ارتعاشات مکانیکی

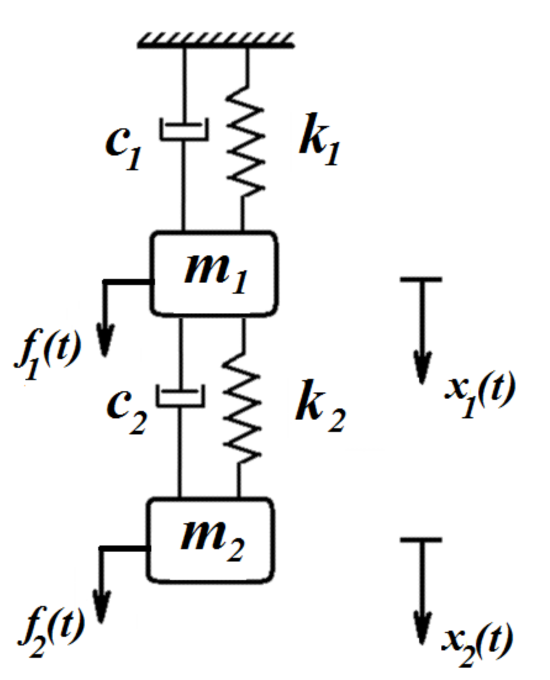
ارائه دهنده: دکتر سیروان فرهادی

فصل هفتم: ارتعاشات سیستم‌های چند درجه آزادی- روش نیوتون

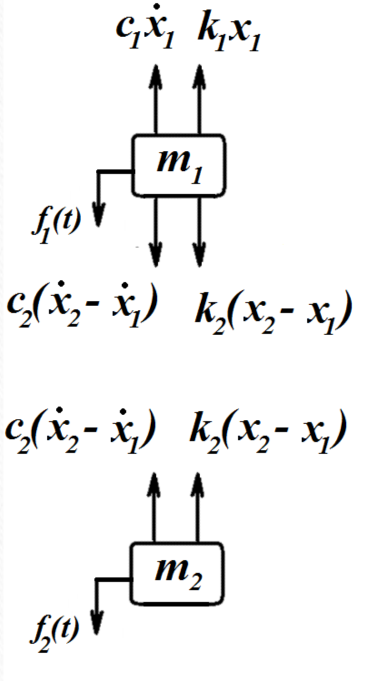
ارائه دهنده: دکتر سیروان فرهادی

فهرست مطالب

معادله دیفرانسیل حرکت



یک سیستم دو درجه آزادی با تحریک خارجی



دیاگرام آزاد سیستم دو درجه آزادی نشان داده شده

چنانکه در شکل نشان داده شده است، نیروی هر یک از فنرها برابر است با جابجایی نسبی بین دو سر فنر (مقدار تغییر شکل فنر) ضربدر ضریب سختی آن فنر. به همین ترتیب نیروی هر یک از میراگرها نیز برابر است با سرعت جابجایی دو سر میراگر نسبت به همدیگر ضربدر ضریب میرایی آن میراگر.
اکنون با توجه به دیاگرام‌های آزاد، معادله‌ی حرکت جرم‌ها را می‌توان مطابق زیر نوشت:

$$m_1\ddot{x}_1 = f_1(t) - k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 + k_2(x_2 - x_1) + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$m_2\ddot{x}_2 = f_2(t) - k_2(x_2 - x_1) - c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

رابطه‌ی بالا را می‌توان در فرم ماتریسی به شکل زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

و یا

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{f(t)\}$$

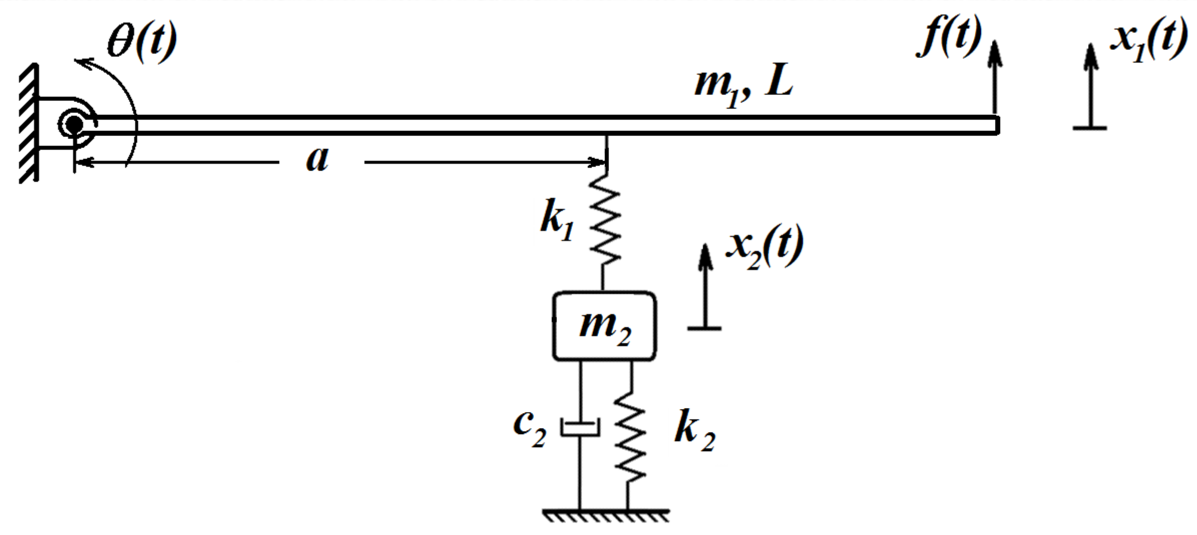
که در آن

$$[M]=\begin{bmatrix} m_۱ & ۰ \\ ۰ & m_۲ \end{bmatrix}, \qquad [C]=\begin{bmatrix} c_۱+c_۲ & -c_۲ \\ -c_۲ & c_۲ \end{bmatrix}$$

$$[K]=\begin{bmatrix} k_۱+k_۲ & -k_۲ \\ -k_۲ & k_۲ \end{bmatrix}, \qquad \{f(t)\}=\begin{Bmatrix} f_۱(t) \\ f_۲(t) \end{Bmatrix}.$$

در رابطه بالا، ماتریس های [M]، [C] و [K] را به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی سیستم می‌نامند. همچنین بردار {f(t)} را بردار نیروهای خارجی و بردار {x} را بردار جابجایی سیستم می‌نامیم.

مثال



برای سیستم نشان داده شده در شکل مقابل، معادله‌های حرکت را در فرم ماتریسی استخراج نمایید (تیر را صلب و یکنواخت در نظر بگیرید).

حل: سیستم دارای دو درجه‌ی آزادی است و برای توصیف حرکت آن می‌توان از مختصات عمومی θ و x_2 استفاده کرد. در این صورت با فرض کوچک بودن زوایای دوران تیر، معادله‌های حرکت برای تیر و وزنه‌ی متصل به آن را می‌توان به ترتیب مطابق زیر نوشت:

$$\sum M_O = I_O\alpha \quad \Rightarrow \quad f(t)\times L - k_1(a\theta - x_2)\times a = I_O\ddot{\theta} \qquad (I)$$

$$\sum F = m_2 a_2 \quad \Rightarrow \quad -k_2x_2 - c_2\dot{x}_2 - k_1(x_2 - a\theta) = m_2\ddot{x}_2 \qquad (II)$$

با انتقال معادله‌های بالا به فرم ماتریسی، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} I_O & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1a^2 & -k_1a \\ -k_1a & k_1+k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t)\times L \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (III)$$

که در آن

$$I_O = m_1L^2/3$$

معادله‌ی بالا را می‌توان با استفاده از رابطه‌ی $x_1 = L\theta$ ، بر حسب مختصات عمومی x_1 و x_2 به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} m_1/3 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 a^2/L^2 & -k_1 a/L \\ -k_1 a/L & k_1 + k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (IV)$$

ارتعاشات آزاد سیستم‌های چند درجه آزادی نامیرا

اگر نیروهای خارجی وارد بر یک سیستم برابر صفر باشند، بردار نیروهای خارجی برابر صفر می‌شود و بنابراین برای یک سیستم چند درجه آزادی نامیرا، معادله‌ی حرکت را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{0\}$$

معادله‌ی بالا یک معادله‌ی همگن است که می‌توان حل آن را با استفاده از اصول معادلات دیفرانسیل به سادگی بدست آورد. اما در اینجا سعی داریم که پاسخ سیستم را با استفاده از مفاهیم فیزیکی استخراج کنیم تا درک بیشتری نسبت به روابط بدست آمده داشته باشیم.

به عنوان مثال دوباره سیستم دو درجه آزادی نشان داده شده در ابتدای فصل را در نظر بگیرید. اگر فرض نماییم که نیروهای خارجی وارد بر مجموعه و ضرایب میرایی همگی برابر صفر باشند، معادله‌ی حرکت آن را می-توانیم به شکل زیر بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} m_۱ & ۰ \\ ۰ & m_۲ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_۱ \\ \ddot{x}_۲ \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_۱ + k_۲ & -k_۲ \\ -k_۲ & k_۲ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{Bmatrix}$$

برای حل دستگاه معادله‌ی دیفرانسیل فوق باید ابتدا یک پاسخ برای آن حدس بزنیم. برای این کار باید به فیزیک مسأله توجه نماییم. فرض کنید که به عنوان مثال ما جرم ۲ را نگه داشته و جرم ۱ را مقداری از حالت تعادل خود منحرف کنیم و سپس به سیستم اجازه دهیم به صورت آزاد ارتعاش نماید. می دانیم جرم ۱ از طریق فنر ۲ به جرم ۲ متصل است و حرکات آن باعث تحریک این جرم نیز می‌گردد. اگر فرض نماییم ارتعاشات جرم ۱ هارمونیک بوده و با فرکانس ω باشد، حرکات این جرم موجب تحریک جرم ۲ با همان فرکانس خواهد شد (همانند تحریک پایه در فصل پنجم). در این صورت می‌توان جابجایی دو جرم را به شکل زیر بیان کرد:

$$x_1 = X_1 e^{i\omega t}$$
$$x_2 = X_2 e^{i\omega t}$$

روابط فوق را به شکل برداری نیز می‌توان نوشت:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

و یا

$$\{x\} = \{X\} e^{i\omega t}$$

اکنون تابع حدس را در معادله‌ی حرکت جایگذاری می‌کنیم که می‌دهد:

$$(-\omega^2 [M] + [K])\{X\} e^{i\omega t} = \{0\}$$

چون در حالت کلی بردار جابجایی مخالف صفر است، از رابطه‌ی پیش نتیجه گرفته می‌شود:

$$([K]-\lambda[M])\{X\}=\{0\}$$

که در آن $\lambda=\omega^2$ است. معادله‌ی بالا را معادله مشخصه سیستم می‌نامند. این معادله فرم کلی یک دسته از معادلات جبری را نشان می‌دهد که با نام مسأله مقدار ویژه شناخته می‌شوند. در رابطه‌ی بالا اگر {X}=0 باشد، مسأله ارضاء می‌شود و پاسخ بدیهی معادله بدست می‌آید که حالت تعادل استاتیکی را نشان می‌دهد. در این حالت جابجایی هر دو جرم از حالت تعادل برابر صفر است. برای آنکه معادله‌ی مذکور دارای جواب غیر بدیهی باشد، یا باید همه‌ی مؤلفه‌های ماتریس ضرایب برابر صفر باشند و یا آنکه دترمینان این ماتریس برابر صفر گردد. با توجه به فیزیک مسأله امکان صفر شدن همه‌ی مؤلفه ها وجود ندارد، پس تنها راه باقیمانده آن است که داشته باشیم:

$$\det([K]-\lambda[M])=0$$

پس برای این مسأله باید داشته باشیم:

$$(k_1+k_2-m_1\lambda)(k_2-m_2\lambda)+k_2^2=0$$

ملاحظه می‌شود که برای سیستم دو درجه آزادی مورد بررسی به یک معادله درجه‌ی دوم بر حسب λ رسیدیم که حل آن فرکانس‌های طبیعی ارتعاش را مشخص می‌کند. در حالت کلی برای یک سیستم n درجه آزادی، دترمینان ماتریس ضرایب به یک معادله‌ی جبری درجه‌ی n از λ می‌رسد که دارای n ریشه است و در نتیجه سیستم دارای n فرکانس طبیعی خواهد بود.

در این مثال، دترمینان ماتریس ضرایب را می توان به شکل زیر نوشت:

$$A\lambda^2+B\lambda+C=0,$$

$$A=m_1m_2,\qquad B=-m_2(k_1+k_2)-m_1k_2,\qquad C=k_1k_2$$

با حل معادله‌ی درجه‌ی دوم، ریشه‌های معادله به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\lambda_{۱,۲}=\frac{-B\pm\sqrt{B^{۲}-۴AC}}{۲A}$$

که به سادگی می‌توان نشان داد ریشه های بدست آمده، اعداد حقیقی و بزرگتر از صفر هستند. در نتیجه فرکانس‌های طبیعی سیستم برابر خواهند بود با:

$$\omega=\pm\omega_{۱}=\pm\sqrt{\lambda_{۱}} \qquad or \qquad \omega=\pm\omega_{۲}=\pm\sqrt{\lambda_{۲}}$$

با جایگذاری هر یک از مقادیر بدست آمده در معادله‌ی مشخصه، می‌توان دید که دو سطر ماتریس ضرایب مستقل از همدیگر نیستند و یکی از آنها ضریبی از دیگری است. بنابراین باید از یکی از معادله‌ها صرفنظر نمود. به عنوان مثال با صرفنظر از معادله‌ی دوم، معادله‌ی اول را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(k_{۱}+k_{۲}-m_{۱}\lambda)X_{۱}-k_{۲}X_{۲}=۰$$

و در نتیجه

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{k_1+k_2-\lambda\, m_1}{k_2}=a$$

رابطه‌ی بالا نسبت جابجایی حرکت دو جرم را مشخص می‌کند و مقدار آن بستگی به مقدار $\lambda=\omega^2$ دارد. با استفاده از این معادله می‌توان بی نهایت جواب برای دامنه های جابجایی بدست آورد که همگی در معادله صدق می‌کنند. اما در هر حال نسبت جابجایی‌ها مقدار ثابتی است که این مقدار ثابت شکل ارتعاش را در فرکانس طبیعی مورد نظر مشخص می‌کند:

$$\left.\frac{X_2}{X_1}\right|_{\lambda=\lambda_1=\omega_1^2}=\frac{k_1+k_2-m_1\omega_1^2}{k_2}=a_1,\qquad \left.\frac{X_2}{X_1}\right|_{\lambda=\lambda_2=\omega_2^2}=\frac{k_1+k_2-m_1\omega_2^2}{k_2}=a_2$$

اگر در یکی از فرکانس‌های ارتعاشی دامنه‌ی جابجایی جرم اول برابر D باشد، خواهیم داشت:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t} = D \begin{Bmatrix} 1 \\ a \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

که در آن D به شرایط اولیه بستگی دارد و بردار $\begin{Bmatrix} 1 \\ a \end{Bmatrix}$ که شکل کلی حرکت را مشخص می‌کند، بردار شکل مود ارتعاشی نامیده می‌شود. حال چون مجموعه دارای دو فرکانس طبیعی است که مثبت و منفی آنها نیز هر یک می‌تواند پاسخ مسأله باشد، پاسخ کلی مسأله به شکل زیر است:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = D_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ a_1 \end{Bmatrix} e^{i\omega_1 t} + D_2 \begin{Bmatrix} 1 \\ a_1 \end{Bmatrix} e^{-i\omega_1 t} + D_3 \begin{Bmatrix} 1 \\ a_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega_2 t} + D_4 \begin{Bmatrix} 1 \\ a_2 \end{Bmatrix} e^{-i\omega_2 t}$$

برای آنکه پاسخ فوق در نهایت یک بردار حقیقی باشد، باید داشته باشیم:

$$D_1 = D_2^*, \qquad D_3 = D_4^*$$

با تبدیل توابع نمایی به توابع مثلثاتی، پاسخ کلی مسأله به شکل زیر استخراج می گردد :

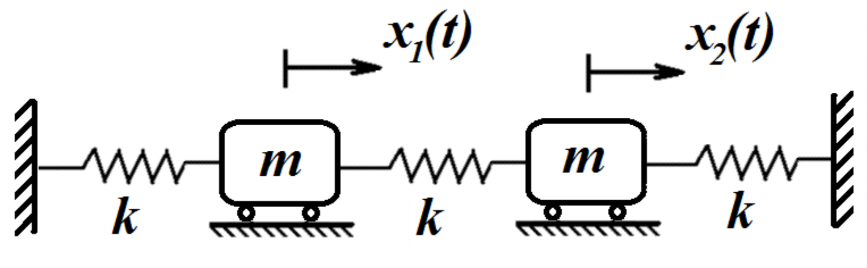
$$\begin{Bmatrix} x_{۱}(t) \\ x_{۲}(t) \end{Bmatrix} = A_{۱}\begin{Bmatrix} ۱ \\ a_{۱} \end{Bmatrix}\sin\omega_{۱}t + A_{۲}\begin{Bmatrix} ۱ \\ a_{۱} \end{Bmatrix}\cos\omega_{۱}t + A_{۳}\begin{Bmatrix} ۱ \\ a_{۲} \end{Bmatrix}\sin\omega_{۲}t + A_{۴}\begin{Bmatrix} ۱ \\ a_{۲} \end{Bmatrix}\cos\omega_{۲}t$$

معادله‌ی بالا را می‌توان به شکل زیر نیز بیان نمود:

$$\begin{Bmatrix} x_{۱}(t) \\ x_{۲}(t) \end{Bmatrix} = B_{۱}\begin{Bmatrix} ۱ \\ a_{۱} \end{Bmatrix}\sin(\omega_{۱}t + \theta_{۱}) + B_{۲}\begin{Bmatrix} ۱ \\ a_{۲} \end{Bmatrix}\sin(\omega_{۲}t + \theta_{۲})$$

در روابط بالا ضرایب توابع مثلثاتی و یا زاویه فاز اولیه آنها با استفاده از شرایط اولیه‌ی مسأله تعیین می شوند.

مثال



شکل روبرو یک سیستم دو درجه آزادی را نشان می-دهد. فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای ارتعاشی آن را بدست آورید. مسأله را برای دو حالت زیر حل کنید:

الف) $m_۱ = m_۲ = m$

ب) $m_۱ = m$ و $m_۲ = ۲m$

حل: با استفاده از روش نیوتون معادلات حرکت سیستم به فرم زیر بدست می‌آیند:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 2k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

با فرض هارمونیک بودن مسأله

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}e^{i\omega t}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} 2k-m_1\omega^2 & -k \\ -k & 2k-m_2\omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب، معادله مشخصه‌ی سیستم به شکل زیر بدست می‌آید:

$$(2k-m_1\omega^2)(2k-m_2\omega^2)-k^2=0$$

الف) برای حالت $m_۱ = m_۲ = m$ ، می‌توان معادله مشخصه را به شکل زیر ساده کرد:

$$(۲k - m\omega^۲)^۲ = k^۲$$

و با حل این معادله بدست می‌آید:

$$\omega_۱^۲ = \frac{k}{m}, \qquad \omega_۲^۲ = \frac{۳k}{m}$$

با جایگذاری مقادیر فوق در معادله مشخصه‌ی سیستم، بدست می‌آید:

$$\left.\frac{X_۲}{X_۱}\right|_{\omega_۱} = \frac{۲k - m\omega_۱^۲}{k} = ۱, \qquad \left.\frac{X_۲}{X_۱}\right|_{\omega_۲} = \frac{۲k - m\omega_۲^۲}{k} = -۱$$

پس در این حالت پاسخ زمانی سیستم به شکل زیر است:

$$\begin{Bmatrix} x_۱(t) \\ x_۲(t) \end{Bmatrix} = B_۱ \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱ \end{Bmatrix} \sin(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_۱) + B_۲ \begin{Bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{Bmatrix} \sin(\sqrt{\frac{۳k}{m}}t + \theta_۲)$$

ب) برای حالت $m_1 = m$ و $m_2 = 2m$، معادله مشخصه سیستم به شکل زیر ظاهر می‌شود:

$$(2k - m\omega^2)(2k - 2m\omega^2) - k^2 = 0$$

و یا

$$2m^2\omega^4 - 6k\,m\,\omega^2 + 3k^2 = 0$$

در نتیجه فرکانس‌های طبیعی سیستم برابرند با

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{3k\,m \pm \sqrt{(3k\,m)^2 - 6k^2m^2}}{2m^2} = \frac{3}{2}\left(\frac{k}{m}\right) \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{k}{m}\right)$$

و یا

$$\omega_1^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{k}{m}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{k}{m}\right) = 0.634\frac{k}{m} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_1 = 0.796\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\omega_2^2 = \frac{3}{2}\left(\frac{k}{m}\right) - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{k}{m}\right) = 2.366\frac{k}{m} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_2 = 1.538\sqrt{\frac{k}{m}}$$

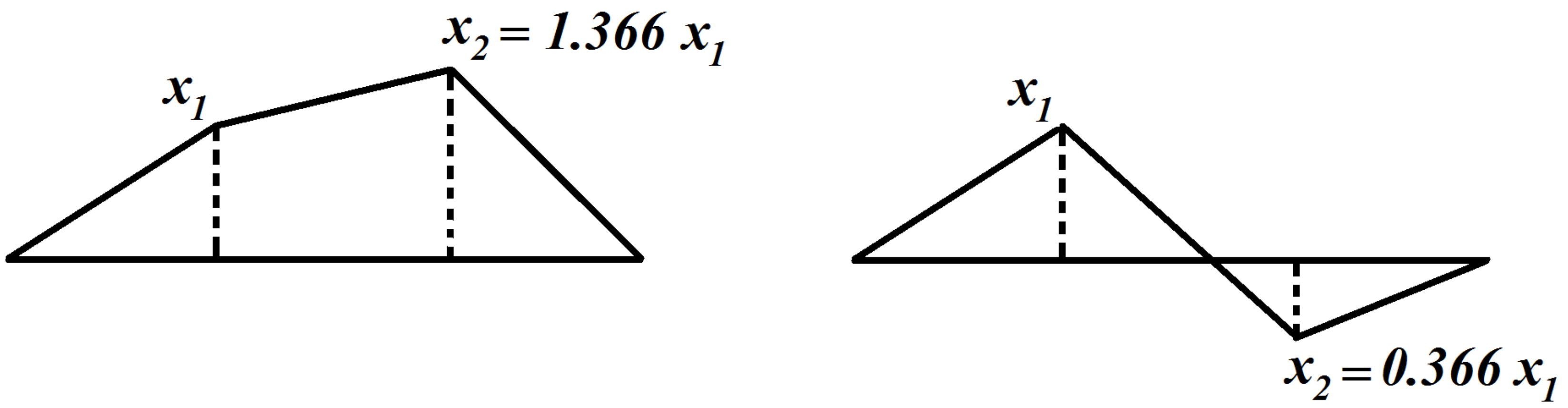
پس در این حالت نسبت جابجایی دو جرم در فرکانس‌های طبیعی اول و دوم مطابق زیر بدست می‌آیند:

$$\left.\frac{X_۲}{X_۱}\right|_{\omega_۱} = \frac{۲k - m\omega_۱^۲}{k} = ۱{,}۳۶۶, \qquad \left.\frac{X_۲}{X_۱}\right|_{\omega_۲} = \frac{۲k - m\omega_۲^۲}{k} = -۰{,}۳۶۶$$

و در نتیجه پاسخ کلی سیستم به شکل زیر است:

$$\begin{Bmatrix} x_۱(t) \\ x_۲(t) \end{Bmatrix} = B_۱ \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱{,}۳۶۶ \end{Bmatrix} \sin(۰{,}۷۹۶\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_۱) + B_۲ \begin{Bmatrix} ۱ \\ -۰{,}۳۶۶ \end{Bmatrix} \sin(۱{,}۵۳۸\sqrt{\frac{k}{m}}t + \theta_۲)$$

در این حالت نیز دو مود ارتعاشی وجود دارند. در مود اول ارتعاشی که دارای فرکانس طبیعی کوچکتری است، حرکت هر دو جرم همسو است، اما دامنه‌ی جابجایی آنها یکسان نیست. در مود ارتعاشی دوم نیز حرکت دو جرم در دو جهت معکوس و با دو دامنه‌ی متفاوت است.

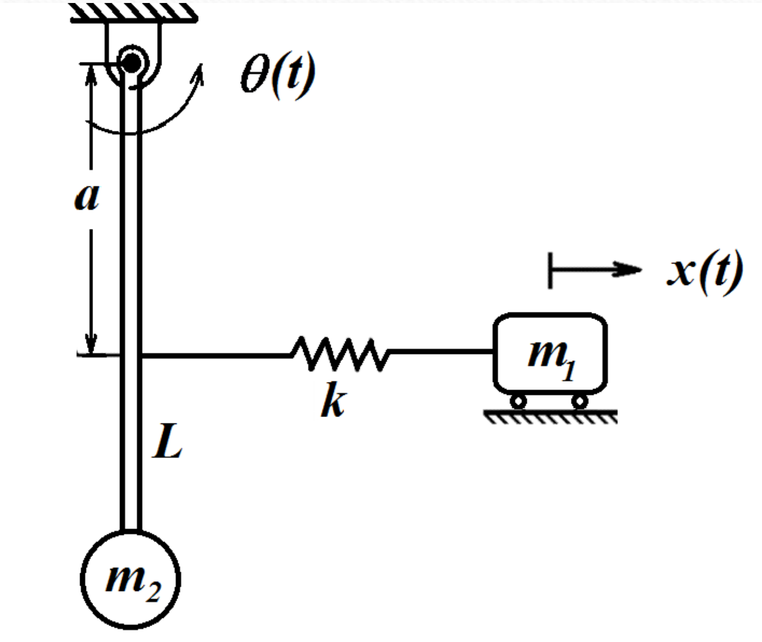


$\omega_1 = 0.796\sqrt{\frac{k}{m}}$ الف)

$\omega_2 = 1.538\sqrt{\frac{k}{m}}$ ب)

نسبت جابجایی جرم‌ها در حالت (ب)

مثال



شکل ۷–۷ یک پاندول و یک گاری را نشان می‌دهد که توسط یک فنر خطی به همدیگر وصل شده‌اند. با فرض آنکه $x(\circ)=x_\circ$ و $\dot{x}(\circ)=\dot{\theta}(\circ)=\theta(\circ)=\circ$ باشد، معادله‌ی حرکت گاری را در طول زمان بدست آورید. برای حل مسأله، از مقادیر عددی زیر استفاده کنید:

$m_1 = 2kg,\qquad m_1 = 1kg\qquad k = 100N/m,$

$L = 1m,\qquad a = 0.5m,\qquad g = 10m/s^2$

حل: زاویه‌ی دوران پاندول و جابجایی افقی جرم را به عنوان مختصات عمومی انتخاب می‌کنیم. با فرض کوچک بودن زاویه‌ی دوران پاندول، می‌توان نوشت:

$$\sum M_O = I_O \alpha \quad \Rightarrow \quad -m_2 g \times L\theta - k(a\theta - x) \times a = I_O \ddot{\theta} \qquad (I)$$

که در آن $I_O = m_2 L^2$ است.

با استفاده از قانون دوم نیوتون، برای جرم نیز خواهیم داشت:

$$\sum F = m_1 a_1 \quad \Rightarrow \quad -k(x - a\theta) = m_1 \ddot{x} \qquad (II)$$

با انتقال روابط بالا به فرم ماتریسی، بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} ka^2 & -ka \\ -ka & ka^2 + m_2 gL \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (III)$$

با فرض هارمونیک بودن حرکت سیستم ($x = \bar{X}\, e^{i\omega t}$ و $\theta = \bar{\theta}\, e^{i\omega t}$)، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} ka^{۲} - \omega^{۲} m_{۱} & -ka \\ -ka & ka^{۲} + m_{۲} gL - \omega^{۲} m_{۲} L^{۲} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{Bmatrix} \qquad (IV)$$

حال با جایگذاری مقادیر عددی داده شده، بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} ۲۵ - ۲\omega^{۲} & -۵۰ \\ -۵۰ & ۳۵ - \omega^{۲} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{X} \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ۰ \\ ۰ \end{Bmatrix} \qquad (V)$$

برای آنکه معادله‌ی بالا دارای جواب غیربدیهی (غیرصفر) باشد، باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر گردد، که نتیجه می‌دهد:

$$(۲۵ - ۲\omega^{۲})(۳۵ - \omega^{۲}) - ۲۵۰۰ = ۰ \qquad \Rightarrow \qquad \omega_{۱}^{۲} = ۶{,}۳۵۸, \quad \omega_{۲}^{۲} = ۷۸{,}۶۴۲$$

با جایگذاری دو ریشه‌ی فوق در هر یک از معادلات دستگاه (V)، شکل مودهای سیستم به شکل زیر استخراج می‌شوند:

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_۱ \\ \bar{\theta}_۱ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱٫۷۴۵ \end{Bmatrix}, \qquad \begin{Bmatrix} \bar{X}_۲ \\ \bar{\theta}_۲ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ۱ \\ -۱٫۱۴۷ \end{Bmatrix}$$

در نتیجه پاسخ زمانی سیستم را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \bar{X}_۱ \\ \bar{\theta}_۱ \end{Bmatrix} (a_۱ \sin \omega_۱ t + b_۱ \cos \omega_۱ t) + \begin{Bmatrix} \bar{X}_۲ \\ \bar{\theta}_۲ \end{Bmatrix} (a_۲ \sin \omega_۲ t + b_۲ \cos \omega_۲ t) \\ &= \begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱٫۷۴۵ \end{Bmatrix} (a_۱ \sin ۲٫۵۲۱ t + b_۱ \cos ۲٫۵۲۱ t) + \begin{Bmatrix} ۱ \\ -۱٫۱۴۷ \end{Bmatrix} (a_۲ \sin ۸٫۸۶۸ t + b_۲ \cos ۸٫۸۶۸ t) \end{aligned}$$

با اعمال شرایط اولیه‌ی داده شده، ضرایب مجهول رابطه‌ی بالا به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$a_۱ = a_۲ = ۰, \qquad b_۱ = ۰٫۳۹۷ x_۰, \; b_۲ = ۰٫۶۰۳ x_۰$$

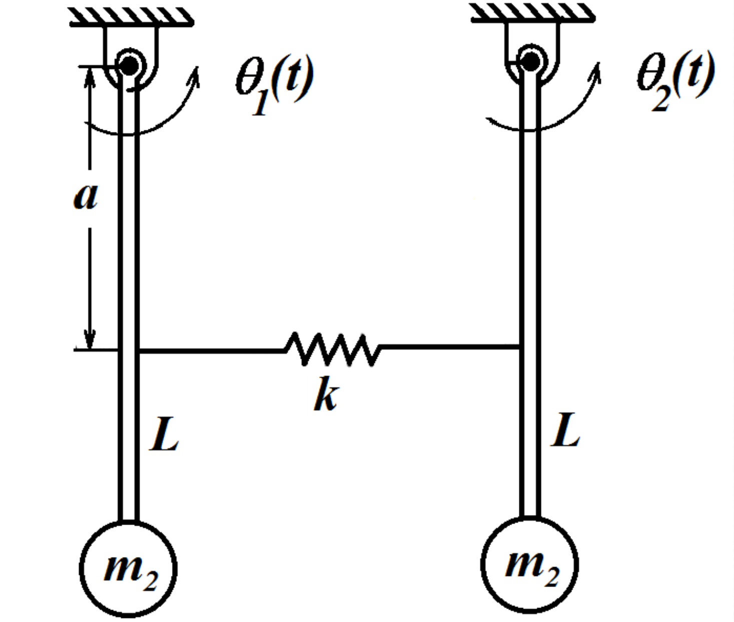
تپش (ضربان)

در بحث ارتعاشات هارمونیک سیستم‌های یک درجه آزادی بدون میرایی دیدیم که اگر فرکانس طبیعی سیستم با فرکانس تحریک دارای اختلاف کوچکی باشند، سیستم می‌تواند دچار تپش شود. چنین رفتاری را می‌توان در ارتعاشات آزاد و یا اجباری سیستم‌های چند درجه آزادی نیز مشاهده نمود. به عنوان مثال برای یک سیستم دو درجه آزادی بدون میرایی، پاسخ ارتعاشی سیستم را برای یک تحریک اولیه می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} x_۱(t) \\ x_۲(t) \end{Bmatrix} = B_۱ \begin{Bmatrix} ۱ \\ a_۱ \end{Bmatrix} \sin(\omega_۱ t + \theta_۱) + B_۲ \begin{Bmatrix} ۱ \\ a_۲ \end{Bmatrix} \sin(\omega_۲ t + \theta_۲)$$

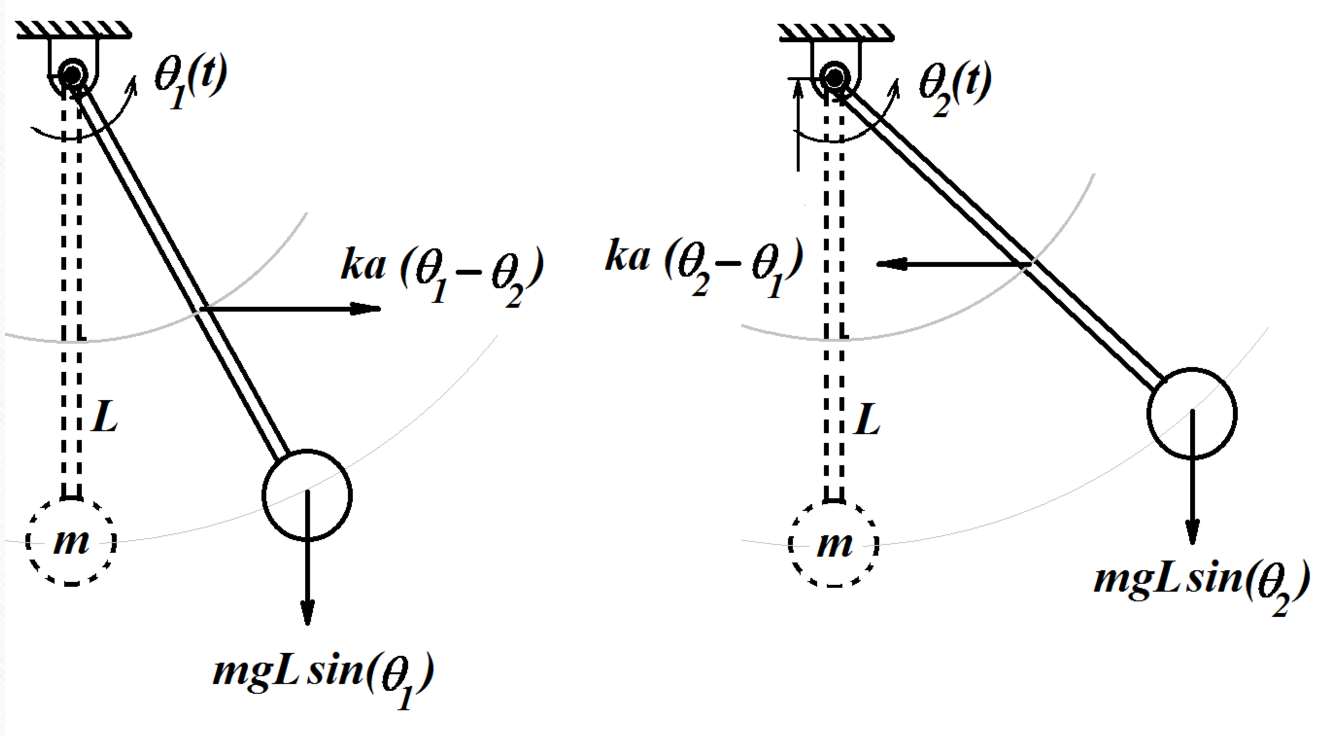
در رابطه بالا اگر فرکانس‌های طبیعی اول و دوم مقادیری نزدیک به همدیگر داشته باشند، حاصل‌جمع دو عبارت هارمونیک را می‌توان به صورت یک عبارت هارمونیک با دامنه متغیر نوشت که دامنه‌ی آن به آرامی تغییر می‌کند. در نتیجه ارتعاش هر یک از درجات آزادی سیستم به صورت ضربانی خواهد بود.

مثال



شکل روبرو یک سیستم ارتعاشی را نشان می‌دهد که از دو آونگ یکسان تشکیل شده است که توسط یک فنر با ضریب سختی کوچک k به همدیگر متصل شده‌اند و در موقعیت تعادل فنر در حالت آزاد خود قرار دارد. پاسخ زمانی سیستم را به یک تحریک اولیه بیابید.

حل: ابتدا دیاگرام آزاد دو آونگ را مطابق شکل رسم می‌کنیم. چون نیروی وزن موجب تغییر شکل اولیه فنر نشده است، نیروی تغییر شکل اولیه فنر برابر صفر است و گشتاور نیروی وزن را خنثی نکرده است. پس در استخراج معادلات حرکت باید نیروی وزن را نیز در نظر بگیریم.



با استفاده از روابط نیوتونی برای حرکت دورانی، معادله‌ی حرکت دو آونگ را می‌توان مطابق زیر نوشت:

$$m\,L^{2}\ddot{\theta}_{1} = -mg\,L\sin\theta_{1} + ka^{2}(\theta_{2}-\theta_{1})$$
$$m\,L^{2}\ddot{\theta}_{2} = -mg\,L\sin\theta_{2} - ka^{2}(\theta_{2}-\theta_{1})$$

با فرض کوچک بودن ارتعاشات دو آونگ، معادله‌های بالا را می‌توان مطابق زیر در فرم ماتریسی نوشت:

$$\begin{bmatrix} m\,L^{2} & 0 \\ 0 & m\,L^{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\theta}_{1} \\ \ddot{\theta}_{2} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} ka^{2}+mg\,L & -ka^{2} \\ -ka^{2} & ka^{2}+mg\,L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \theta_{1} \\ \theta_{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

اگر سیستم به شکل آزاد ارتعاش نماید، پاسخ آن را می‌توان به شکل هارمونیک زیر حدس زد:

$$\begin{Bmatrix} \theta_{1} \\ \theta_{2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_{1} \\ \bar{\theta}_{2} \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

با قرار دادن این عبارت در معادله‌ی حرکت، معادله مشخصه‌ی سیستم بدست می‌آید که با حل معادله مشخصه‌ی سیستم، فرکانس‌های طبیعی و نسبت جابجایی آونگ‌ها در فرکانس‌های طبیعی آن تعیین می‌شوند که برابرند با

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{L}}, \qquad \left.\frac{\bar{\theta}_2}{\bar{\theta}_1}\right|_{\omega=\omega_1} = 1$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{L} + 2\frac{k}{m}\frac{a^2}{L^2}}, \qquad \left.\frac{\bar{\theta}_2}{\bar{\theta}_1}\right|_{\omega=\omega_2} = -1$$

بنابراین پاسخ کلی سیستم را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{Bmatrix} = A_1\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\sin\omega_1 t + A_2\begin{Bmatrix}1\\ 1\end{Bmatrix}\cos\omega_1 t + A_3\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}\sin\omega_2 t + A_4\begin{Bmatrix}1\\ -1\end{Bmatrix}\cos\omega_2 t$$

حال اگر فرض کنیم در لحظه‌ی اولیه $\theta_1(0)=A$ و $\dot{\theta}_1(0)=\dot{\theta}_2(0)=\theta_2(0)=0$ ، بوده باشد، با اعمال این شرایط اولیه بدست می‌آید:

$$A_1=A_3=0,$$

$$A_2=A_4=A/2$$

در نتیجه جابجایی هر یک از آونگ‌ها از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\theta_1=\frac{A}{2}\cos\omega_1 t+\frac{A}{2}\cos\omega_2 t$$

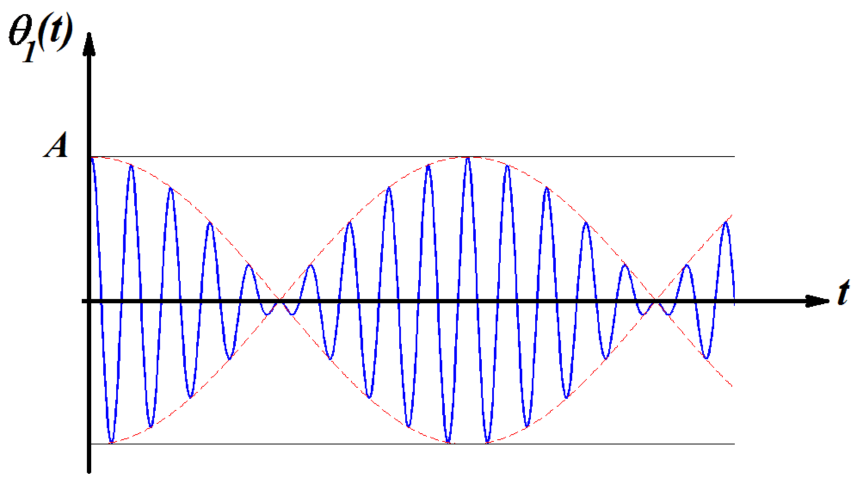
$$\theta_2=\frac{A}{2}\cos\omega_1 t-\frac{A}{2}\cos\omega_2 t$$

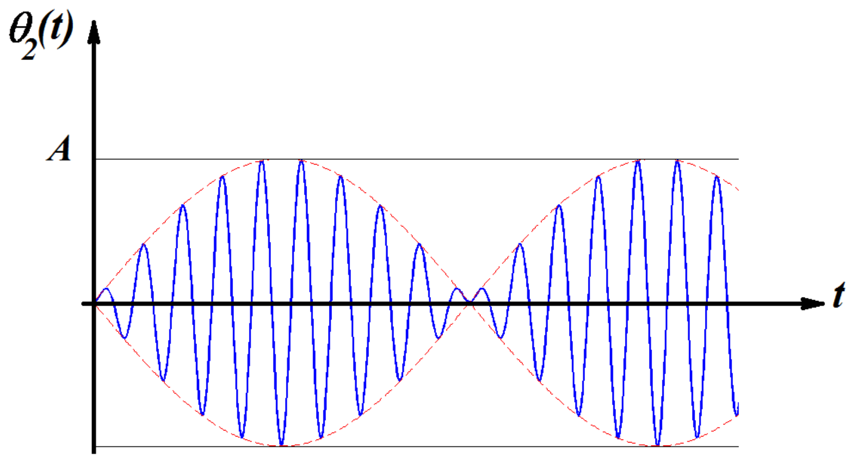
معادلات بالا را می‌توان به شکل زیر بازنویسی کرد:

$$\theta_1=A\cos\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\cos\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

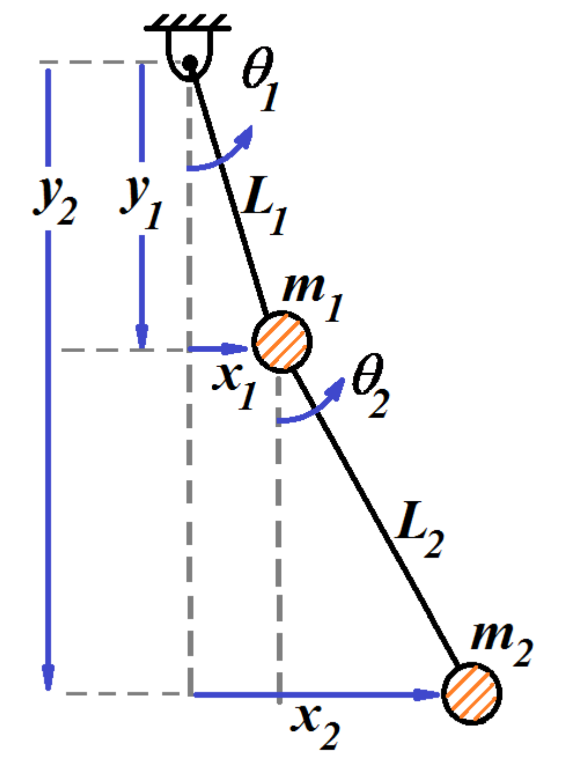
$$\theta_2=-A\sin\left(\frac{\omega_1-\omega_2}{2}t\right)\sin\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}t\right)$$

بنابراین اگر ω_1 و ω_2 مقادیری نزدیک به هم باشند (ضریب سختی فنر مقدار کوچکی باشد)، می‌توان تصور کرد که دو آونگ با فرکانس مشابه $(\omega_1 + \omega_2)/2$ نوسان می‌کنند، در حالی که دامنه‌ی نوسان آنها با اختلاف فاز 90° نسبت به همدیگر و با فرکانس کوچک $(\omega_1 - \omega_2)/2$ نوسان می‌نماید. به عبارت دیگر چون سیستم پایستار است و مجموع انرژی آن ثابت است، انرژی به تدریج از یک آونگ به دیگری منتقل شده و سپس به آن باز می‌گردد. در واقع این دو آونگ برای همدیگر به شکل جاذب ارتعاشی عمل می‌کنند و به نوبه ارتعاشات همدیگر را جذب می‌کنند.





مختصات عمومی و جفت شدن (کوپلینگ) مختصات



یک سیستم دو درجه آزادی مانند شکل روبرو را در نظر بگیرید که از یک آونگ دوتایی تشکیل شده است. وضعیت قرارگیری این سیستم را در هر لحظه از زمان می‌توان با دو زاویه θ_1 و θ_2 مشخص کرد. همچنین این کار را می‌توان با مختصات x_1 و x_2 یا مختصات y_1 و y_2 نیز انجام داد. در حالت کلی به هر دسته از مختصات مستقل که به تعداد درجات آزادی سیستم باشند و بتوانند موقعیت سیستم را به صورت کامل توصیف نمایند، مختصات عمومی یا تعمیم یافته می‌گویند. ترکیبات خطی از مختصات عمومی بالا نیز می توانند به عنوان دسته ای دیگر از مختصات عمومی را شکل دهند، هر چند که ممکن است معنی فیزیکی مشخص نداشته باشند.

پس از تعریف مختصات عمومی می‌توان معادلات دیفرانسیل حرکت را بر حسب این مختصات و مشتق‌های زمانی آن استخراج کرد. به عنوان نمونه، برای یک سیستم دو درجه آزادی بدون میرایی، معادله‌ی دیفرانسیل حرکت در حالت کلی به شکل زیر استخراج می گردد:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

در روابطی مانند رابطه‌ی فوق اگر ماتریس جرم غیرقطری باشد، می گوییم که معادلات حرکت دارای جفت‌شدگی (کوپلینگ) دینامیکی هستند. همچنین اگر ماتریس سختی غیرقطری باشد، می گوییم معادلات حرکت دارای جفت‌شدگی استاتیکی هستند. نوع انتخاب مختصات عمومی می‌تواند باعث جفت‌شدگی استاتیکی، جفت شدگی دینامیکی و یا هر دو نوع جفت شدن در معادلات حرکت شود.

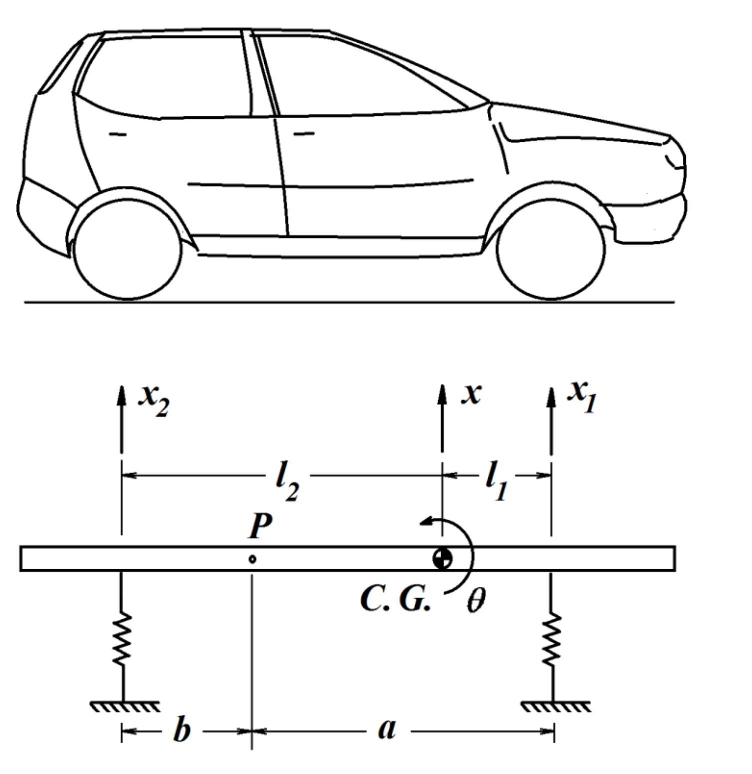
می‌توان مختصات تعمیم یافته را به گونه‌ای انتخاب کرد که معادلات حرکت فاقد جفت شدگی باشد. در این حالت معادلات حرکت کاملاً از همدیگر مستقل می‌شوند و می‌توان آنها را به صورت جداگانه حل کرد. چنین مختصاتی را مختصات اصلی یا مختصات نرمال می‌نامند.

اگر چه برای سیستم‌های غیرمیرا می‌توان همواره مختصات را به گونه‌ای تعریف کرد که معادلات حرکت از همدیگر مستقل باشند، چنین کاری برای سیستم‌های میرا در حالت کلی میسر نیست.
معادلات ماتریسی زیر حالتی را نشان می‌دهند که در آن جفت‌شدگی دینامیکی و استاتیکی وجود ندارد، با این حال معادله‌های حرکت توسط مؤلفه‌های c_{12} و c_{21} از ماتریس میرایی به همدیگر جفت شده‌اند:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

در رابطه‌ی فوق اگر $c_{12}=c_{21}=0$ باشد، معادلات حرکت از همدیگر مستقل می‌شوند و گفته می‌شود که سیستم دارای میرایی تناسبی است، یعنی اینکه می‌توان ماتریس میرایی را به صورت ترکیبی از دو ماتریس جرم و سختی در نظر گرفت.

مثال



شکل مقابل یک مدل ساده از یک خودرو را نشان می‌دهد که عبارت است از یک تیر غیریکنواخت با شرایط دو سر الاستیک. چنان‌که در شکل ملاحظه می‌شود، مرکز جرم خودرو در جایی غیر از مرکز تیر قرار دارد. با توجه به شکل معادلات حرکت را بر حسب

الف- جابجایی و دوران مرکز جرم،

ب- جابجایی دو سرتیر،

ج- جابجایی نقطه دلخواه P و زاویه دوران تیر بنویسید.

د- نقطه P را به گونه‌ای تعیین کنید که کوپلینگ استاتیکی صفر شود.

حل: ابتدا معادله‌ی تعادل دینامیکی را برای حرکت جانبی و زاویه ای تیر می‌نویسیم:

$$\sum F = ma \qquad \Rightarrow \quad -k_۱x_۱ - k_۲x_۲ = m\ddot{x} \qquad (I)$$

$$\sum M_G = I_G\alpha \qquad \Rightarrow \quad -k_۱x_۱l_۱ + k_۲x_۲l_۲ = I_G\ddot{\theta} \qquad (II)$$

از طرفی با توجه به شکل روابط هندسی زیر برقرار هستند:

$$x_۱ = x + l_۱\theta, \qquad x_۲ = x - l_۲\theta \qquad (III)$$

با جایگذاری روابط فوق در معادله‌های تعادل دینامیکی، معادله‌های حرکت سیستم بر حسب مختصات عمومی x و θ (جابجایی‌های مرکز جرم) بدست می‌آیند که آنها را در فرم ماتریسی به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & I_G \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_1l_1 - k_2l_2 \\ k_1l_1 - k_2l_2 & k_1l_1^2 + k_2l_2^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (IV)$$

ملاحظه می‌شود که معادلات بدست آمده دارای کوپلینگ استاتیکی هستندکه بدین معنی است اگر یک نیرو و یا گشتاور استاتیکی به مرکز جرم وارد شود، همزمان باعث چرخش و جابجایی مرکز جرم می‌شود.

می‌توان از روابط هندسی (III) به شکل زیر استفاده کرد:

$$x = \frac{x_1 l_2 + x_2 l_1}{l_1 + l_2}, \qquad \theta = \frac{x_1 - x_2}{l_1 + l_2} \qquad (V)$$

و معادلات حرکت سیستم را بر حسب جابجایی دو سر تیر به شکل زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} ml_2/(l_1+l_2) & ml_1/(l_1+l_2) \\ -I_G/(l_1+l_2) & I_G/(l_1+l_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \\ -k_1 l_1 & k_2 l_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (VI)$$

معادله‌های بدست آمده در این مختصات دارای هر دو نوع جفت‌شدگی استاتیکی و دینامیکی هستند. در این مورد نیز وجود جفت‌شدگی استاتیکی بین مختصات مذکور به این معنی است که اگر یک نیرو به هر یک از دو انتهای تیر وارد شود، باعث جابجایی هر دو سر آن می‌شود.

برای بدست آوردن معادلات حرکت بر حسب جابجایی‌های نقطه‌ی دلخواه P، معادله‌ی تعادل دینامیکی برای حرکت زاویه‌ای را به شکل زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\sum M_P = I_G\alpha + e\times m\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad -k_1x_1a + k_2x_2b = I_G\ddot{\theta} + me\ddot{x} \qquad (VII)$$

که در آن e فاصله مرکز جرم از نقطه P است. از طرفی با استفاده از روابط هندسی داریم:

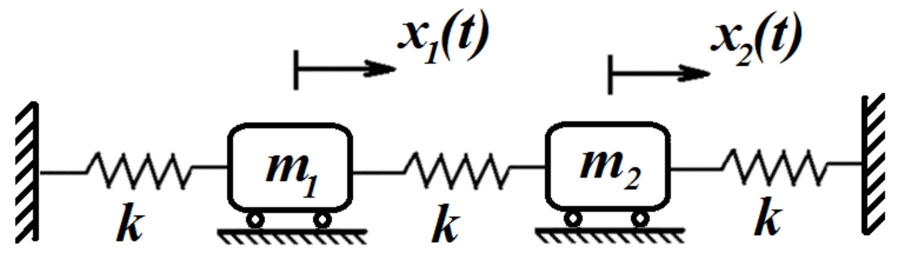
$$x_1 = x_P + a\theta, \qquad x_2 = x_P - b\theta, \qquad x = x_P + e\theta, \qquad I_P = I_G + me^2$$

با جایگذاری روابط بالا در معادله‌های (I) و (VII)، معادلات حرکت به شکل زیر استخراج می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & I_P \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_p \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2 & k_1a-k_2b \\ k_1a-k_2b & k_1a^2+k_2b^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_p \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (IIX)$$

اگر $a/b = k_۲/k_۱$ باشد، جفت‌شدگی استاتیکی بین جابجایی عرضی نقطه‌ی P و دوران تیر از بین می‌رود. این بدان معنی است که اگر یک نیرو و یا گشتاور به نقطه‌ی P اعمال شود، تنها باعث جابجایی عرضی و یا دوران تیر می‌شود. در حالت خاص اگر مرکز جرم در موقعیت تعیین شده برای P قرار داشته باشد ($a/b = k_۲/k_۱$ و $e = ۰$) هر دو نوع جفت شدگی از بین می‌روند و حرکت زاویه‌ای و حرکت جانبی تیر مستقل از همدیگر خواهند شد و در هر دو حالت بارگذاری استاتیکی و دینامیکی، تحریک یکی باعث حرکت دیگری نخواهد شد. در این صورت مختصات اصلی سیستم تعیین شده اند. در حالت کلی مختصات اصلی را می توان با ترکیب خطی جابجایی مرکز جرم تیر و زاویه چرخش آن بدست آورد.

مثال



برای سیستم نشان داده شده در شکل روبرومختصات اصلی را بدست آورید.

حل: با استفاده از روش نیوتون معادلات حرکت سیستم مطابق زیر استخراج می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{x}_1 + 2k\,x_1 - k\,x_2 = 0 \\
&m\ddot{x}_2 + 2k\,x_2 - k\,x_1 = 0 \qquad (I)
\end{aligned}
$$

با حل معادله مشخصه سیستم فرکانس‌های طبیعی سیستم به صورت $\omega_1 = \sqrt{k/m}$ و $\omega_2 = \sqrt{3k/m}$ استخراج می‌شوند.

می‌خواهیم مختصات تعمیم یافته q_1 و q_2 را به گونه‌ای تعیین کنیم که به دو معادله‌ی مستقل از همدیگر برسیم و طبیعی است چون این دو معادله ارتعاشات آزاد همان مجموعه را توصیف می‌کنند، باید فرکانس‌های طبیعی آنها نیز برابر فرکانس‌های طبیعی همان مجموعه باشند. در نتیجه معادله‌های حرکت در نهایت باید به شکل زیر بدست آیند:

$$
\begin{aligned}
&\ddot{q}_1 + \omega_1^2 q_1 = 0 \\
&\ddot{q}_2 + \omega_2^2 q_2 = 0 \qquad (II)
\end{aligned}
$$

فرض کنید مختصات تعمیم یافته‌ی $q_۱$ و $q_۲$ را به صورت ترکیبی از دو مختصات $x_۱$ و $x_۲$ به شکل زیر در نظر گرفته باشیم:

$$q_۱ = x_۱ + a_۱ x_۲$$
$$q_۲ = x_۱ + a_۲ x_۲ \qquad (III)$$

با جایگذاری رابطه (III) در (II) و با داشتن فرکانس های طبیعی سیستم، خواهیم داشت:

$$(\ddot{x}_۱ + a_۱ \ddot{x}_۲) + \frac{k}{m}(x_۱ + a_۱ x_۲) = ۰$$

$$(\ddot{x}_۱ + a_۲ \ddot{x}_۲) + \frac{۳k}{m}(x_۱ + a_۲ x_۲) = ۰$$

از رابطه بالا بدست می آید:

$$\ddot{x}_۱ = \frac{۱}{(a_۲ - a_۱)} \frac{k}{m}\left(-(a_۲ - ۳a_۱)x_۱ + ۲a_۲ a_۱ x_۲\right)$$

$$\ddot{x}_۲ = \frac{۱}{(a_۲ - a_۱)} \frac{k}{m}\left(-۲x_۱ - (۳a_۲ - a_۱) x_۲\right)$$

از طرفی از رابطه (I) داریم:

$$\ddot{x}_۱ = \frac{k}{m}\left(-۲x_۱ + x_۲\right)$$
$$\ddot{x}_۲ = \frac{k}{m}\left(x_۱ - ۲x_۲\right)$$

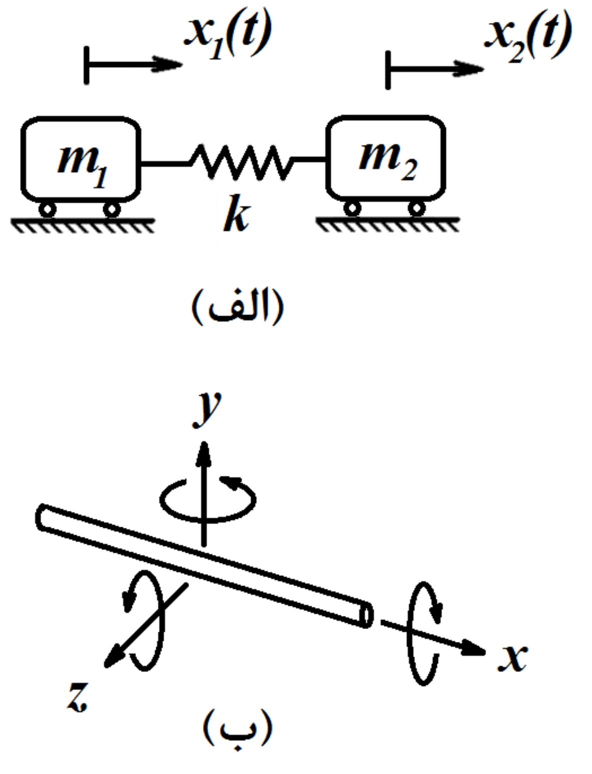
با مقایسه‌ی دو رابطه‌ی بالا بدست می آید:

$$a_۱ = ۱, \qquad a_۲ = -۱$$

و بنابراین مختصات اصلی برابرند با

$$q_۱ = x_۱ + x_۲$$
$$q_۲ = x_۱ - x_۲$$

سیستم‌های نیمه معین (غیرمقید)

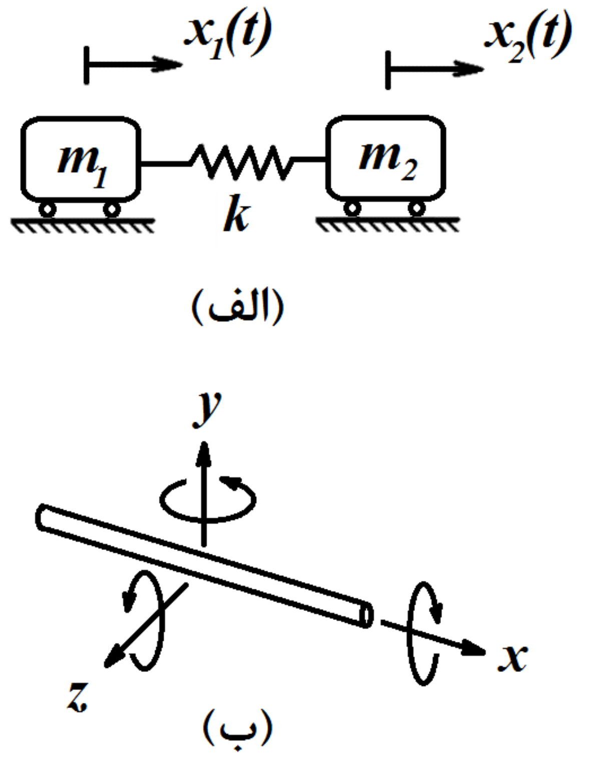


اگر در یک سیستم ارتعاشی تمام اجزای سیستم بتوانند به صورت نامحدود در یک جهت حرکت نمایند و جابجایی نسبی بین آنها برابر صفر باشد، گفته می‌شود که سیستم دارای مود حرکتی صلب است و چنین سیستم‌هایی را سیستم‌های نیمه معین و یا غیرمقید می‌نامند.

به عنوان مثال شکل الف دو گاری را نشان می‌دهد که توسط یک فنر به همدیگر وصل شده‌اند و می‌توانند به صورت نامحدود در راستای X حرکت نمایند. در نتیجه سیستم دارای یک مود حرکتی صلب است. در شکل ب نیز یک میله نشان داده شده است که می‌تواند دارای ارتعاشات پیچشی، کششی و یا خمشی باشد. همچنین این میله به جایی مقید نشده است و می‌تواند دارای شش مود حرکتی صلب باشد.

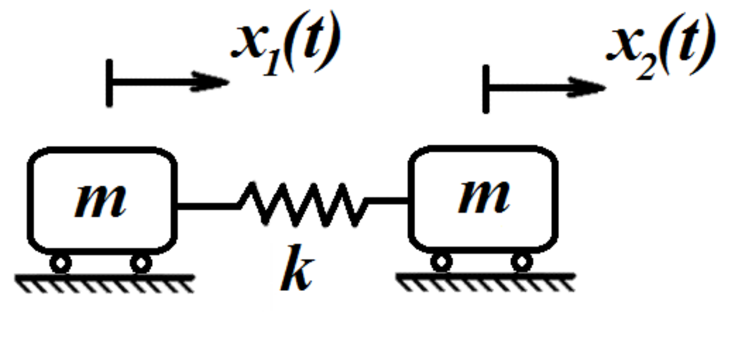
سیستم‌های نیمه معین (غیرمقید)

اگر یک سیستم دارای مود حرکتی صلب باشد، به ازای تعداد مودهای حرکت صلب می‌تواند دارای حرکات بدون بازگشت باشد و دوره‌ی تناوب این مودها برابر بی‌نهایت می‌شود (یعنی هیچ وقت به جای خود باز نمی‌گردد). به عبارتی دیگر یک سیستم غیر مقید به تعداد مودهای صلب خود دارای فرکانس های طبیعی صفر است.



مثال

مطابق شکل دو گاری با جرم یکسان توسط یک فنر به همدیگر وصل شده‌اند. فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای مجموعه را بدست آورید.



حل: با استفاده از قانون دوم نیوتون معادله‌ی دیفرانسیل حرکت مجموعه را استخراج کرده و آن را در شکل ماتریسی بیان می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (I)$$

با فرض هارمونیک بودن حرکت

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}e^{i\omega t}$$

بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} k-m\omega^2 & -k \\ -k & k-m\omega^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (II)$$

در نتیجه معادله مشخصه‌ی سیستم به شکل زیر استخراج می‌شود:

$$(k - m\omega^2)^2 - k^2 = 0$$

که می‌دهد

$$\omega_1^2 = 0, \qquad \omega_2^2 = \frac{2k}{m} \qquad (III)$$

از طرفی با استفاده از معادله‌ی نخست از دستگاه معادلات (II) بدست می‌آید:

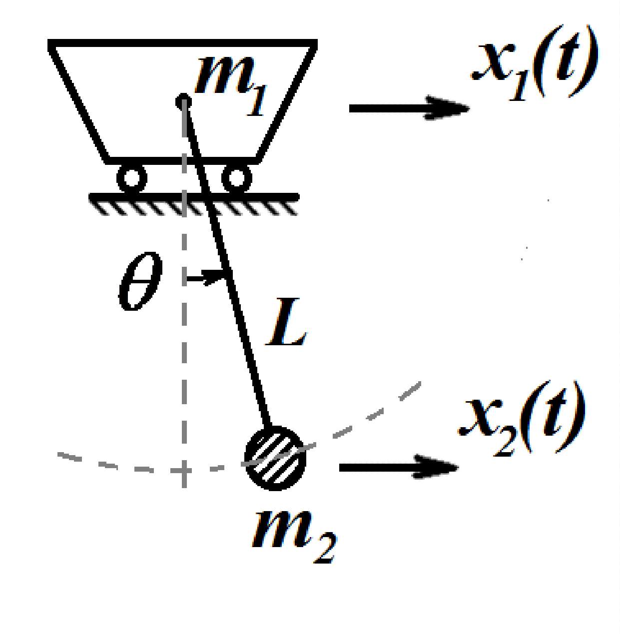
$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{k - m\omega^2}{k}$$

با جایگذاری فرکانس‌های طبیعی بدست آمده از رابطه‌ی (III)، رابطه‌ی بالا نتیجه می‌دهد:

$$\left.\frac{X_2}{X_1}\right|_{\omega_1} = \frac{k - m\omega_1^2}{k} = 1, \qquad \left.\frac{X_2}{X_1}\right|_{\omega_2} = \frac{k - m\omega_2^2}{k} = -1$$

مثال

مطابق شکل روبرو یک پاندول توسط میله‌ای بدون جرم به یک گاری غیرمقید آویزان شده است. فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای مجموعه را بدست آورید.

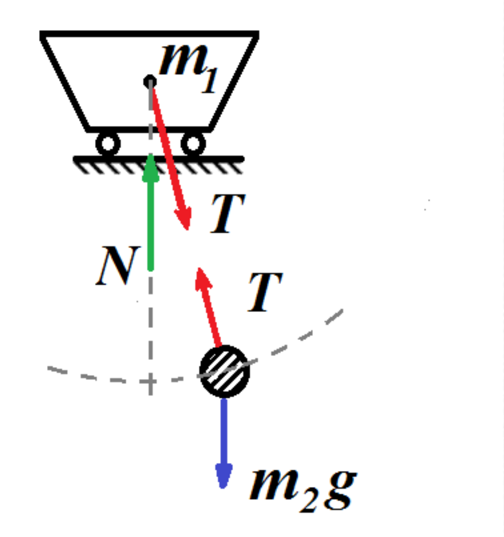


حل: با توجه به دیاگرام آزاد نشان داده شده، معادله های حرکت گاری در راستای افقی و همچنین حرکت وزنه انتهای آونگ در راستای افقی و عمودی را می‌توان مطابق زیر نوشت:

$$m_1 \ddot{x}_1 = T \sin\theta \qquad (I)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = -T \sin\theta \qquad (II)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 = -m_2 g + T \cos\theta \qquad (III)$$



از طرفی با توجه به روابط شتاب نسبی بدست می‌آید:

$$a_2 = \vec{a}_1 + \vec{a}_{2/1}$$

$$= \ddot{x}_1 i + r\ddot{\theta}(\cos\theta\, i + \sin\theta\, j) + r\dot{\theta}^2(-\sin\theta\, i + \cos\theta\, j)$$

در نتیجه

$$a_2 = \ddot{x}_2 i + \ddot{y}_2 j = (\ddot{x}_1 + r\ddot{\theta}\cos\theta - r\dot{\theta}^2 \sin\theta) i + (r\ddot{\theta}\sin\theta + r\dot{\theta}^2\cos\theta) j$$

که با فرض کوچک بودن زاویه θ و صرفنظر از عبارت‌های مرتبه بالا، بدست می‌آید:

$$\ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 + r\ddot{\theta}$$

$$\ddot{y}_2 = 0$$

با جایگذاری روابط بالا در معادلات (I)-(III) خواهیم داشت:

$$m_1 \ddot{x}_1 = T\,\theta$$

$$m_2(\ddot{x}_1 + L\ddot{\theta}) = -T\,\theta$$

$$m_2 g = T$$

که در فرم ماتریسی می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ m_2 & m_2 L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -m_2 g \\ 0 & m_2 g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (IV)$$

با فرض هارمونیک بودن حرکت

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_1 \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

بدست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} -m_1 \omega^2 & -m_2 g \\ -m_2 \omega^2 & -m_2 L \omega^2 + m_2 g \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} X_1 \\ \bar{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (V)$$

که با صفر قرار دادن ماتریس ضرایب نتیجه می‌دهد

$$m_1 m_2 L \omega^4 - m_1 m_2 g \omega^2 - m_2^2 g \omega^2 = 0$$

بنابراین دو فرکانس طبیعی سیستم برابر خواهند بود:

$$\omega_1 = 0, \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)}{m_1}\frac{g}{L}}$$

برای بدست آوردن شکل مودها از رابطه‌ی اول از معادله‌ی (V) استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\bar{\theta}}{X_1} = -\frac{m_1 \omega^2}{m_2 g}$$

که می‌دهد

$$\left.\frac{\bar{\theta}}{X_1}\right|_{\omega=\omega_1} = 0, \qquad \left.\frac{\bar{\theta}}{X_1}\right|_{\omega=\omega_2} = -\frac{(m_1 + m_2)}{m_2 L}$$

در حالت حدی اگر جرم m_1 به سمت بی نهایت میل کند، فرکانس ارتعاشی سیستم برابر $\omega_2 = \sqrt{g / L}$ بدست می‌آید که همان فرکانس طبیعی آونگ یک درجه آزادی با تکیه گاه ثابت است. به عبارتی دیگر می‌توان فرض نمود گاری به دلیل جرم بسیار زیاد آن ثابت باقی می‌ماند و نقش تکیه‌گاه آونگ را خواهد داشت.

ارتعاشات آزاد سیستم‌های چند درجه آزادی با میرایی ویسکوز

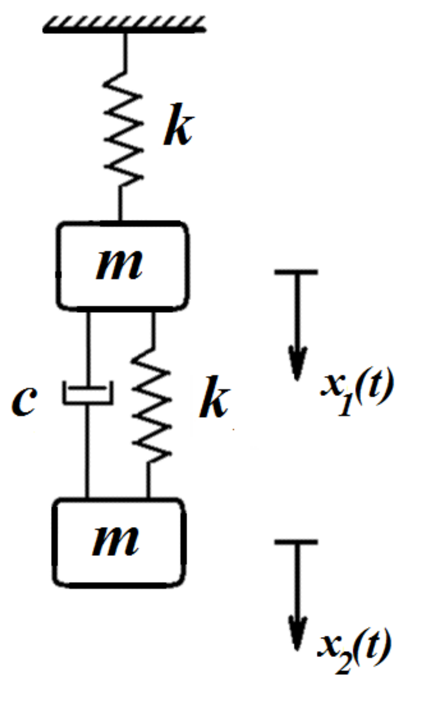
هنگامی که در یک سیستم چند درجه آزادی از میراگرهای ویسکوز استفاده می‌شود، این میراگرها باعث می‌شوند که دامنه‌ی حرکت اجزای سیستم به صورت فوق بحرانی، بحرانی و یا زیر بحرانی به صورت نمایی کاهش یابد. در حالت ارتعاشات زیر بحرانی مانند حالت بدون میرایی، به تعداد درجات آزادی سیستم شکل‌های ارتعاشی مختلف وجود دارند که هر شکل مود ارتعاشی دارای یک فرکانس خاص بوده و نسبت دامنه جابجایی‌ها در شکل مودهای مختلف مقادیر متفاوتی هستند، با این تفاوت که میراکننده های ویسکوز برای کاهش سرعت نسبی اجزای سیستم نسبت به همدیگر، بین حرکات و نوسان‌های آنها اختلاف فاز به وجود می-آورند و اختلاف فاز بین اجزای سیستم می‌تواند بین صفر تا ۱۸۰ درجه باشد. این در حالی است که برای ارتعاش آزاد بدون میرایی، جرم‌ها یا هم جهت حرکت می کنند (اختلاف فاز صفر) و یا در جهت عکس همدیگر نوسان می‌نمایند (اختلاف فاز ۱۸۰ درجه).

برای بدست آوردن فرکانس‌های طبیعی، شکل مودهای ارتعاشی و نرخ کاهش دامنه ارتعاشات در سیستم‌های میرا، همانند حالت بدون میرایی ابتدا معادلات را در فرم ماتریسی می‌نویسیم و سپس بردار جابجایی را به شکل زیر تعریف می‌نماییم:

$$\{x(t)\}=\{X\}e^{st}$$

که در آن قسمت حقیقی s نرخ میرایی و قسمت موهومی آن فرکانس ارتعاش را نشان می‌دهد. سپس با قرار دادن رابطه‌ی بالا در معادله‌ی دیفرانسیل حرکت، معادله مشخصه‌ی سیستم را بدست می‌آوریم. در نهایت با کمک معادله مشخصه‌ی سیستم فرکانس‌های طبیعی و شکل مودهای آن را تعیین می‌کنیم.

مثال



شکل مودهای ارتعاشی، فرکانس‌های طبیعی و نرخ میرایی ارتعاشات را برای سیستم دو درجه آزادی نشان داده شده در شکل مقابل بیابید. برای حل مسأله از مقادیر عددی زیر استفاده کنید:

$$m = ۱ kg,$$

$$c = ۱ N.s/m,$$

$$k = ۱۰۰ N/m.$$

حل: با توجه به شکل و با استفاده از قوانین نیوتون، معادلات حرکت سیستم در فرم ماتریسی به صورت زیر استخراج می‌شوند:

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c & -c \\ -c & c \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

پاسخ ارتعاشی مجموعه را به شکل زیر در نظر می گیریم:

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}e^{st}$$

که با جایگذاری در معادله حرکت می‌دهد:

$$\begin{bmatrix} ms^2+cs+2k & -cs-k \\ -cs-k & ms^2+cs+k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (I)$$

برای آنکه مسأله دارای جواب غیر بدیهی باشد، باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر شود:

$$m^{۲} s^{۴} + ۲mcs^{۳} + ۳mks^{۲} + kcs + k^{۲} = ۰$$

برای مقادیر عددی داده شده، چهار ریشه‌ی معادله بالا عبارتند از

$$s_{۱,۲} = -۰٫۰۵۳ \pm ۶٫۱۸i\,, \qquad s_{۳,۴} = -۰٫۹۴۷ \pm ۱۶٫۱۵i \qquad (II)$$

که با توجه به آنکه قسمت حقیقی مقادیر فوق منفی است، می‌توان گفت ارتعاشات سیستم در هر دو مود ارتعاشی میرا می‌باشد. حال با توجه به معادله‌ی اول از رابطه (I) بدست می‌آید:

$$\frac{X_{۲}}{X_{۱}} = \frac{ms^{۲} + cs + ۲k}{cs + k}$$

اکنون با فرض $X_۱ = ۱$ و با استفاده از مقادیر S از رابطه (II) می‌توان نوشت:

$$a_۱ = \left.\frac{X_۲}{X_۱}\right|_{s=s_۱} = ۱٫۶۲ - ۰٫۰۴۵i = ۱٫۶۲e^{-۰٫۰۲۸i} \qquad a_۲ = \left.\frac{X_۲}{X_۱}\right|_{s=s_۲} = ۱٫۶۲ + ۰٫۰۴۵i = ۱.۶۲e^{+۰٫۰۲۸i}$$

$$a_۳ = \left.\frac{X_۲}{X_۱}\right|_{s=s_۳} = -۰٫۶۲ - ۰٫۰۴۵i = ۰٫۶۲e^{-۳٫۰۶i}, \qquad a_۴ = \left.\frac{X_۲}{X_۱}\right|_{s=s_۴} = -۰٫۶۲ + ۰٫۰۴۵i = ۰.۶۲e^{+۳٫۰۶i}$$

روابط فوق نشان می‌دهند که جابجایی دو جرم نسبت به همدیگر مقداری اختلاف فاز دارند. در نهایت جواب کلی مسأله را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{Bmatrix} x_۱ \\ x_۲ \end{Bmatrix} = e^{-۰٫۰۵۳t}\left(D_۱\begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱٫۶۲e^{-۰٫۰۲۸i} \end{Bmatrix}e^{i\,۶٫۱۸t} + D_۲\begin{Bmatrix} ۱ \\ ۱٫۶۲e^{+۰٫۰۲۸i} \end{Bmatrix}e^{-i\,۶٫۱۸t}\right)$$

$$+e^{-۰٫۹۴۷t}\left(D_۳\begin{Bmatrix} ۱ \\ ۰٫۶۲e^{-۳٫۰۶i} \end{Bmatrix}e^{i\,۱۶٫۱۵t} + D_۴\begin{Bmatrix} ۱ \\ ۰٫۶۲e^{+۳٫۰۶i} \end{Bmatrix}e^{-i\,۱۶٫۱۵t}\right)$$

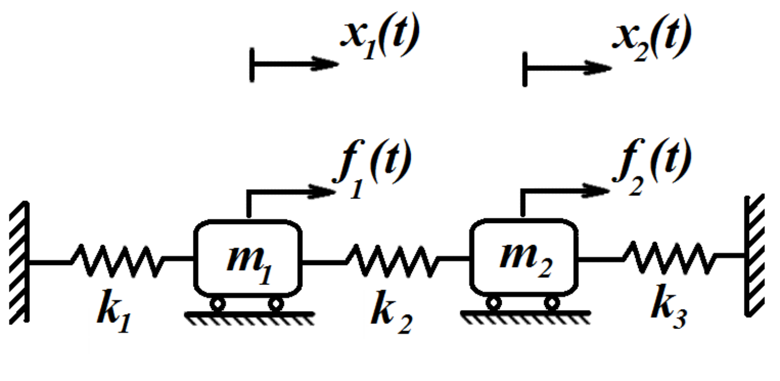
برای آنکه پاسخ نهایی مجموعه یک عدد حقیقی باشد، باید در روابط فوق ضرایب متناظر دو به دو مزدوج باشند. در نتیجه پاسخ‌ها را در فرم توابع مثلثاتی مطابق زیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{Bmatrix} x_{۱} \\ x_{۲} \end{Bmatrix} = e^{-۰,۰۵۲t}\left(C_{۱}\begin{Bmatrix} \sin(۶,۱۸t) \\ ۱,۶۲\sin(۶,۱۸t-۰,۰۲۸) \end{Bmatrix} + C_{۲}\begin{Bmatrix} \cos(۶,۱۸t) \\ ۱,۶۲\cos(۶,۱۸t-۰,۰۲۸) \end{Bmatrix} \right)$$

$$+e^{-۰,۹۴۷t}\left(C_{۳}\begin{Bmatrix} \sin(۱۶,۱۵t) \\ ۰,۶۲\sin(۱۶,۱۵t-۳,۰۶) \end{Bmatrix} + C_{۴}\begin{Bmatrix} \cos(۱۶,۱۵t) \\ ۰,۶۲\cos(۱۶,۱۵t-۳,۰۶) \end{Bmatrix} \right)$$

ملاحظه می‌شود که در مود اول ارتعاش جرم ها تقریباً به صورت هم جهت (هم فاز) حرکت می‌کنند و چون در این حالت میراگر تغییر شکل زیادی ندارد، میرایی زیادی ایجاد نمی‌کند. حال آنکه در مود ارتعاشی دوم جرم ها تقریباً در جهت عکس هم (اختلاف فاز تقریباً ۱۸۰ درجه) حرکت می‌نمایند و تغییر شکل بیشتر میراگر باعث نرخ میرایی بزرگتری شده است.

ارتعاشات هارمونیک سیستم‌های چند درجه آزادی



یک سیستم چند درجه آزادی را در نظر بگیرید که با نیروهای هارمونیک متفاوت تحریک می‌شود. با فرض اینکه روابط حاکم بر سیستم خطی باشند، می-توان تأثیر هر نیرو را جداگانه محاسبه نمود و سپس آنها را با هم جمع کرد. همچنین در حالتی که نیروهای هارمونیک دارای فرکانس تحریک یکسانی باشند، می‌توان تأثیر آنها را به صورت همزمان محاسبه نمود.

شکل قبل یک سیستم دو درجه آزادی را نشان می‌دهد که توسط نیروهای خارجی تحریک می‌شود. با استفاده از قانون دوم نیوتون، معادله‌های حرکت سیستم را می‌توان مطابق زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

اگر نیروهای وارد شده هر دو هارمونیک باشند، اما دارای فرکانس، دامنه و زاویه فاز متفاوتی باشند، معادله‌ی حرکت فوق را می‌توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 e^{i\theta_1} \\ 0 \end{Bmatrix} e^{i\omega_1 t} + \begin{Bmatrix} 0 \\ F_2 e^{i\theta_2} \end{Bmatrix} e^{i\omega_2 t}$$

$$= \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ 0 \end{Bmatrix} e^{i\omega_1 t} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \bar{F}_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega_2 t}$$

در این صورت می‌توان اصل جمع آثار را به کار برد و اثر هر یک از نیروها را جداگانه محاسبه کرد. در حالت خاص اگر فرکانس های تحریک یکسان باشند، بردار نیرو را می‌توان به شکل $\begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$ نوشت.

در بحث‌های آتی ما فرض می‌کنیم تمام نیروهای وارد بر مجموعه دارای فرکانس یکسانی باشند. بدیهی است که هر یک از نیروها می‌تواند دارای دامنه و فاز متفاوتی باشد و یا آنکه دامنه‌ی بعضی از آنها برابر صفر باشد. در این صورت معادله‌ی حرکت کلی برای ارتعاش آزاد یک سیستم چند درجه آزادی را می‌توان به شکل زیر ارائه کرد:

$$[M]\{\ddot{x}\}+[K]\{x\}=\{\bar{F}\}e^{i\omega t}$$

می‌توان حدس زد که جابجایی سیستم به شکل زیر خواهد بود:

$$\{x\}=\{\bar{X}\}e^{i\omega t}$$

که برای شکل قبل می‌توان آن را به صورت زیر بیان کرد:

$$\{x\} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{Bmatrix} e^{i\omega t}$$

با جایگذاری فرم کلی تابع حدس در معادله حرکت، بدست می‌آید:

$$(-[M]\omega^2 + [K])\{\bar{X}\}e^{i\omega t} = \{\bar{F}\}e^{i\omega t}$$

و در نتیجه

$$\{\bar{X}\} = (-[M]\omega^2 + [K])^{-1}\{\bar{F}\}$$

با تعریف ماتریس امپدانس به شکل زیر

$$[Z(\omega)] = ([K] - \omega^2[M])$$

می توان بردار جابجایی را مطابق زیر تعیین کرد:

$$\left\{\bar{X}\right\}=\left[Z(\omega)\right]^{-1}\left\{\bar{F}\right\}=\frac{\operatorname{adj}(\left[Z(\omega)\right])\left\{\bar{F}\right\}}{\left|Z(\omega)\right|}$$

که در آن عبارت adj() ماتریس الحاقی یا همسازه را نشان می‌دهد. معکوس ماتریس امپدانس را ماتریس پاسخ فرکانسی می‌نامند که برای یک سیستم غیر میرا برابر است با:

$$\left[H(\omega)\right]=\left[Z(\omega)\right]^{-1}=(-\left[M\right]\omega^{2}+\left[K\right])^{-1}$$

ماتریس پاسخ فرکانسی و ماتریس امپدانس خصوصیات فیزیکی سیستم را مشخص می کنند.

حال به عنوان مثال فرض کنید که در شکل مورد بحث $\bar{F}_2=0$ و مجموعه تنها با نیروی هارمونیک $f_1(t)=\bar{F}_1 e^{i\omega t}$ تحریک شده باشد. در این صورت برای محاسبه دامنه‌ی جابجایی جرم‌ها می توان نوشت:

$$\begin{Bmatrix}\bar{X}_1\\ \bar{X}_2\end{Bmatrix}=(\left[K\right]-\omega^{2}\left[M\right])^{-1}\begin{Bmatrix}\bar{F}_1\\ 0\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}k_1+k_2-\omega^{2}m_1 & -k_2\\ -k_2 & k_2+k_3-\omega^{2}m_2\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}\bar{F}_1\\ 0\end{Bmatrix}$$

و یا

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_۱ \\ \bar{X}_۲ \end{Bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} k_۲ + k_۳ - \omega^۲ m_۲ & +k_۲ \\ +k_۲ & k_۱ + k_۲ - \omega^۲ m_۱ \end{bmatrix}}{(k_۲ + k_۳ - \omega^۲ m_۲)(k_۱ + k_۲ - \omega^۲ m_۱) - k_۲^۲} \begin{Bmatrix} \bar{F}_۱ \\ ۰ \end{Bmatrix}$$

ریشه‌های مخرج عبارت فوق ($|Z(\omega)| = \left| [K] - \omega^۲ [M] \right| = ۰$) همان فرکانس‌های طبیعی سیستم هستند. در نتیجه رابطه‌ی بالا را می‌توان بر حسب فرکانس‌های طبیعی سیستم مطابق زیر نوشت:

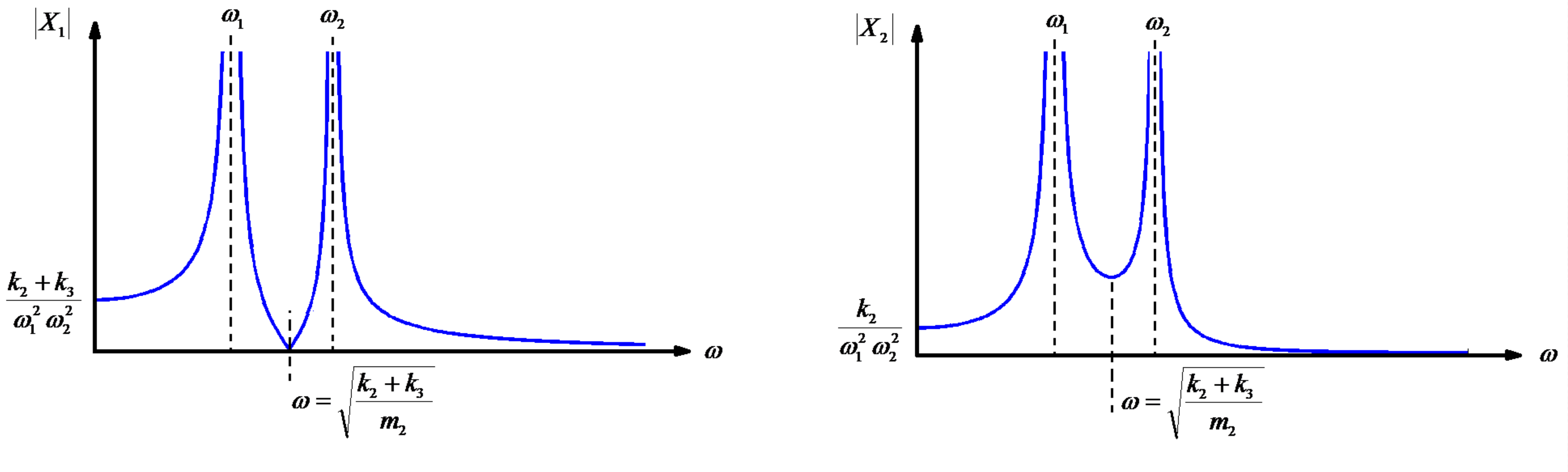
$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_۱ \\ \bar{X}_۲ \end{Bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} k_۲ + k_۳ - \omega^۲ m_۲ & +k_۲ \\ +k_۲ & k_۱ + k_۲ - \omega^۲ m_۱ \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{F}_۱ \\ ۰ \end{Bmatrix}}{(\omega^۲ - \omega_۱^۲)(\omega^۲ - \omega_۲^۲)}$$

که می‌دهد

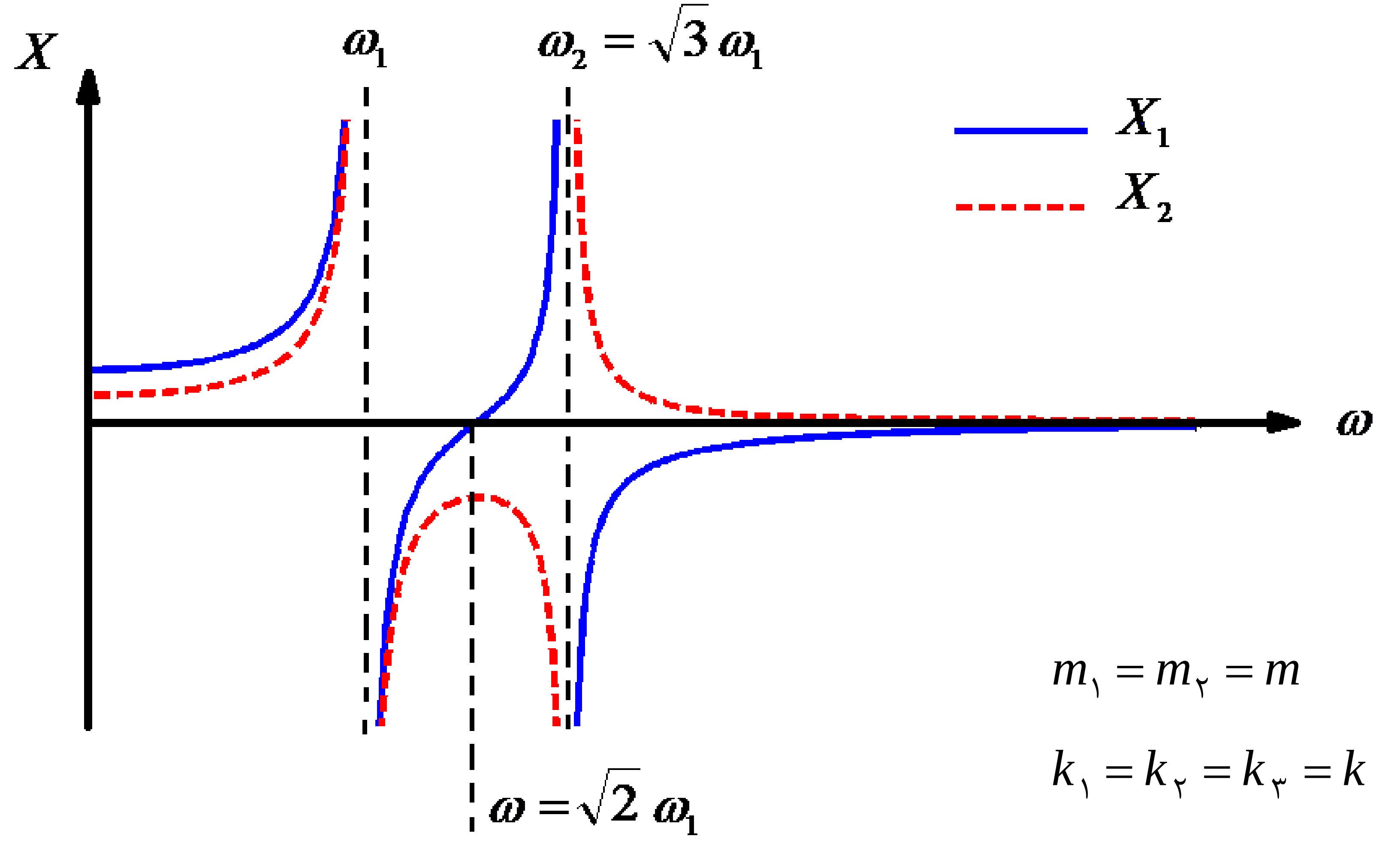
$$\bar{X}_1 = \frac{(k_2 + k_3 - \omega^2 m_2)\bar{F}_1}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}, \qquad \bar{X}_2 = \frac{k_2 \bar{F}_1}{(\omega^2 - \omega_1^2)(\omega^2 - \omega_2^2)}$$

با توجه به این رابطه ملاحظه می‌شود که دامنه‌ی جابجایی هر دو جرم در فرکانس‌های طبیعی اول و دوم به سمت بی‌نهایت میل می‌کنند. به عبارت دیگر در این دو فرکانس سیستم دچار تشدید (رزونانس) می‌شود. همچنین ملاحظه می‌شود که در فرکانس $\omega = \sqrt{(k_2 + k_3)/m_2}$ دامنه‌ی جابجایی جرم اول یعنی همان جرمی که تحریك شده بود، به سمت صفر میل می‌کند که این حالت را آنتی رزونانس می‌نامند. البته در این فرکانس و دیگر فرکانس‌ها دامنه‌ی ارتعاش جرم دوم مخالف صفر است.

با بررسی بیشتر مشخص می شود تا پیش از فرکانس آنتی رزونانس، حرکات هر دو جرم هم‌فاز می‌باشند. به عبارتی دیگر شکل ارتعاش شبیه شکل مود ارتعاشی اول سیستم است. اما پس از این فرکانس ارتعاش دو جرم در فاز مخالف هم قرار می گیرد و ارتعاش شبیه شکل مود دوم سیستم است.

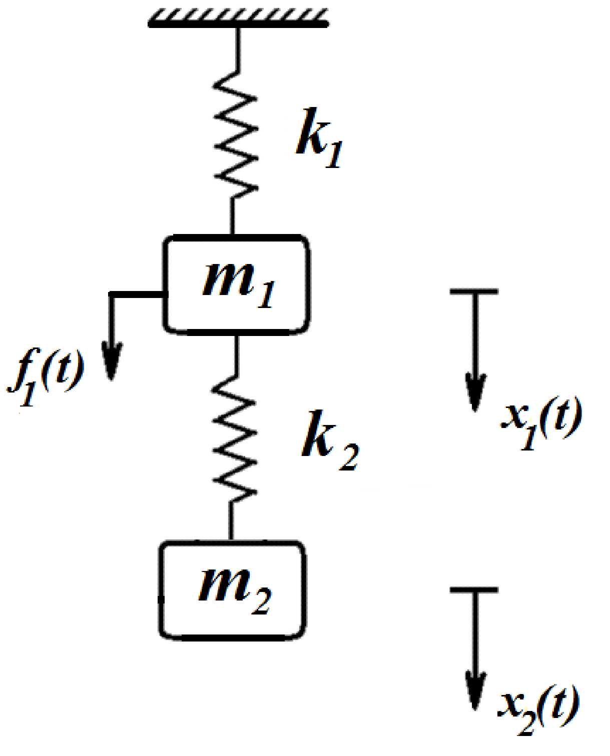


دامنه‌ی جابجایی جرم‌های ۱ و ۲ زمانی که نیروی هارمونیک صرفاً به جسم ۱ وارد شده است و $\bar{F}_1=1$ است



دامنه‌ی جابجایی جرم‌های ۱ و ۲ زمانی که نیروی هارمونیک صرفاً به جسم ۱ وارد شده است و از جرم ها و فنرهای یکسان استفاده شده است.

جاذب ارتعاشی

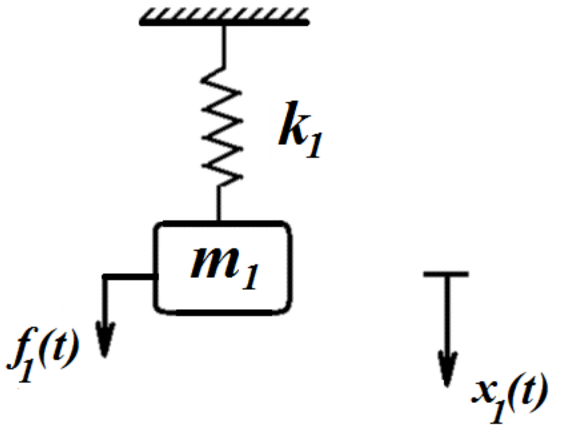


چنانکه دیدیم در سیستم‌های چند درجه آزادی یکی از اجزای سیستم می‌تواند در فرکانس‌های خاصی دچار آنتی رزونانس شود و نیروهای خارجی وارد بر آن توسط نیروهای داخلی خنثی گردند. به عبارتی دیگر ارتعاشات آن توسط اجزای دیگر سیستم جذب شود.

از این خاصیت می‌توان برای طراحی جاذب ارتعاشی استفاده نمود.

جاذب ارتعاشی وسیله‌ای است که به یک سیستم افزوده می‌شود تا ارتعاشات آن سیستم را در محل مورد نظر و در فرکانس‌های مطلوب جذب نماید.

جاذب ارتعاشی



به عنوان مثال یک سیستم یک درجه آزادی مانند شکل مقابل را در نظر بگیرید که توسط نیروی هارمونیک $f_1(t)=F_1 e^{i\omega t}$ تحریک می‌شود. می‌توان جرم و فنر m_2 و k_2 را مطابق شکل قبل به این مجموعه متصل کرد و مقادیر جرم و سختی را به گونه‌ای تنظیم کرد که در فرکانس تحریک داده شده، دامنه جابجایی m_1 برابر صفر شود.

برای این کار ابتدا معادله‌های سیستم جدید را با استفاده از قانون دوم نیوتون می‌نویسیم:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} F_1 \\ 0 \end{Bmatrix}e^{i\omega t}$$

با فرض هارمونیک بودن پاسخ

$$\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{Bmatrix}e^{i\omega t}$$

و پس از اندکی ساده‌سازی، دامنه‌ی جابجایی دو جرم به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{Bmatrix} \bar{X}_1 \\ \bar{X}_2 \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} k_1+k_2-\omega^2 m_1 & -k_2 \\ -k_2 & k_2-\omega^2 m_2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ 0 \end{Bmatrix}=\frac{\begin{bmatrix} k_2-\omega^2 m_2 & +k_2 \\ +k_2 & k_1+k_2-\omega^2 m_1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ 0 \end{Bmatrix}}{(k_2-\omega^2 m_2)(k_1+k_2-\omega^2 m_1)-k_2^2}$$

که می‌توان آن را مطابق زیر نوشت:

$$\bar{X}_۱=\frac{(k_۲-\omega^۲ m_۲)\bar{F}_۱}{(\omega^۲-\omega_۱^۲)(\omega^۲-\omega_۲^۲)},\qquad \bar{X}_۲=\frac{k_۲\bar{F}_۱}{(\omega^۲-\omega_۱^۲)(\omega^۲-\omega_۲^۲)}$$

در رابطه‌ی بالا $\omega_۱$ و $\omega_۲$ فرکانس‌های طبیعی مجموعه (ریشه‌های دترمینان ماتریس امپدانس) هستند.
حال برای آنکه در فرکانس مذکور دامنه‌ی جابجایی جرم اول برابر صفر شود، با توجه به معادله‌های فوق باید داشته باشیم:

$$k_۲-m_۲\omega^۲=۰ \quad\Rightarrow\quad \omega=\sqrt{k_۲/m_۲}$$

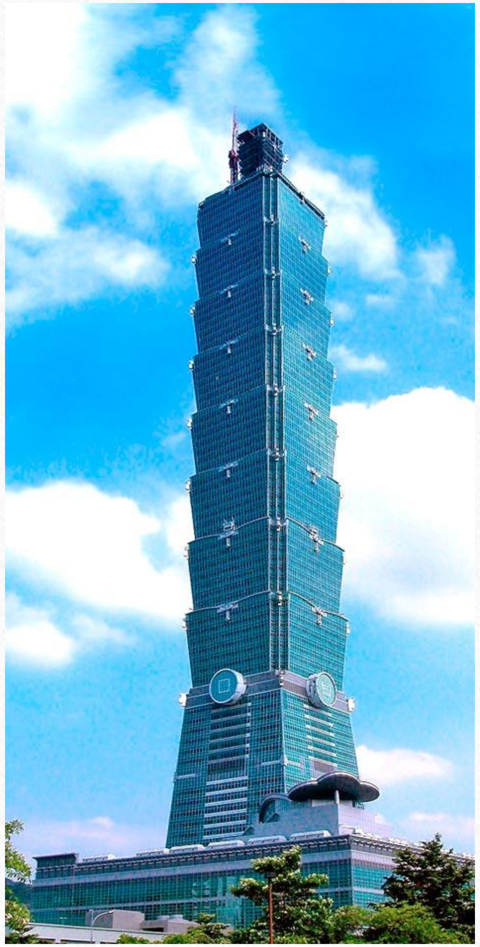
این مانند حالتی است که سیستم جرم و فنر الحاقی از پایه تحریک شود و فرکانس تحریک برابر فرکانس طبیعی سیستم جرم و فنر نشان داده شده در این شکل باشد. طبیعی است که در چنین حالتی این جرم و فنر دچار تشدید می‌شود. اما چون با افزایش دامنه‌ی نوسان جرم و فنر الحاقی، دامنه‌ی نوسان جرم و فنر پایه کاهش یافته و به سمت صفر میل می‌کند، دامنه‌ی ارتعاش جرم الحاقی در یک مقدار محدود باقی می‌ماند و به سمت بی‌نهایت میل نمی‌کند.

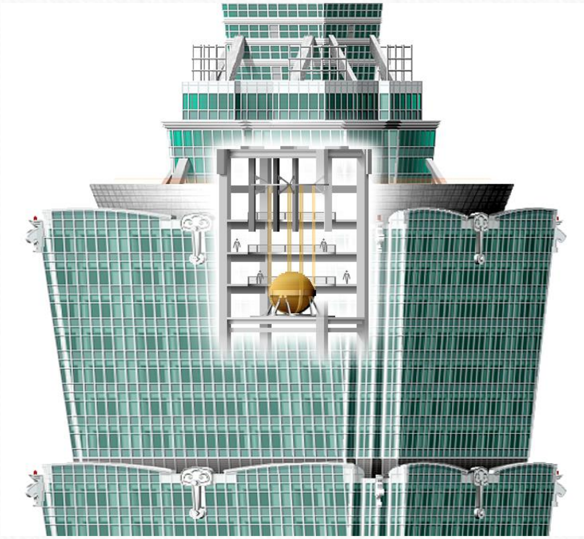
که می‌دهد

$$\bar{X}_1=\frac{(k_2+k_3-\omega^2 m_2)\bar{F}_1}{(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_2^2)},\qquad \bar{X}_2=\frac{k_2\bar{F}_1}{(\omega^2-\omega_1^2)(\omega^2-\omega_2^2)}$$

با توجه به این رابطه ملاحظه می‌شود که دامنه‌ی جابجایی هر دو جرم در فرکانس‌های طبیعی اول و دوم به سمت بی‌نهایت میل می‌کنند. به عبارت دیگر در این دو فرکانس سیستم دچار تشدید (رزونانس) می‌شود. همچنین ملاحظه می‌شود که در فرکانس $\omega=\sqrt{(k_2+k_3)/m_2}$ دامنه‌ی جابجایی جرم اول یعنی همان جرمی که تحریک شده بود، به سمت صفر میل می‌کند که این حالت را آنتی رزونانس می‌نامند. البته در این فرکانس و دیگر فرکانس‌ها دامنه‌ی ارتعاش جرم دوم مخالف صفر است.

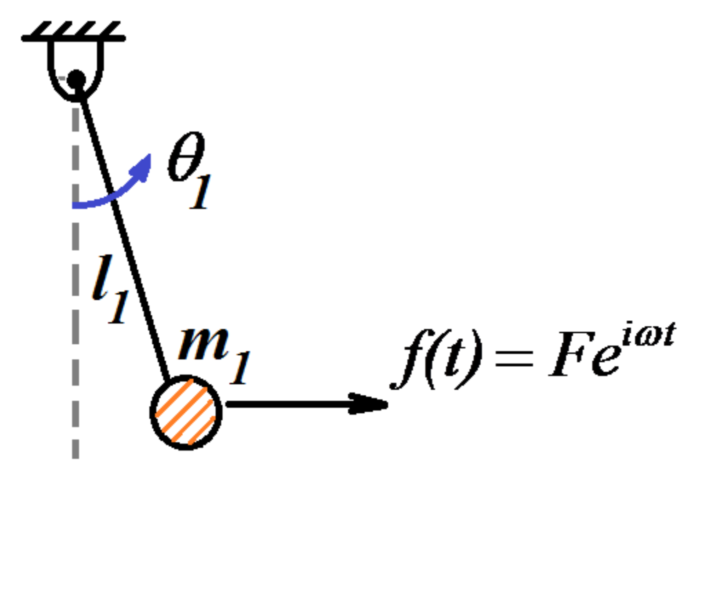
با بررسی بیشتر مشخص می شود تا پیش از فرکانس آنتی رزونانس، حرکات هر دو جرم هم‌فاز می‌باشند. به عبارتی دیگر شکل ارتعاش شبیه شکل مود ارتعاشی اول سیستم است. اما پس از این فرکانس ارتعاش دو جرم در فاز مخالف هم قرار می گیرد و ارتعاش شبیه شکل مود دوم سیستم است.



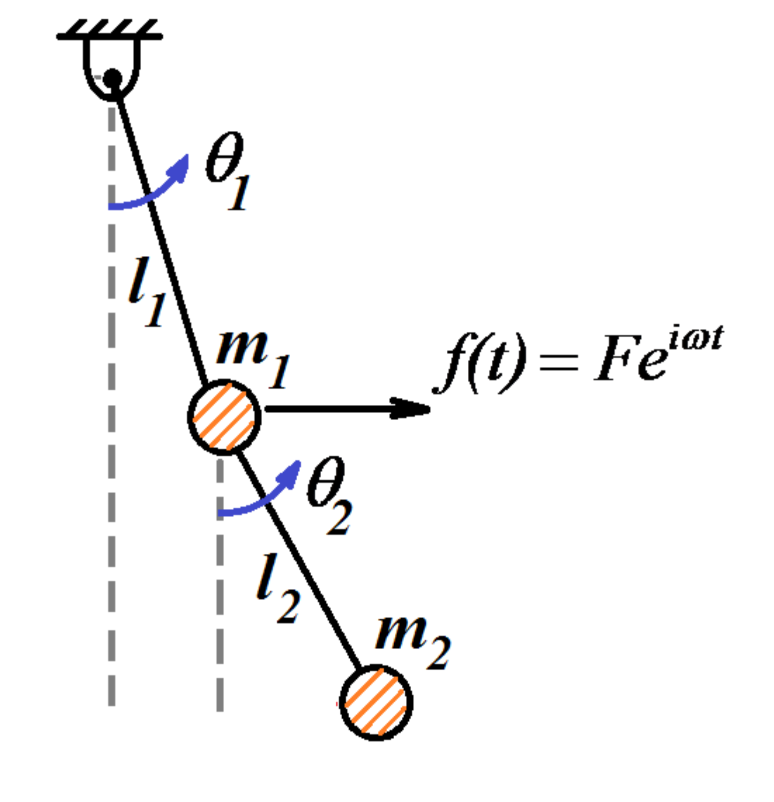


در برج تایپه از یک پاندول عظیم برای جذب ارتعاشات ناشی از
زمین لرزه و بادهای شدید استفاده شده است.

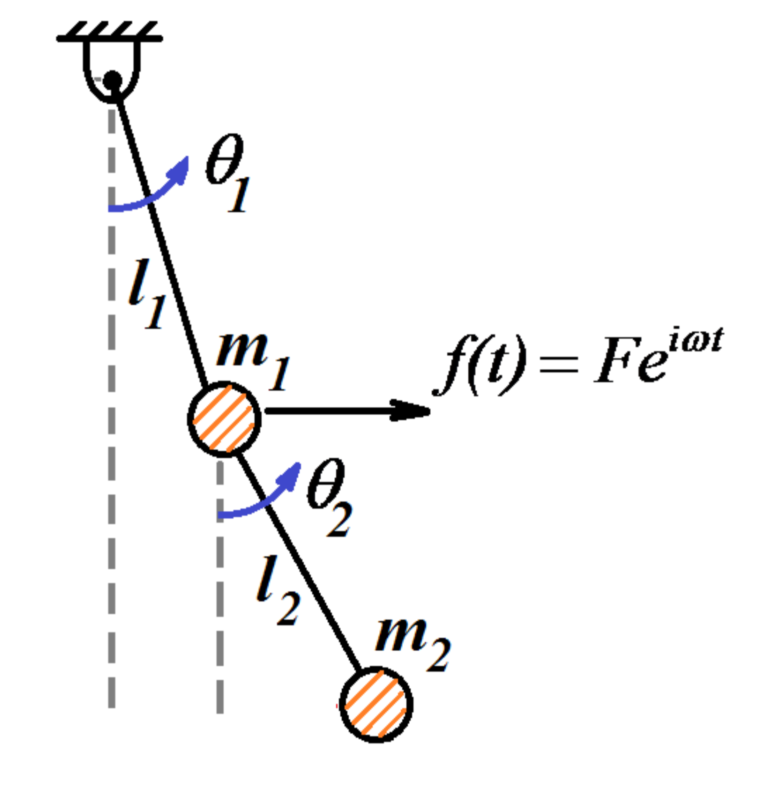
مثال



مطابق شکل یک آونگ یک درجه آزادی توسط یک نیروی هارمونیک تحریک می‌شود. می‌خواهیم با آویختن یک آونگ جدید به این آونگ، ارتعاشات آن را جذب کنیم. جرم و طول آونگ جدید را به گونه‌ای تنظیم کنید که دامنه ارتعاشات آونگ اصلی به سمت صفر میل نماید.



حل: ابتدا فرض می‌کنیم آونگ الحاقی به یک پایه‌ی ثابت وصل شده باشد. در این صورت فرکانس طبیعی آن برابر $\sqrt{g / l_۲}$ خواهد بود. حال اگر پایه متحرک باشد، آونگ الحاقی تحریک می‌شود و شروع به نوسان می کند. اگر فرکانس طبیعی آونگ الحاقی را برابر فرکانس تحریک قرار دهیم ($\omega = \sqrt{g / l_۲}$)، نوسان‌های پایه می‌تواند باعث تشدید این آونگ می‌تواند شود. در نتیجه دامنه‌ی نوسان آونگ الحاقی با گذشت زمان به تدریج افزایش می‌یابد، تا جایی که دامنه‌ی نیروی وارد شده از طرف آونگ الحاقی به پایه، با دامنه‌ی نیروی وارد شده به پایه برابر می گردد.



در این صورت برآیند نیروهای وارد به پایه برابر صفر می‌شود و با حضور اندکی میرایی، ارتعاش آن به سمت صفر می‌رود. بنابراین می‌توان گفت ارتعاشات آونگ اصلی توسط آونگ الحاقی جذب شده است. ملاحظه می‌گردد جرم آونگ الحاقی در فرکانس جذب تأثیری ندارد. اما با افزودن به جرم آونگ الحاقی، دامنه‌ی نوسان آن کاهش می‌یابد. زیرا با افزایش جرم این آونگ، در یک دامنه‌ی نوسان کوچک، نیروی بزرگی به پایه وارد می‌شود و برای ایجاد تعادل نیرویی بر روی پایه (آونگ اصلی) دامنه‌ی نوسان کمتری مورد نیاز است.