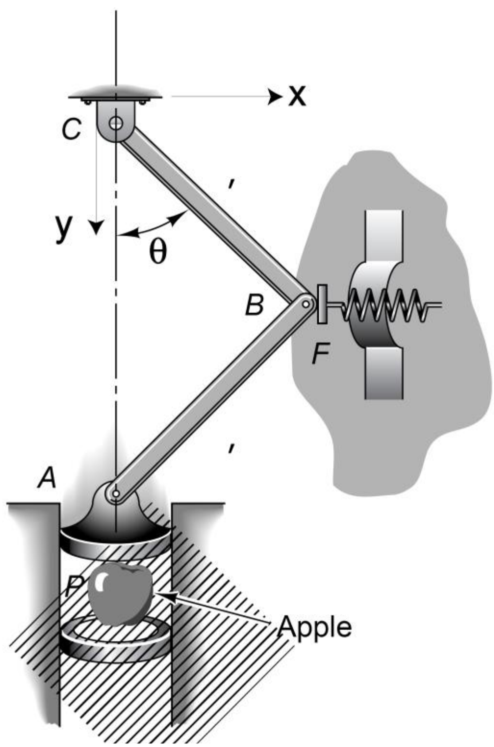
فصل ششم

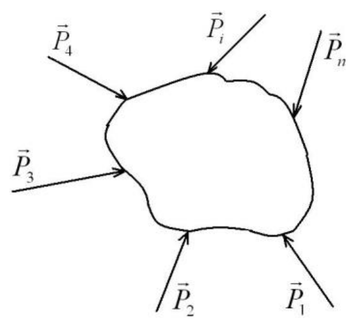
کارمجازی و انرژی



۱-۶- مقدمه و تاریخچه:

روش کارمجازی از مهم‌ترین روش‌ها در حل مسائل مکانیک اجسام صلب و اجسام انعطاف‌پذیر است. این اصل اولین بار توسط آقای ژان برنولی بیان شد و سپس توسط دانشمندان دیگر چون موپر تیوس، لاگرانژ و ماخ گسترش یافت. برنولی برای بیان اصل کار مجازی، جسمی را که تحت اثر نیروهای $\vec{P}_i$ در حال تعادل است، درنظر گرفت. (شکل۶-۱) سپس جسم را به مقدار کمی تغییرمکان مجازی داده طوری‌که هر کدام از نیروها به اندازه $\vec{\delta}_i$ تغییرمکان مجازی پیدا کردند. طبق اصل کار مجازی، جمع جبری حاصل‌ضرب‌های داخلی بردارهای $\vec{P}_i$ در $\vec{\delta}_i$ برای این جسم بایستی برابر صفر گردد. یعنی:

$$\vec{P}_1\vec{\delta}_1+\vec{P}_2\vec{\delta}_2+\vec{P}_3\vec{\delta}_3+\ldots+\vec{P}_{n-1}\vec{\delta}_{n-1}+\vec{P}_n\vec{\delta}_n=0 \qquad (۶-۱)$$



شکل ۶-۱

۲-۶- جابجایی مجازی و کار مجازی:

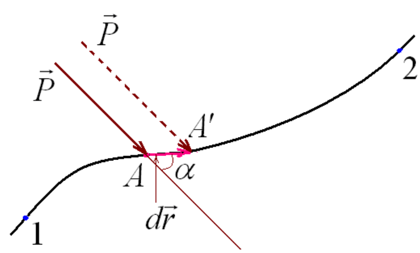
جابجایی مجازی δ_s یک ذره برابر یک تغییر جزئی دلخواه در وضعیت ذره متناسب با قیود اعمال شده بر روی ذره می باشد. این جابجایی می تواند تصور شود، اما کاری انجام نمی دهد. کار مجازی δU انجام شده به وسیله یک نیرو و به فرم $F_t\delta_s$ تعریف می گرددکه در آن F_t اندازه مولفه نیرو در راستای جابجای مجازی δ_s می باشد. کار مجازی δU انجام شده به‌وسیله کوپل گشتاور M به فرم $M\delta_\theta$ تعریف می شود که در آن $\delta\theta$ جابجایی زاویه‌ای مجازی می باشد.

۳-۶-کار انجام شده توسط یک نیرو:

طبق تعریف، کار انجام شده به‌وسیله نیروی $\vec{P}$ که بر نقطه‌ای مانند A از یک جسم اثر می کند، برابر است با حاصل‌ضرب داخلی نیروی $\vec{P}$ در بردار تغییرمکان نقطه A (شکل۶-۲) اگر کار با W مسافت طی شده با $d\vec{r}$ نشان داده شوند، آنگاه:

$$dW = \vec{P}.d\vec{r} = Pdr.Cos\alpha \qquad (۶-۲)$$

که در آن زاویه α، زوایه بین امتداد $\vec{P}$ و $d\vec{r}$ می باشد.



شکل ۶-۲

به طور خلاصه کار انجام شده توسط نیروی مذکور را می توان به صورت زیر بیان کرد. مقدار کار انجام شده توسط نیروی $\vec{P}$ برابر است با حاصل‌ضرب تصویر نیروی $\vec{P}$ روی امتداد تغییرمکان در مقدار تغییرمکان، به عبارت دیگر تصویر نیروی $\vec{P}$ در جهت عمود بر $d\vec{r}$ یعنی مولفه $PSin\alpha$ کاری انجام نمی دهد.

طبق تعریف، کار انجام شده هنگامی مثبت است که تصویر $\vec{P}$ روی $d\vec{r}$ هم‌جهت باشند و برعکس. اگر نقطه اثر نیروی $\vec{P}$ از 1 شروع و در نقطه 2 خاتمه یابد، (شکل) در این صورت مقدار کار انجام شده برابر است با:

$$W = \int dW = \int_{r_1}^{r_2} \vec{P}.d\vec{r} \qquad (۶-۳)$$

و یا به صورت انتگرال منحنی‌الخط به فرم زیر می تواند بیان گردد.

اگر $\vec{P} = P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\vec{k}$ و $d\vec{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}$ باشند، آنگاه حاصلضرب داخلی این دو بردار برابر است با: $\vec{P}.d\vec{r} = P_x dx + P_y dy + P_z dz$ بنابراین فرم انتگرال به صورت زیر در می‌آید.

$$W = \int_C \vec{P}.d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} P_x dx + \int_{y_1}^{y_2} P_y dy + \int_{z_1}^{z_2} P_z dz \qquad (۶-۴)$$

برای حل انتگرال منحنی الخط اگر $P_z = h(t)\,, P_y = g(t), P_x = f(t)$ یعنی مولفه‌های بردار نیرو تابعی از t باشند که t بین t_1 , t_2 تغییر می کند، پس از مشتق گرفتن از آنها و جایگذاری در انتگرال منحنی‌الخط، سرانجام این انتگرال به انتگرال یک متغیره زیر ساده می شود.

$$W = \int_C \vec{P}.d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} f(t).f'(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} g(t).g'(t)dt + \int_{t_1}^{t_2} h(t).h'(t)dt = \qquad (۶-۵)$$

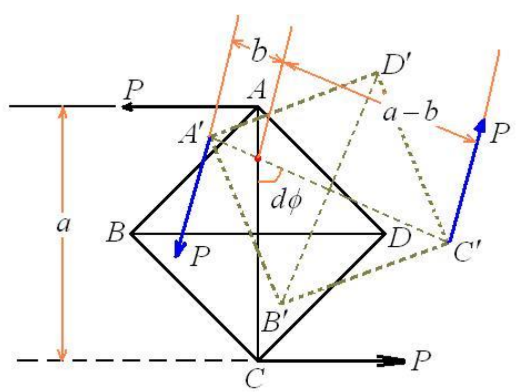
$$\int_{t_1}^{t_2} [f(t).f'(t) + g(t).g'(t) + h(t).h'(t)]dt$$

۴-۶- کار انجام شده توسط یک زوج نیرو:

مطابق شکل (۶-۳)، کوپل M که نیروهای آن P و به فاصله a هستند، بر صفحه $ABCD$ اثر می کند. فرض کنید که این صفحه در اثر زوج نیرو به اندازه $d\phi$ دوران نماید. حال کار نیروهای P، یعنی کار انجام شده توسط کوپل M را به صورت زیر می توان محاسبه نمود.

$$dW = Pbd\phi + P(a-b)d\phi = Pad\phi \Rightarrow \quad dW = Md\phi \qquad (۶-۶)$$

به عبارت دیگر، کار انجام شده توسط یک زوج نیرو برابر است با حاصل‌ضرب گشتاور آن زوج نیرو در زاویه دورانی که تحت اثر آن زوج برای جسم ایجاد شده است.



شکل ۶-۳

در مورد بردار گشتاور در فضا همیشه می توان مولفه‌های آن را روی محورهای $z\,,y\,,x$ نشان داد (شکل۶-۴) و یا می توان همان زوج نیرو (کوپل) را توسط زوج‌های همسنگ نشان داد.

با بررسی شکل(۶-۵) چنین می توان نتیجه گرفت که اگر یک دوران بی‌نهایت کوچک حول محور x انجام شود، $d\phi_x$، تنها زوجی که در این دوران کار انجام می دهد، کوپل M_x می باشد. بنابر تعریف، کار مربوطه برابر است با $M_x d\phi_x$، به همین ترتیب، اگر فرض شود دوران‌هایی حول محورهای مختصات به طور همزمان انجام شده و مولفه‌های آن M_x، M_y و M_z باشند، آنگاه مقدار کل کار انجام شده را می توان به صورت زیر نوشت:

$$dW = M_x.d\phi_x + M_x.d\phi_x + M_z.d\phi_z \qquad (۶\text{-}۷)$$

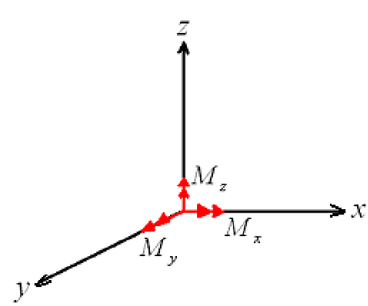
رابطه (۶-۷) را می توان به صورت حاصلضرب داخلی دو بردار $\vec{M} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j} + M_z\vec{k}$ و $d\vec{\phi} = d\phi_x\vec{i} + d\phi_y\vec{j} + d\phi_z\vec{k}$ به صورت زیر نوشت:

$$dW = \vec{M}.d\vec{\phi} \qquad (۶\text{-}۸)$$

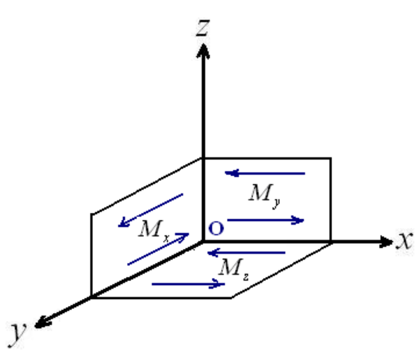
برای محاسبه کار کل انجام شده بین زاویه‌های $\phi_2\,,\phi_1$ بایستی از رابطه (۶-۸) انتگرال گرفت.

$$W = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \vec{M}.d\vec{\phi} = \int_{\phi_{x1}}^{\phi_{x2}} M_x.d\phi_x + \int_{\phi_{y1}}^{\phi_{y2}} M_y.d\phi_y + \int_{\phi_{z1}}^{\phi_{z2}} M_z.d\phi_z \qquad (۶\text{-}۹)$$

کار انجام شده توسط یک زوج نیرو مثبت است، هرگاه $d\phi$ و کوپل M هم‌جهت باشند و برعکس. انتگرال منحنی الخط بالا را می توان در حالتی که مولفه‌های کوپل تابعی از متغیر زمان t باشند، همانند انتگرال منحنی الخط نیرو محاسبه می شود.



شکل ۶-۴



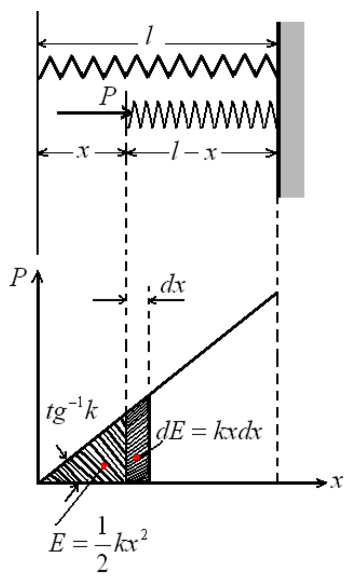
شکل ۶-۵

۶-۵- کار انجام شده در یک عضو ارتجاعی (فنر):

کار انجام شده روی یک عضو ارتجاعی به شکل انرژی پتانسیل ارتجاعی در جسم ذخیره می شود. مقدار نیرویی که در فنر، انرژی پتانسیل ارتجاعی تولید می کند، نسبت مستقیم با تغییرشکل فنر دارد. برای مثال، در یک فنر خطی و به طور کامل ارتجاعی، اگر طول اولیه فنر l باشد، پس از تاثیر نیروی P طول آن $l-x$ تبدیل می گردد. (شکل۶-۶) مقدار نیروی P برابر است با:

$$P = kx \qquad (۶-۱۰)$$

که در آن k ضریب فنر و مقدار آن شاخص سختی فنر می باشد. در واقع ضریب فنر مقدار نیرویی است که در فنر تغییرمکان واحد تولید کند. اگر نیروی P که بر فنر اثر می کند، تغییرطولی برابر dx در فنر تولید کند، کار انجام شده یا انرژی پتانسیل ارتجاعی ذخیره شده برابر می شود با:



شکل ۶-۶

$$dE = Pdx = kxdx \qquad (۶-۱۱)$$

پس:

$$E = \int_0^x Pdx = \int_0^x kxdx = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (۶-۱۲)$$

بنابراین برای فنر:

$$dE = kxdx \quad ، E = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (۶-۱۳)$$

۶-۶- تعادل:

۱-۶-۶-تعادل یک ذره: شرط لازم و کافی برای تعادل یک ذره صفر شدن کار مجازی انجام شده به‌وسیله تمام نیرو های عمل کننده بر روی ذره در جریان هر جابجایی مجازی δ_s می باشد.

۲-۶-۶- تعادل اجسام صلب و انرژی پتانسیل:

شرط لازم وکافی برای تعادل جسم صلب صفرشدن کار مجازی انجام شده به‌وسیله تمام نیروهای خارجی عمل کننده بر روی جسم، در جریان هر جابجایی مجازی متناسب با قیود اعمالی بر روی جسم می باشد.

تعادل یک سیستم از اجسام صلب متصل به هم، چنانچه در بالا برای یک جسم صلب تعریف گردید، برای جابجایی‌های مجازی متناسب با قیدها هیچ‌کاری توسط نیروهای خارجی به‌وسیله عکس‌العمل‌ها در پین‌های صاف توسط نیروهای عمود به جهت حرکت انجام نمی‌شود. نیروهای خارجی که کار انجام می‌دهند، شامل اصطکاک است که اگر وجود داشته باشد، نیروهای فعال یا موثر هستند.

اگر جسمی به جرم m به اندازه δh به سمت بالا حرکت داده شود، وزن $W = mg$ کاری منفی برابر با $\delta U = -mg\delta h$ انجام می دهد. اگر جسم دارای جابجایی δh به سمت پایین باشد و h به سمت پایین مثبت گرفته شود، کار نیروی وزن مثبت بوده و برابر با $+mg\delta h$ می باشد. انرژی پتانسیل گرانشی V_g یک جسم به سادگی به صورت کار انجام شده بر روی جسم، توسط نیرویی مساوی و معکوس با وزن تعریف می شود که نیروی مزبور جسم را به موقعیت مورد نظر از یک سطح مرجع اختیاری می رساند، که در سطح مزبور، انرژی پتانسیل برابر صفر تلقی می گردد. در این صورت، انرژی پتانسیل مساوی با کار انجام شده توسط نیروی وزن منتها با علامت جبری منفی می باشد. برای مثال هنگامی که جسم به سوی بالا کشانده می شود، کار انجام شده به انرژی تبدیل می گردد که قابل ارزیابی باشد. زیرا که جسم مزبور به هنگام بازگشت به موقعیت پایین‌تر اولیه خود، قادر به انجام کار بر روی جسمی دیگر است، سطح بیانگر انرژی پتانسیل صفر، کاملاً اختیاری و دلخواه می باشد، زیرا فقط تغییر در انرژی مزبور بوده و صرف نظر از اینکه سطح مرجع را در چه مکانی بگیریم،

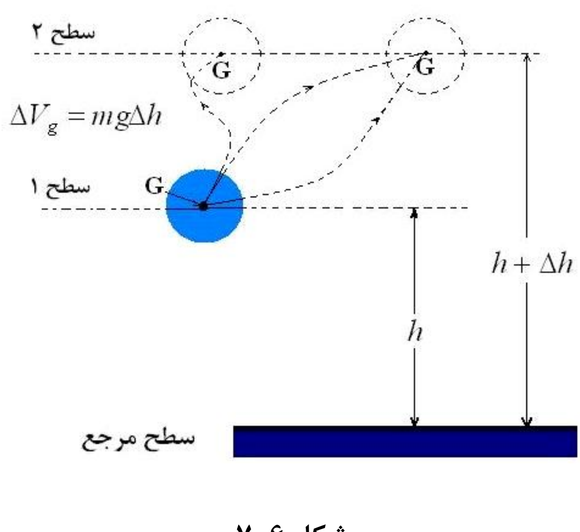
تغییر مزبور یکسان خواهد بود، همچنین انرژی پتانسیل گرانشی مستقل از مسیر پیموده شده برای رسیدن به ارتفاع خاص h مورد نظر می باشد.

با توجه به شکل(۶-۷) جرم m دارای تغییر یکسان در انرژی پتانسیل می باشد، صرف نظر از اینکه برای رسیدن از سطح اول به سطح دوم چه مسیری را بپیماید، زیرا که برای هر سه مسیر، Δh یکسان است. البته سنجش ارتفاع h تا مرکز جرم جسم می باشد. تغییر مجازی در انرژی پتانسیل گرانشی، به سادگی برابر است با:

$$\delta V_g = mg\delta h \tag{۶-۱۴}$$

که در δh جابجایی مجازی مرکز جرم جسم می باشد. اگر مرکز جرم جسم دارای جابجایی مجازی به سمت پایین باشد، δV_g منفی می باشد. واحد انرژی پتانسیل گرانشی، همان واحد کار و انرژی پتانسیل الاستیکی است که در سیستم متریک برحسب ژول بیان می شود.

اگر انرژی پتانسیل دارای مقدار ثابتی باشد، تعادل در آن سیستم وجود دارد. انرژی پتانسیل V فنر با ضریب ثابت k کشیده شده یا فشرده شده در فاصله x از حالت اولیه برابر $\frac{1}{2}Kx^2$ می باشد. بنابراین V تابعی با یک متغیر مستقل x می باشد. پس: $\frac{dV}{dx}=0$ مقادیر x را برای تعادل نتیجه می دهد.



شکل ۶-۷

برای یک مجموعه مکانیکی شامل اعضای الاستیکی و اعضایی که تغییرموقعیت می دهند، می توان اصل کار مجازی را چنین بازگو کرد:
کار مجازی انجام شده توسط تمامی نیروهای فعال خارجی، به استثنای کار مربوط به نیروهای گرانشی و فنر که در عبارات انرژی پتانسیل به احتساب در می آیند، بر روی یک مجموعه مکانیکی در حالت تعادل، مساوی است با تغییر متناظر در انرژی پتانسیل کل گرانشی و الاستیکی مجموعه به ازای هرگونه جابجایی مجازی و همه جابجایی‌های مجازی که با قیود مجموعه سازگار باشند.

۳-۶-۶- تعادل پایدار:

تعادل پایدار زمانی اتفاق می افتد که انرژی پتانسیل V حداقل باشد. شکل (۶-۸) جابجایی یک مهره را در پایین یک سیستم بدون اصطکاک که به شکل یک دایره خم شده نشان می دهد. درک مستقیم نشان می دهد که این یک وضعیت تعادل پایدار به همراه انرژی پتانسیل حداقل مهره است، زیرا هر تغییری با بازگشت به وضعیت اول همراه است.
با استفاده از محور x به عنوان داده استاندارد، انرژی پتانسیل مهره در هر موقعیت زیر محور x برابراست با:

$$V=-Wy=-W\sqrt{a^2-x^2} \qquad (۶-۱۵)$$

با قرار دادن $\frac{dV}{dx}=0$ در وضعیت تعادل مورد ارزیابی قرار می گیرد. بنابراین

$$\frac{d^2V}{dx^2}=+\frac{W}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{Wx^2}{\left(a^2-x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (۶-۱۶)$$

و در $x=0$، $\frac{d^2V}{dx^2}=+\frac{W}{a}$(مثبت) که نشان دهنده تعادل پایدار می باشد.

۴-۶-۶- تعادل ناپایدار:

تعادل ناپایدار در زمانی اتفاق می افتد که انرژی پتانسیل Vحداکثر باشد. شکل (۶-۹) مهره را در وضعیت بالای سیستم نشان می دهد. دید ظاهری نشان می دهد که این وضعیت تعادل ناپایدار به انرژی پتانسیل حداکثر مهره می باشد. با استفاده از محور x به عنوان مرجع استاندارد، انرژی پتانسیل مهره در مکان بالای محور x برابر است با:

$$\frac{dV}{dx}=0 \quad ، \quad V=+Wy=+W\sqrt{a^2-x^2} \qquad (۶-۱۷)$$

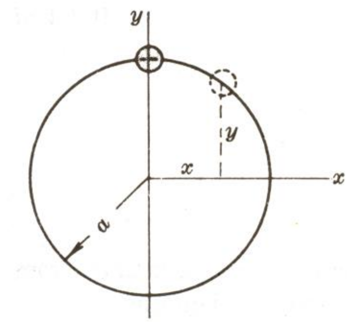
$$\frac{dV}{dx}=\frac{-Wx}{\sqrt{a^2-x^2}}=0 \qquad (۶-۱۸)$$

بنابراین پاسخ نیاز دارد که $x = 0$، مهره آنگاه بالای سیستم قرار دارد.، همچنین:

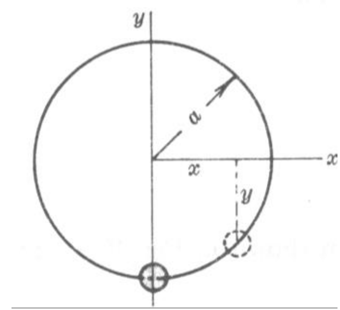
$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{W}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \frac{Wx^2}{\left(a^2 - x^2\right)^{\frac{3}{2}}} \qquad (۶-۱۹)$$

و در $x = 0$ می توان نوشت:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{W}{a} \text{(منفی)} \qquad (۶-۲۰)$$



شکل ۶-۹



شکل ۶-۸

۵-۶-۶- تعادل خنثی:

تعادل خنثی هنگامی وجود دارد که سیستم در هر وضعیتی که قرار داده شود، در همان وضعیت باقی بماند. برای نمونه مهره می‌تواند بر روی یک سیستم افقی قرار گرفته و در همان وضعیت باقی بماند.

۶-۶-۶- خلاصه تعادل:

جهت تعیین مقادیر متغیرها برای یک سیستم در حال تعادل است، بیان انرژی پتانسیل Vسیستم به عنوان تابعی از متغیر می باشد. ارزیابی $\frac{d^2V}{dx^2}$ جهت مشخص کردن نوع تعادل بکار می‌رود.

در حالت $\frac{d^2V}{dx^2} \succ 0$ تعادل‌پایدار، $\frac{d^2V}{dx^2} \prec 0$ تعادل‌ناپایدار و در حالت $\frac{d^2V}{dx^2} = 0$ تعادل خنثی است.