3)=(micro(r,8)*micro(r,3)+micro(r,9)*micro(r,2))/2;
    microTR(r,6,1)=micro(r,1)*micro(r,3);
    microTR(r,6,2)=(micro(r,4)*micro(r,3)+micro(r,6)*micro(r,1))/2;
    microTR(r,6,3)=(micro(r,7)*micro(r,3)+micro(r,9)*micro(r,1))/2;
end
%
for m=1:13
    for n=1:3
        for o=1:6
            microTT(m,n,o)=microTR(m,o,n);
        end
    end
end
%
%
%
%
%
%
a=0.00001;
b=0.0002;
d=300;
e=0.002;
iv=0.003;
jv=0.000549;
k=0.003000001;
f=-86000;

```

```

g=303;
h=0.6;
c=0.00015;
%
strainM = (strain1(1)+strain1(2)+strain1(3))/3;
strainD = [strain1(1)-strainM;strain1(2)-strainM;...
           strain1(3)-strainM;strain1(4);strain1(5);strain1(6)];
%
microD=zeros(13,3);
microDM=zeros(13,1);
WHC=zeros(13,1);
WHT=zeros(13,1);
WC=zeros(13,1);
WT=zeros(13,1);
WSH=zeros(13,1);
%
%                               loop for 13 microplane
%-----
for r=1:13
%       calculate the components of deviatoric microscopic
strain
%
microD(r,1) = strainD(1)*micro(r,1)+strainD(4)*micro(r,2)+...
              strainD(6)*micro(r,3);
microD(r,2) = strainD(4)*micro(r,1)+strainD(2)*micro(r,2)+...
              strainD(5)*micro(r,3);
microD(r,3) = strainD(6)*micro(r,1)+strainD(5)*micro(r,2)+...
              strainD(3)*micro(r,3);
%
%       calculate the magnitude of mentioned vector
%
microDM(r) = sqrt(sum(microD(r,:).^2));
%
%       calculate deviatoric damage function for each microplane
%
WHC(r)=0;
WHT(r)=0;
if microDM(r) > (sqrt(3)*a)
    WHT(r)=1-(sqrt(3)*a/microDM(r))*...
           exp(-(microDM(r)-sqrt(3)*a)/(b-sqrt(3)*a));
end
if microDM(r)<= e
    WC(r)=d*microDM(r);
elseif microDM(r)> iv
    WC(r)=1-(jv/microDM(r))*exp(-(microDM(r)-iv)/(k-iv));
else
    WC(r)=f*(microDM(r)-e)^2+g*(microDM(r)-e)+h;
end
WT(r)=0;
if microDM(r)> a
    WT(r)=1-(a/microDM(r))*exp(-(microDM(r)-a)/(c-a));
end
WSH(r)=0.5*(WC(r)+WT(r));
%
%       project microD on three direction
%
microD_N(r)=micro(r,1)*microD(r,1)+micro(r,2)*microD(r,2)+...
            micro(r,3)*microD(r,3);
microD_M(r)=micro(r,4)*microD(r,1)+micro(r,5)*microD(r,2)+...

```

```

        micro(r,6)*microD(r,3);
microD_L(r)=micro(r,7)*microD(r,1)+micro(r,8)*microD(r,2)+...
        micro(r,9)*microD(r,3);
%
%       calculate deviatoric microscopic stress scalar
%
stressD_N(r)=E_dev(1,1)*microD_N(r);
stressD_M(r)=E_dev(2,2)*microD_M(r);
stressD_L(r)=E_dev(3,3)*microD_L(r);
%
%       calculate the superimposed inplane deviatoric
microscopic
%       stress scalar
%
stressDS(r)=sqrt(microD_M(r)^2 + microD_L(r)^2);
%
%       calculate volumetric microscopic stress scalar
stressV(r)=E_vol(1,1)*strainM;
%
%       proportion of various type of deviatoric damage on
microplane
%
if stressDS(r)==0 && stressD_N(r)==0
    omega(r)=0;
elseif stressDS(r)==0 && stressD_N(r)>0
    omega(r)=WHT(r);
    HT(r)=1;
elseif stressDS(r)==0 && stressD_N(r)<0
    omega(r)=WHC(r);
    HC=1;
elseif stressDS(r)>0 && stressD_N(r)==0
    omega(r)=WSH(r);
    SH(r)=1;
elseif stressDS(r)==stressD_N(r)
    omega(r)=WT(r);
    T(r)=1;
elseif stressDS(r)==-stressD_N(r)
    omega(r)=WC(r);
    C(r)=1;
elseif stressD_N(r)<0 && stressDS(r)<-stressD_N(r)
    D1(r)=stressDS(r);
    D2(r)=-(stressD_N(r)+stressDS(r))/sqrt(2);
    HC(r)=D2(r)/(D1(r)+D2(r));
    C(r)=1-HC(r);
    SH(r)=0;
    T(r)=0;
    HT(r)=0;
    omega(r)=HT(r)*WHT(r)+T(r)*WT(r)+SH(r)*WSH(r)+C(r)*WC(r)+...
        HC(r)*WHC(r);
elseif stressD_N(r)<0
    D1(r)=-stressD_N(r);
    D2(r)=(stressDS(r)+stressD_N(r))/sqrt(2);
    SH(r)=D1(r)/(D1(r)+D2(r));
    C(r)=1-SH(r);
    T(r)=0;
    HC(r)=0;
    HT(r)=0;
    omega(r)=HT(r)*WHT(r)+T(r)*WT(r)+SH(r)*WSH(r)+C(r)*WC(r)+...
        HC(r)*WHC(r);
elseif stressDS(r)>stressD_N(r)

```

```

D1(r)=stressD_N(r);
D2(r)=(stressDS(r)-stressD_N(r))/sqrt(2);
T(r)=D1(r)/(D1(r)+D2(r));
SH(r)=1-T(r);
HT(r)=0;
C(r)=0;
HC(r)=0;
omega(r)=HT(r)*WHT(r)+T(r)*WT(r)+SH(r)*WSH(r)+C(r)*WC(r)+...
        HC(r)*WHC(r);
else
D1(r)=stressDS(r);
D2(r)=(stressD_N(r)-stressDS(r))/sqrt(2);
HT(r)=D2(r)/(D1(r)+D2(r));
T(r)=1-HT(r);
SH(r)=0;
C(r)=0;
HC(r)=0;
omega(r)=HT(r)*WHT(r)+T(r)*WT(r)+SH(r)*WSH(r)+C(r)*WC(r)+...
        HC(r)*WHC(r);
end
end
%-----
% % calculate the damage function of volumetric part of module
matrix
% %
% if strainM<=0
%     omegaV=0;
% elseif strainM>sqrt(3)*a
%     omegaV=1-(sqrt(3)*a/strainM)*exp(-(strainM-sqrt(3)*a)/(b-
sqrt(3)*a));
% else
%     omegaV=0;
% end
%-----
% % for r=1:13
% %     if omega(r)<omegaP(r)
% %         omega(r)=omegaP(r);
% %     end
% % end
% % %-----
% for r=1:13
%     omum(r)=omega(r)+omegaV;
%     if omum(r)>1
%         omum(r)=1;
%     end
% end
%-----
%
% calculate total damage deviatoric macroscopic modules matrix
%
for r=1:13
    for s=1:3
        for t=1:3
            DD(r,s,t)=(1-omega(r))*E_dev(s,t);
        end
    end
end
%
for r=1:13
    for s=1:3

```

```

        for t=1:6
            S=0;
            for u=1:3
                S=S+DD(r,s,u)*microTT(r,u,t);
            end
            DTT(r,s,t)=S;
        end
    end
end
%
for r=1:13
    for s=1:6
        for t=1:6
            SUM=0;
            for u=1:3
                SUM=SUM+microTR(r,s,u)*DTT(r,u,t);
            end
            DT(r,s,t)=SUM;
        end
    end
end
%
for r=1:6
    for s=1:6
        DDMATX(r,s)=0;
        for t=1:13
            DDMATX(r,s)=DDMATX(r,s)+microW(t)*DT(t,r,s)*6;
        end
    end
end
%
% calculate damage function of volumetric part of modules matrix
%
phee=3.141592654*(strainM/0.006);
omegaV=sin(phee);
if strainM<=0
    omegaV=0;
end
%
% calculate total damage macroscopic modules matrix
%
if omegaV<=0
    for r=1:6
        for s=1:6
            DMATX(r,s)=DDMATX(r,s)+(1-omegaV)*E_vol(r,s);
        end
    end
else
    %
    for r=1:6
        for s=1:6
            DMATX(r,s)=(1-omegaV)*(DDMATX(r,s)+E_vol(r,s));
        end
    end
end
%
% calculate macroscopic stress tensor
%
for r=1:6
    stressD(r)=0;
end

```



```

    for s=1:6
        stressD(r)=stressD(r)+DDMATX(r,s)*strain1(s);
    end
end
%
for r=1:6
    stress1(r)=0;
    for s=1:6
        stress1(r)=stress1(r)+DMATX(r,s)*strain1(s);
    end
end
%
%-----
%-----
%
%           calculate total microscopic stress vector
%
for r=1:13
    stressTM(r,1)=stress1(1)*micro(r,1)+stress1(4)*micro(r,2)+...
                stress1(6)*micro(r,3);
    stressTM(r,2)=stress1(4)*micro(r,1)+stress1(2)*micro(r,2)+...
                stress1(5)*micro(r,3);
    stressTM(r,3)=stress1(6)*micro(r,1)+stress1(5)*micro(r,2)+...
                stress1(3)*micro(r,3);

    %
    %           project on scalars
    %

stressTM_N(r)=micro(r,1)*stressTM(r,1)+micro(r,2)*stressTM(r,2)+...
                micro(r,3)*stressTM(r,3);

stressTM_M(r)=micro(r,4)*stressTM(r,1)+micro(r,5)*stressTM(r,2)+...
                micro(r,6)*stressTM(r,3);

stressTM_L(r)=micro(r,7)*stressTM(r,1)+micro(r,8)*stressTM(r,2)+...
                micro(r,9)*stressTM(r,3);

end
%
%           calculate volumetric stress tensor
%
stressV=(stress1(1)+stress1(2)+stress1(3))/3;
strainV=strain1(1)+strain1(2)+strain1(3);
%
for r=1:13
    omegaP(r)=omega(r);
end
W1=0;
for r=1:13
    if omega(r)==1
        W1=1;
    end
end
end

```

[۱] سید امیرالدین صدرنژاد، "مقدمه ای بر روش اجزاء محدود"، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی، ۱۳۸۰

[۲] Bažant, Z. P. (1984). Imbricate continuum and its variational derivation, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 110: 1693–1712.

[۳] Jirásek M. and Bažant Z. P. (2002). *Inelastic Analysis of Structures*, John Wiley: New York.

[۴] Stroud, A. H. (1971). *Approximate Calculation of Multiple Integrals*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey.

[۵] Bažant, Z. P. and Oh, B.-H. (1985). Microplane model for progressive fracture of concrete and rock, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 111: 559–582.

[۶] Bažant, Z. P. and Oh, B.-H. (1986). Efficient numerical integration on the surface of a sphere, *Zeitschrift fur angewandte Mathematik und Mechanik* 66: 37–49.

[۷] Sadrnejad, S. A. (1992). Multi-laminate elasto-plastic model for granular media, *Journal of Engineering*, Islamic Republic of Iran, vol.5, Nos.1&2, 11.

[۸] Taylor, G. I. (1938). Plastic strain in metals, *Journal of the Institute of Metals* 62: 307–324.

[۹] Batdorf, S. B. and Budianski, B. (1949). A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip, *Technical Note 1871*, National Advisory Committee for Aeronautics, Washington, D.C.

[۱۰] Bažant, Z. P. (1984). Microplane model for strain-controlled inelastic behavior, *Mechanics of engineering materials*, C. S. Desai and R. H. Gallagher, eds., John Wiley and Sons, Inc., New York, N.Y., 45-59.

[۱۱] Kroner, E. (1961). Zur plastischen Verformung des Vielkristalls, *Acta Metallurgica* 9: 155–161.

[۱۲] Budianski, B. and Wu, T. T. (1962). Theoretical prediction of plastic strains of polycrystals, *Proc. Fourth U.S. National Congress of Applied Mechanics*, ASME, New York, pp. 1175–1185.

[۱۳] Lin, T. H. and Ito, M. (1965). Theoretical plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined and reversed stresses, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13: 103–115.

[۱۴] Lin, T. H. and Ito, M. (1966). Theoretical plastic stress-strain relationship of a polycrystal, *International Journal of Engineering Science* 4: 543–561.

- [۱۵] Hill, R. (1966). Continuum micromechanics of elastoplastic polycrystals, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 13: 89–101.
- [۱۶] Hill, R. (1966). Generalized constitutive relations for incremental deformation of metal crystals by multislip, *Journal of the Mechanics and Physics of Solids* 14: 95–102.
- [۱۷] Rice, J. R. (1970). On the structure of stress-strain relations for time-dependent plastic deformation of metals, *Journal of Applied Mechanics, ASME* 37: 728–737.
- [۱۸] Zienkiewicz, O. C. and Pande, G. N. (1977). Time-dependent multi-laminate model of rocks – A numerical study of deformation and failure of rock masses, *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics* 1: 219–247.
- [۱۹] Pande, G. N. and Sharma, K. G. (1981). Implementation of computer procedures and stress-strain laws in geotechnical engineering, in *Implementation of Computer Procedures and Stress-Strain Laws in Geotechnical Engineering*, C. S. Desai and S. K. Saxena (eds), Acorn Press, Durham, N.C., pp. 575–590.
- [۲۰] Pande, G. N. and Sharma, K. G. (1982). Multi-laminate model of clays – A numerical evaluation of the influence of rotation of the principal stress axis, *Report*, Department of Civil Engineering, University College of Swansea.
- [۲۱] Pande, G. N. and Xiong, W. (1982). An improved multi-laminate model of jointed rock masses, *International Symposium on Numerical Models in Geomechanics*, R. Dungar, G. N. Pande and G. Studder (eds), Balkema, Rotterdam, pp. 218–226.
- [۲۲] Sadrnejad S. A. and Pande G. N. (1989). A multi-laminate model for sand, *3<sup>rd</sup> International Symposium on Numerical Models in Geomechanics*, NUMOG-III, 8-11, Niagara Falls, CANADA.

- [۲۳] Sadrnejad, S. A. (2003). A multi-plane model for natural anisotropy of sand, *International Journal of Engineering Transaction, B: Applications*, Vol. 16, no. 4, pp. 311-327.
- [۲۴] G.R. Liu, "Mesh free methods: moving beyond the finite element method", CRC Press LLC, 2002
- [۲۵] Belytschko T., Lu Y.Y. and Gu L., "Element-Free Galerkin Methods", *International journal for numerical methods in engineering*, Vol. 37, 229-256, 1994
- [۲۶] Belytschko T., Krongauz Y., Fleming M., Organ D. and Liu W.K., "Smoothing and accelerated computations in the Element Free Galerkin Method", *J. Comput. Appl. Math.*, Vol. 74, 111-126, 1995
- [۲۷] Song B. et al., "Application of finite point method to fluid flow and heat transfer, in *Proc. 4<sup>th</sup> Asia Pacific Conference on Computational Mechanics, December, Singapore*, 1091-1096, 1999
- [۲۸] Xu X.G. and Liu G.R., "A local-function approximation method for simulating two-dimensional incompressible flow, in *Proc. 4<sup>th</sup> International Asia-Pacific Conference on Computational Mechanics, December, Singapore*, 1021-1026, 1999
- [۲۹] Cheng M. and Liu G.R., "A finite point method for analysis of fluid flow", in *Proceedings of 4<sup>th</sup> International Asia-Pacific Conference on Computational Mechanics, December, Singapore*, 1015-1020, 1999
- [۳۰] Belytschko T. et al., "Meshless method: an overview and recent developments", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 139, 3-47, 1996
- [۳۱] Krongauz Y. and Belytschko T., "Enforcement of essential boundary conditions in Meshless approximations using finite elements", *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, Vol. 131(1-2), 133-145, 1996
- [۳۲] Belytschko T., Gu L. and Lu Y.Y., "Fracture and crack growth by element free Galerkin methods", *Modeling Simulations Mater. Sci. Eng.*, Vol. 2, 519-534, 1994
- [۳۳] Fleming M. et al., Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields, *Int. J. Numer. Methods Eng.*, Vol. 40, 1483-1504, 1997
- [۳۴] Zienkiewicz O.C., "The Finite Element Method, 4<sup>th</sup> ed.", McGraw-Hill, 1989
- [۳۵] Cordes L.W., and Moran B., "Treatment of material discontinuity in the element-free-Galerkin method", *Comput. Methods. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 162, 203-222, 1998
- [۳۶] Krongauz Y. and Belytschko T., "EFG approximation with discontinuous derivatives", *Int. I. Numer. Method Eng.*, Vol. 41(7), 1215-1233, 1998

[۳۷] Liu G.R. and Yang K.Y., “A new meshless method for stress analysis for solids and structure”, in *Proc. Fourth Asia-Pacific Conference on Computational Mechanics, 15-17 December, Singapore, 1999*

[۳۸] Nayroles R. A. and Utku S., “An alternative for the finite element method”, *Proc. Int. Conf. held at the university of Southampton, Vol. I, 1972*

[۳۹] Owen D. R. J. and Hinton E., “Finite elements in plasticity”, Pineridge Press Limited, Swansea, U.K, 1980

[۴۰] Bažant, Z. P. (1983). Comment on orthotropic models for concrete and geomaterials, *Journal of Engineering Mechanics*, 109(1):849-865.

[۴۱] Sadrnejad, S. A. (2000). *Principles of Soil Plasticity*, 1<sup>st</sup> edition, K.N. Toosi University of Technology Press, Tehran, Iran.

[۴۲] Chen, W. F. (1982). *Plasticity in Reinforced Concrete*, McGraw Hill, New York.

[۴۳] Lemaitre, J. (1992). *A course on damage Mechanics*, Springer, Berlin.

[۴۴] Cervenka, J. (1994). *Discrete crack modeling in concrete structures*, PhD thesis, Univ. of Colorado, Boulder, Colo.

[۴۵] Carol, I., Prat, P. C., Lopez, C. M. (1997). Normal/shear cracking model: Application to discrete crack analysis, *J. Engng. Mech.*, Vol. 123, pp. 765–773.

[۴۶] Bažant, Z. P., and Lin, F.-B. (1988). Nonlocal smeared cracking model for concrete fracture, *J. Struct. Eng.*, 114 (11), 2493–2510.

[۴۷] Willam, K., Pramono, E. and Sture, S. (1989). *Fundamental issues of smeared crack models, Fracture of Concrete and Rock*, Eds. S.P. Shah and S.E. Swartz, Springer-Verlag, pp. 192-207.

[۴۸] Rots, J.G., Nauta, P., Kusters, G.M.A. and Blaauwendraad, J. (1985). Smeared Crack Approach and Fracture Localization in Concrete, *HERON*, 30 (1), 3-48.

- [۴۹]. Bažant Z.P., Xiang Y., Prat, P.C., “ Microplane model for concrete. I.Stress-strain boundaries and finite strain”, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 122 (3), 245-254, 1996a.
- [۵۰]. Taylor G. I., “ Plastic strain in metals”, *J. Inst. Met. ,* 62, 307-324, 1938.
- [۵۱]. Batdorf S. B., and Budiansky B., “A Mathematical Theory of Slip Based on the Concept of Slip”, *NACA TN* 1871, 1949.
- [۵۲]. E., Kroner“*Acta Metall*”, 9, 155, 1961.
- [۵۳]. Bažant Z. P., Caner, F., Carol, I., Adley, M., Akers, S.A., ” Microplane model M4 for concrete. I: formulation with work-conjugate deviatoric stress”, *Journal of Engineering Mechanics, ASCE* 126 (9), 994-953, 2000.
- [۵۴]. Zienkiewicz O. C., Pande, G. N., “Time-dependent multi-laminate model of rocks- A numerical study of deformation and failure of rock masses”, *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, (1), 219-247, 1997.
- [۵۵]. Pande G. N., Sharma, K. G.,”Multilaminate model of clays—a numerical evaluation of the influence of rotation of principal axes” , *ASCE J. Engng. Mech.* 109 (7), 397-418, 1983.
- [۵۶]. Sadrnejad S. A.,” A Multi-Plane Model for Natural Anisotropy of Sand”, *International Journal of Engineering, Transactions B: Applications*, Vol. 16, No. 4., pp. 311-327, 2003.
- [۵۷]. Kachanov L. M.,” Time of the rupture process under creep conditions” , *Isv. Akad. Nauk SSSR, Otd. Tehk. Nauk*, vol. 8, p. 26-31, 1958.
- [۵۸]. Rabotnov Y. N.,” Creep rupture”, *Proc., 12<sup>th</sup> International Congress of Applied Mechanics, Stanford.*, 1968.
- [۵۹]. Krajcinovic D., Fonseka, G. U.,” The continuous damage theory of brittle materials” , *Journal of Applied Mechanics, ASME*, vol. 48, p. 809-824, 1981.
- [۶۰]. Vakulenko A. A., Kachanov, M. L.,” Continuum theory of medium with cracks (in Russian)” , *Mekhanika Tverdogo Tela*, num. 4, p. 159-166, 1971.
- [۶۱]. Mazars J., ” Application de la mecanique de l’endommagement au comportement non lineaire et a la rupture du beton de structure” , *These de Doctorat d’etat, universite paris VI.*, France, 1984.
- [۶۲]. M. H., Sadd ,(2005), *Elasticity, Theory, Applications and Numerics*, Elsevier.

- [۶۳]. Labibzadeh M., Sadrnejad S. A., Naisipou M. r, 2008. "An Assessment of Compressive Size Effect of Plane Concrete Using Combination of Micro-Plane Damage Based Model and 3D Finite Elements Approach" *American Journal of Applied Sciences* 5 (2): 106-109.
- [۶۴]. Labibzadeh M., Sadrnejad S. A., 2007. "Crack Analysis of Concrete Arch Dams Using Micro-Planes Damage Based Constitutive Relations" *American Journal of Applied Sciences* 4 (4): 197-202.
- [۶۵]. Labibzadeh M., Sadrnejad S. A., 2006. "Mesoscopic Damage Based Model for Plane Concrete under Static and Dynamic Loadings" *American Journal of Applied Sciences* 3 (9): 2011-2019.
- [۶۶]. Nooru-Mohamed M. B., "Mixed-Mode Fracture of Concrete. an Expimental Approach" , *PhD thesis, Delft University of Technology, The Netherlands*, 1992.
- [۶۷]. Bazant Z. P., Giovanni, D. L., "Nonlocal Microplane Model With Strain-Softening Yield Limits" , *International Journal of Solids and Structures*, 41, pp. 7209-7240, 2004.

## Abstract

Despite the robustness of Finite Elements Method in analysis, one of the difficulties that are bound to FEM is the relative large time taken from CPU for mesh generation and preparing required information for analysis. Thus, some rather new methods were invented for solving the governed partial differential equations solely with a set of finite points, in which no mesh of elements are used for field variable approximation. These methods are called "Mesh Free" methods. Mesh Free methods has been rather widely used in analyzing different continuums and problems in fluid mechanics, solid mechanics, fracture mechanics and other problems. However, there have been few applications of these methods in analyzing nonlinear problem in concrete which we want to consider thermal stress.

Element Free Galerkin method (EFG) which is a mesh free method based on moving least square approximation is used in analysis of concrete behavior under microplane behavior model. To this aim, a computer code has been developed by the writer in

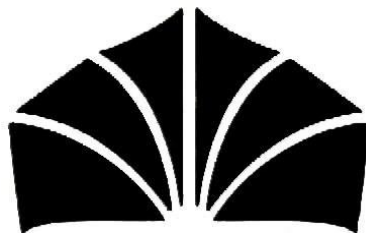


MATLAB which can be used for both EFG in three dimensions. And some useful function which use for complicated geometries like arch dams.

In present work a consistent micro multi-laminate model for numerically describing non-linear concrete material behavior in three-dimensional cases. The main assumption of the microplane model is that the strain vector acting on a given laminate in the material is the projection of the macroscopic strain tensor. Performed studies show that in case of proper nodal discretization and proper choice of EFG parameters, results from EFG are accurate but much higher computational time and also high sensitivity of the EFG results to some parameters cause that in spite of some advantages of mesh free methods, they are not yet a good substituent for Finite Elements Method.

The problem of calibrating microplane parameters directly from the experimental data which characterize the mechanical behavior of concrete is also addressed which demonstrates that the microplane model gives a numerical efficiency for code implementation and keeps desirable accuracy in experimental data fitting. Although the present work is not intended to be an exhaustive analysis of a specific arch dam for various loadings, this study has been undertaken in order to show the suitability and applicability of the new model for static analysis of arch dams under loads.

**Keywords:** finite points, Mesh Free methods, Element Free Galerkin method, concrete, numerical modeling, microplane, arch dam



**SH.CHAMRAN UNIVERSITY**  
**ENGINEERING COLLEGE**

Submitted in partial fulfillment of the requirements  
For the Master degree of Science in Civil Engineering

# **Crack Propagation Simulation under Temperature Loads Using Combination of Meshless and Micro-plane Theories**

**By**

**Mehdi Zarchi**

**Under the supervision of**

**Professor Mojtaba Labib Zadeh**

**September 2010**



**SH.CHAMRAN UNIVERSITY  
ENGINEERING COLLEGE**

**Master of Science in Civil Engineering**

# **Crack Propagation Simulation under Temperature Loads Using Combination of Meshless and Micro-plane Theories**

**By**

**Mehdi Zarchi**

**Under the supervision of**

**Professor Mojtaba Labib Zadeh**

**September 2010**