طراحی و تحلیل الگوریتم ها

مدرس: سعدون عزیزی

s.azizi@uok.ac.ir

گروه مهندسی کامپیوتر

نیم سال دوم ۹۷-۹۶

فهرست مطالب

- مقدمه
- تحلیل مرتبه الگوریتم‌ها
- تقسیم و حل
- برنامه‌ریزی پویا
- الگوریتم‌های حریصانه
- راهبرد عقبگرد
- راهبرد شاخه و حد
- الگوریتم‌های گراف
- **NP–کامل**

مقدمه

دسته‌بندی مسائل:

- مسائل حل‌نشدنی: مسئله‌هایی که هیچ الگوریتمی برای حل آنها وجود ندارد. مانند مسئله‌ی معروف تورینگ یعنی مسئله‌ی توقف (Halting Problem)
- مسائل حل‌شدنی رام‌شدنی: مسئله‌هایی که برای آنها الگوریتم چندجمله‌ای (Polynomial) وجود دارد. مانند مسئله کوتاهترین مسیر (Shortest Path)
- مسائل حل‌شدنی رام‌نشدنی: مسئله‌هایی که هنوز هیچ الگوریتم چندجمله‌ای برای حل آنها وجود ندارد. مانند مسئله کوله پشتی ۰-۱(0-1 Knapsack)

- در این فصل روی دسته سوم تمرکز می‌کنیم.

مقدمه

- الگوریتم‌های با زمان چندجمله‌ای (polynomial time algorithms) الگوریتم‌هایی هستند که برای یک ورودی با اندازه n، بدترین حالت زمان اجرای آنها $O(n^k)$ است، برای یک ثابت k.

- الگوریتم‌هایی که بدترین حالت پیچیدگی زمانی آنها از مرتبه‌های زیر باشد، الگوریتم‌های با زمان چندجمله‌ای هستند:

$$n \qquad n\log n \qquad n^3 \qquad n^{100}$$

- الگوریتم‌هایی که بدترین حالت پیچیدگی زمانی آنها از مرتبه‌های زیر باشد، الگوریتم‌های با زمان چندجمله‌ای نیستند:

$$2^n \qquad n! \qquad 2^{\log n} \qquad (3/2)^n$$

کلاس‌های P و NP

- کلاس P شامل مسائلی است که در زمان چندجمله‌ای قابل حل هستند
  - مسئله کوتاهترین مسیر، مسئله درخت پوشای کمینه، مسئله کوله پشتی کسری، مسئله پیمایش BFS و DFS گراف، مسئله مرتب سازی و …
- کلاس NP شامل مسائلی است که در زمان چندجمله‌ای قابل تصدیق (verifiable) هستند
  - مسئله دور همیلتونی، مسئله 3SAT، مسئله k-clique، مسئله 3-Coloring و …

مسائل بهینه‌سازی در مقابل مسائل تصمیم‌گیری

- بسیاری از مسائل، از نوع مسائل بهینه‌سازی (optimization problems) هستند که در آنها می‌خواهیم یک جواب شدنی با بهترین مقدار را پیدا کنیم.
- در مقابل، مسائل تصمیم‌گیری (decision problems) مسائلی هستند که جواب آنها یا بله است یا خیر.

- هر مسئله بهینه‌سازی را می‌توان با تحمیل یک کران روی مقدار بهینه، به یک مسئله تصمیم‌گیری متناظر کرد.
- اگر یک مسئله بهینه‌سازی آسان باشد، آنگاه مسئله تصمیم‌گیری متناظر آن هم آسان خواهد بود.
- اگر بتوانیم نشان دهیم که یک مسئله تصمیم‌گیری سخت است، آنگاه نشان داده‌ایم که مسئله‌ی بهینه‌سازی مربوط به آن هم سخت است.

مسائل بهینه‌سازی در مقابل مسائل تصمیم‌گیری

مسئله‌ی کوله‌پشتی ۰–۱

فرض کنید که n فقره جنس داشته باشیم به طوری که ارزش و وزن جنس iام به ترتیب برابر v_i و w_i است. همچنین یک کوله پشتی با ظرفیت b داریم.

- **بهینه‌سازی:** یک بردار مانند $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$، جایی که $x_i \in \{0,1\}$، پیدا کنید به طوری که $\sum_{i=1}^{n} x_i v_i$ بیشینه شود با این محدودیت که $\sum_{i=1}^{n} x_i w_i \leq b$.
- **تصمیم‌گیری:** برای یک k داده شده، آیا جواب شدنی مانند $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ وجود دارد به طوری که $\sum_{i=1}^{n} x_i v_i \geq k$.

مسائل بهینه‌سازی در مقابل مسائل تصمیم‌گیری

مسئله‌ی گروهک (clique problem)

فرض کنید که یک گراف بدون جهت G=(V,E) به ما داده شده است. یک گروهک یک زیرمجموعه از رأس‌های گراف است، مانند $V' \subseteq V$، که در آن بین هر جفت رأس یک یال وجود دارد. (زیر گراف کامل با اندازه V')

- **بهینه‌سازی:** پیدا کردن یک گروهک با اندازه بیشینه
- **تصمیم‌گیری:** برای یک k داده شده، آیا یک گروهک شامل حداقل k رأس وجود دارد یا خیر؟

مسائل بهینه‌سازی در مقابل مسائل تصمیم‌گیری

مسئله‌ی پوشش رأسی (vertex cover problem)

پوشش رأسی یک گراف بدون جهت $G=(V,E)$، یک زیرمجموعه از رأس‌های گراف است، مانند $V' \subseteq V$، به طوری که اگر $(u,v) \in E$ آنگاه $u \in V'$ یا $v \in V'$ (یا هر دو). به عبارت دیگر، یک پوشش رأسی برای گراف G، زیرمجموعه‌ای از رأس‌ها است که تمام یال‌های E را پوشش دهد.

- **بهینه‌سازی:** پیدا کردن یک پوشش رأسی با اندازه کمینه در یک گراف داده شده
- **تصمیم‌گیری:** برای یک k داده شده، آیا یک پوشش رأسی با اندازه k رأس وجود دارد یا خیر؟

مسائل بهینه‌سازی در مقابل مسائل تصمیم‌گیری

مسئله‌ی دور همیلتونی(Hamiltonian cycle problem)

یک دور همیلتونی در یک گراف بدون جهت G=(V,E)، یک دور ساده است که شامل تمام رأس‌های V می‌شود. به گرافی که یک دور همیلتونی داشته باشد یک گراف همیلتونی گفته می‌شود.

- **بهینه‌سازی:** پیدا کردن دور همیلتونی در یک گراف داده شده
- **تصمیم‌گیری:** آیا گراف G دور همیلتونی دارد یا خیر؟

مسائل بهینه‌سازی در مقابل مسائل تصمیم‌گیری

مسئله‌ی فروشنده دوره‌گرد(Traveling Salesman Problem - TSP)

فرض کنید که گراف جهت‌دار و وزن‌دار G=(V,E) به ما داده شده است. یک تور در این گراف عبارت است از مسیری که از یک رأس آغاز و به همان رأس ختم شود به طوری که همه رئوس دیگر را دقیقاً یکبار ملاقات کنیم.

- **بهینه‌سازی:** پیدا کردن یک تور با حداقل وزن در یک گراف داده شده

- **تصمیم‌گیری:** برای یک k داده شده، آیا در گراف G یک تور با حداکثر هزینه‌ی k وجود دارد یا خیر؟

مفهوم کاهش (Reduction)

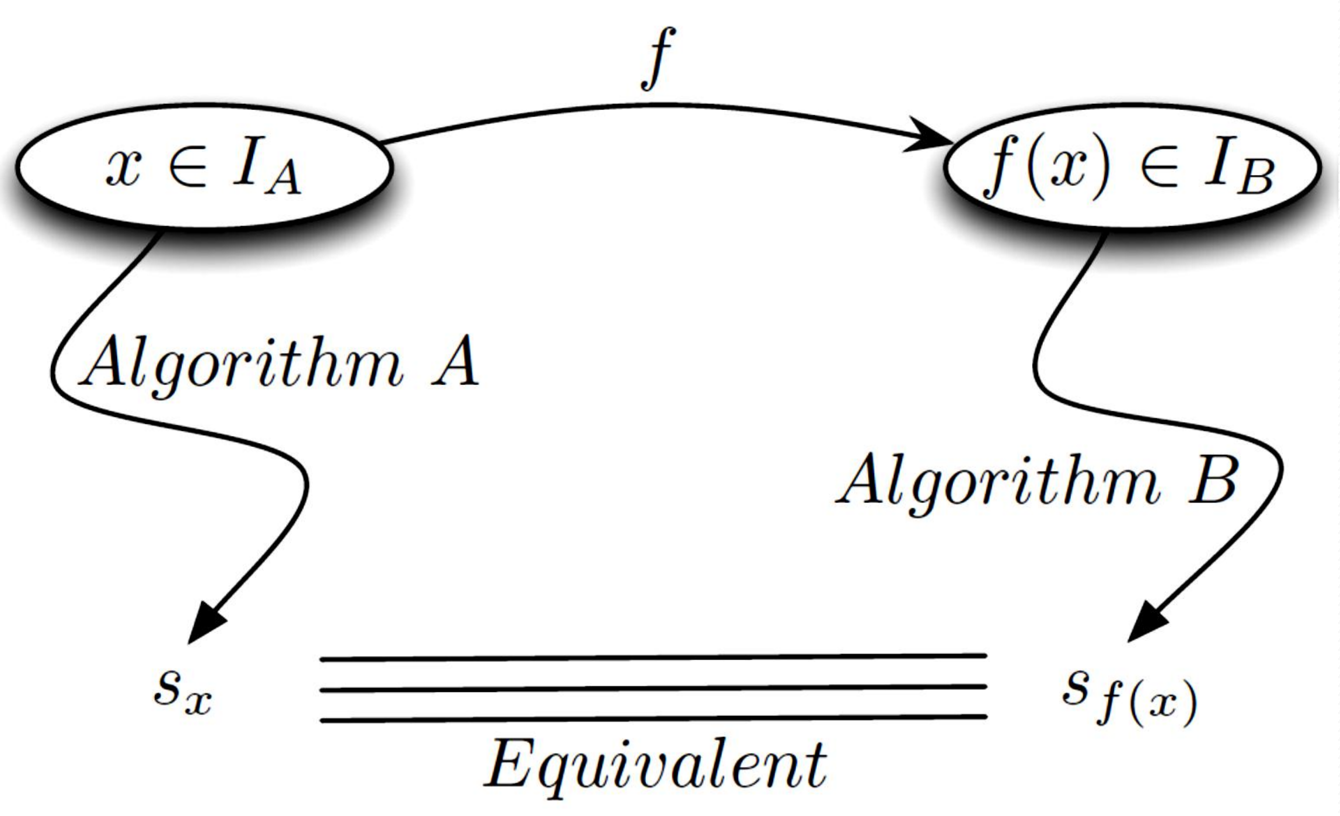
تعریف

فرض کنید که A و B دو مسئله‌ی تصمیم‌گیری باشند. می‌گوییم که A به B قابل کاهش است ($A \preccurlyeq_p B$) اگر یک الگوریتم چندجمله‌ای مانند f وجود داشته باشد به طوری که:

- if x ∈ Instance(A) then f(x) ∈ Instance(B)
- x is a yes-instance of A iff f(x) is a yes-instance of B

- به طور شهودی، مسئله‌ی A را می‌توان به مسئله‌ی B کاهش داد اگر بتوان هر نمونه از A را به سادگی به صورت یک نمونه از B تغییر شکل داد، به طوری که جواب آن یک جواب برای نمونه‌ی متناظر A باشد.
- اگر یک مسئله‌ی مانند A به یک مسئله‌ی مانند B کاهش یابد، در این صورت، می‌توان گفت که A سخت‌تر از B نیست.

مفهوم کاهش (Reduction)



NP–کامل (NP-Complete)

تعریف (NP-Hard)

به یک مسئله مانند L یک مسئله‌ی NP–سخت (NP-Hard) گفته می‌شود اگر همه مسائل NP را بتوان به آن کاهش داد؛ به عبارت دیگر،

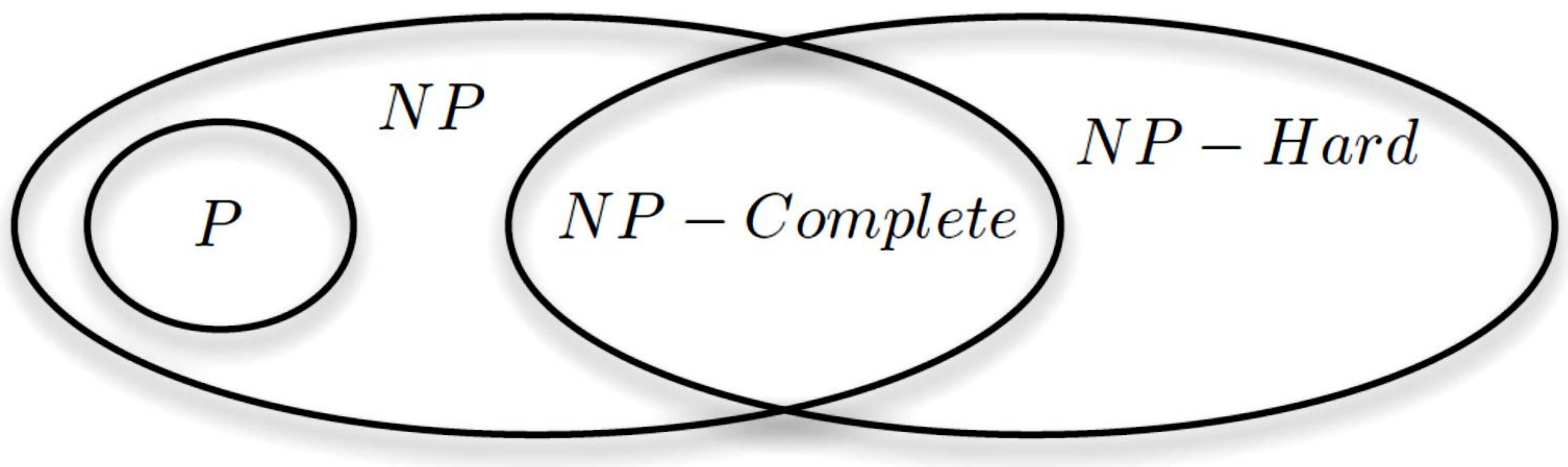
$$L \in \text{NP-Hard} \Leftrightarrow \forall L' \in NP :\; L' \preccurlyeq_P L$$

تعریف (NP-Complete)

به یک مسئله مانند L یک مسئله‌ی NP–کامل (NP-Complete) گفته می‌شود اگر همه مسائل NP را بتوان به آن کاهش داد و $L \in NP$؛ به عبارت دیگر،

$$L \in \text{NP-Complete} \Leftrightarrow L \in NP \;\cap\; \text{NP-Hard}$$

NP–کامل (NP-Complete)



NP–کامل (NP-Complete)

قضیه

اگر برای یک مسئله‌ی NP-کامل یک الگوریتم در زمان چندجمله‌ای وجود داشته باشد آنگاه $P = NP$ خواهد بود.

- اکثر نظریه‌پردازان علوم کامپیوتر معتقد هستند که $P \neq NP$.

NP–کامل (NP-Complete)

- سوال: چگونه ثابت کنیم که یک مسئله NP-کامل است؟
- پاسخ اول: از تعریف استفاده کنیم (خیلی سخت!)
- پاسخ دوم: از خاصیت تعدی زیر استفاده کنیم (نسبتاً آسان)

$$A \preccurlyeq_P B \text{ and } \mathrm{B} \preccurlyeq_P C \implies A \preccurlyeq_P C$$

- اما ما حداقل یک مسئله NP-کامل شناخته شده لازم داریم.

قضیه کوک (Cook Theorem)

مسئله‌ی صدق‌پذیری (Satisfiability problem) یک مسئله‌ی NP-کامل است.

مسئله‌ی SAT

تعریف (مسئله‌ی SAT)

فرض کنید که یک فرمول مانند φ روی n متغیر بولی به صورت زیر به ما داده شده باشد:

$$\varphi = \wedge_{i=1}^{m} C_i, \quad C_i = \vee_{j=1}^{k_i} l_{ij}, \quad l_{ij} \in \{x_{ij}, \bar{x}_{ij}\}, \quad k_i \in N$$

آیا یک انتساب مانند $X=[x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \{0,1\}^n$ وجود دارد به طوری که فرمول φ توسط این انتساب درست ارزیابی شود؟

- مسئله‌ی kSAT: اگر $k_i = k$ برای همه i=1,2,…,m
- **قضیه:** مسئله‌ی 3SAT یک مسئله‌ی NP-کامل است.
- **قضیه:** مسئله‌ی 2SAT را می‌توان در زمان چندجمله‌ای حل کرد.

اثبات NP–کامل بودن

قضیه (اثبات NP–کامل بودن مسئله‌ی SAT)

مسئله‌ی SAT یک مسئله‌ی NP–کامل است.

قضیه (اثبات NP–کامل بودن مسئله‌ی k-Clique)

مسئله‌ی k-Clique یک مسئله‌ی NP–کامل است.

اثبات NP–کامل بودن

تمرین: ثابت کنید که مسئله‌های زیر NP-کامل هستند.

۱- مسئله‌ی دور همیلتونی (Hamiltonian Cycle Problem)

۲- مسئله‌ی تصمیم‌گیری فروشنده دوره‌گرد (Traveling Salesman Problem)

۳- مسئله‌ی تصمیم‌گیری پوشش رأسی (Vertex Cover Problem)