ارتعاشات مکانیکی

ارائه دهنده: دکتر سیروان فرهادی

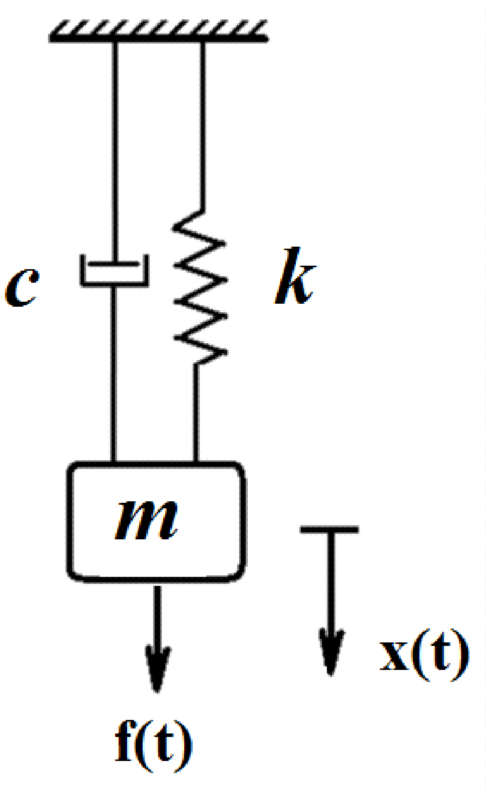
فصل ششم: ارتعاشات سیستم‌های یک درجه آزادی- بارگذاری کلی (گذرا)

ارائه دهنده: دکتر سیروان فرهادی

فهرست مطالب

- روش پاسخ ضربه
  - پاسخ ضربه واحد
  - انتگرال کانولوشن
- تحریک پایه

بارگذاری کلی



در این فصل می‌خواهیم ارتعاشات سیستم‌های یک درجه آزادی را تحت یک بارگذاری کلی که می‌تواند غیرهارمونیک و غیرتناوبی نیز باشد، بررسی نماییم. اگر نیرویی که به سیستم وارد می‌شود، پس از یک دوره زمانی حذف شود، آن نوع نیرو را بار گذرا و ارتعاشات مربوط به آن را ارتعاشات گذرا می‌نامند. برای این منظور یک سیستم جرم، فنر و میرا کننده مانند شکل روبرو را در نظر می‌گیریم که به آن بار گذرای f(t) وارد می‌شود. معادله‌ی حرکت این سیستم را می‌توان مطَابق زیر نوشت:

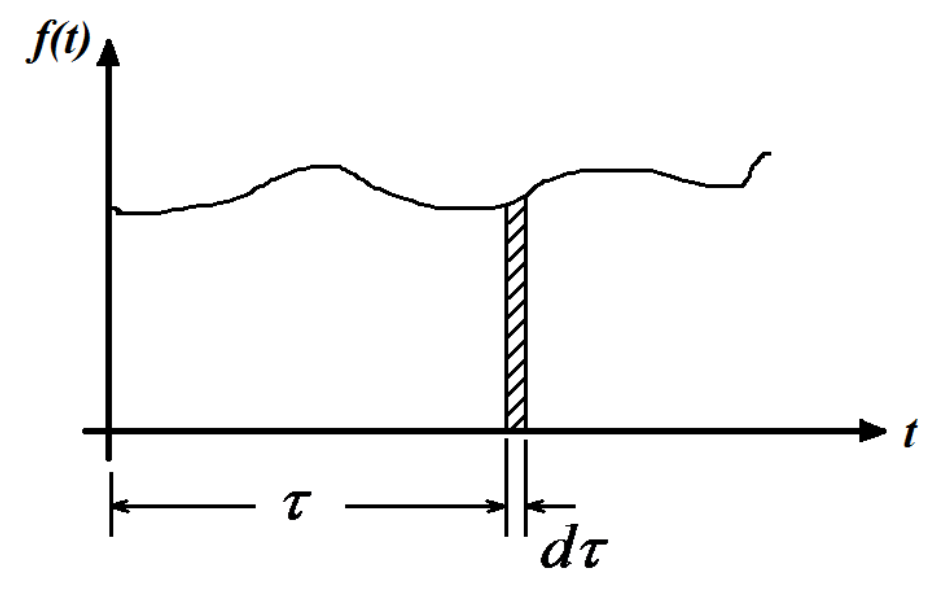
$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx= f(t)$$

چنانکه دیدیم حل همگن معادله دیفرانسیل حرکت به شکل زیر است:

$$x_h(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t\right)$$

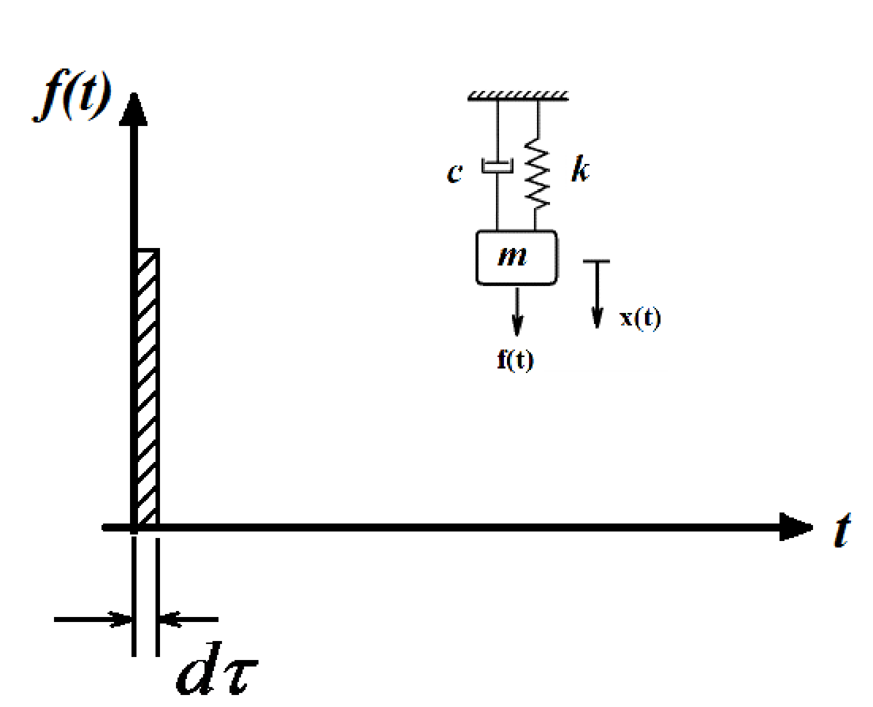
بدست آوردن حل غیرهمگن (خصوصی) معادله که با نام حل گذرا نیز شناخته می‌شود (در پاسخ به نیروی گذرای *f(t)*) کار دشوارتری است. اما می‌توان برای این کار از حل همگن معادله یا حل آزاد معادله ایده گرفت. چنانکه می‌دانیم، اگر سیستم در حالت سکون قرار گرفته باشد و ناگهان ضربه‌ای به آن وارد شود، در پاسخ به ضربه از حالت سکون خارج شده و در ادامه به ارتعاش آزاد می‌پردازد. برای حالت بارگذاری کلی نیز نیروی *f(t)* را به نیروهای مجزا تقسیم کرد که در زمان‌های مختلف به صورت یک نیروی ضربه‌ای تغییراتی را در شرایط ارتعاشی سیستم ایجاد کرده و خود حذف می‌شوند. در این حالت اگر اصل جمع آثار برقرار باشد (معادله حرکت سیستم خطی باشد)، می‌توان پاسخ سیستم را به هر ضربه به صورت جداگانه بدست آورد و سپس آنها را با هم جمع نمود. این روش به روش پاسخ ضربه موسوم است. روش‌های دیگری که در این مورد می‌توان استفاده کرد، روش‌های تبدیل لاپلاس، تبدیل فوریه و روش های حل عددی هستند.

روش پاسخ ضربه



فرض کنید که مطابق شکل زیر نیروی f(t) را به بخش‌های کوچکی تقسیم کنیم که هر بخش به صورت یک نیروی ضربه‌ای در زمان τ و به مدت زمان بسیار کوتاه $d\tau$ به سیستم وارد شود. برای آنکه پاسخ سیستم را به این ضربه منفرد بدست آوریم، فرض می‌کنیم در زمان اعمال این ضربه سیستم در حال سکون بوده است. اعمال این نیرو موجب می‌شود که سرعت سیستم به صورت ناگهانی تغییر نموده و شروع به حرکت و پس از آن ارتعاش آزاد نماید.

پاسخ ضربه‌ی واحد



شکل روبرو یک نیروی بزرگ را نشان می‌دهد که در زمان صفر و به مدت کوتاه $d\tau$ به جرم m وارد شده است. با استفاده از قانون ضربه و اندازه حرکت خطی می‌دانیم که تغییرات اندازه حرکت خطی جرم برابر است با ضربه‌ی نیروهای وارد بر آن:

$$mV_{۲} - mV_{۱} = \mathrm{Imp}_{۱-۲} = \int_{۰}^{d\tau} f\ dt = f\ d\tau$$

پاسخ ضربه واحد

در ابتدا سیستمی را در نظر می‌گیریم که غیرمیرا باشد ($c=0$)، برای بدست آوردن پاسخ این سیستم به یک تحریک هارمونیک، نیروی تحریک را مطابق زیر با یک تابع مثلثاتی معرفی می‌نماییم:

$$f(t) = F\cos(\omega t)$$

در این صورت معادله‌ی حرکت به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$m\ddot{x} + kx = F\cos(\omega t)$$

چون پیش از اعمال ضربه جرم در حالت سکون بوده است، اندازه حرکت خطی اولیه آن برابر صفر است، در نتیجه سرعت جرم پس از اعمال ضربه برابر است با

$$V_{۲} = \dot{x}(\circ^{+}) = \frac{f\ d\tau}{m}$$

پس از اعمال ضربه، چون دیگر نیرویی به سیستم وارد نمی‌شود، مجموعه به صورت آزاد ارتعاش مینماید و جابجایی آن بر حسب زمان از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$x(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(C_{۱}\sin\omega_d t + C_{۲}\cos\omega_d t\right)$$

با اعمال شرایط اولیه‌ی $x(\circ) = \circ$ و $\dot{x}(\circ^{+}) = f\ d\tau / m$ ، ضرایب مجهول رابطه فوق بدست می آیند و پاسخ نهایی به شکل زیر تعیین می شود:

$$x(t) = \frac{f\,d\tau}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n t}\sin(\omega_d t)$$

اگر ضربه‌ی $f\ d\tau$ برابر یک باشد ($f\ d\tau = ۱$)، آن را ضربه‌ی واحد می‌نامند و پاسخ ارتعاشی مربوط به آن را نیز پاسخ ضربه‌ی واحد می‌نامند که آن را با $h(t)$ نشان می‌دهند:

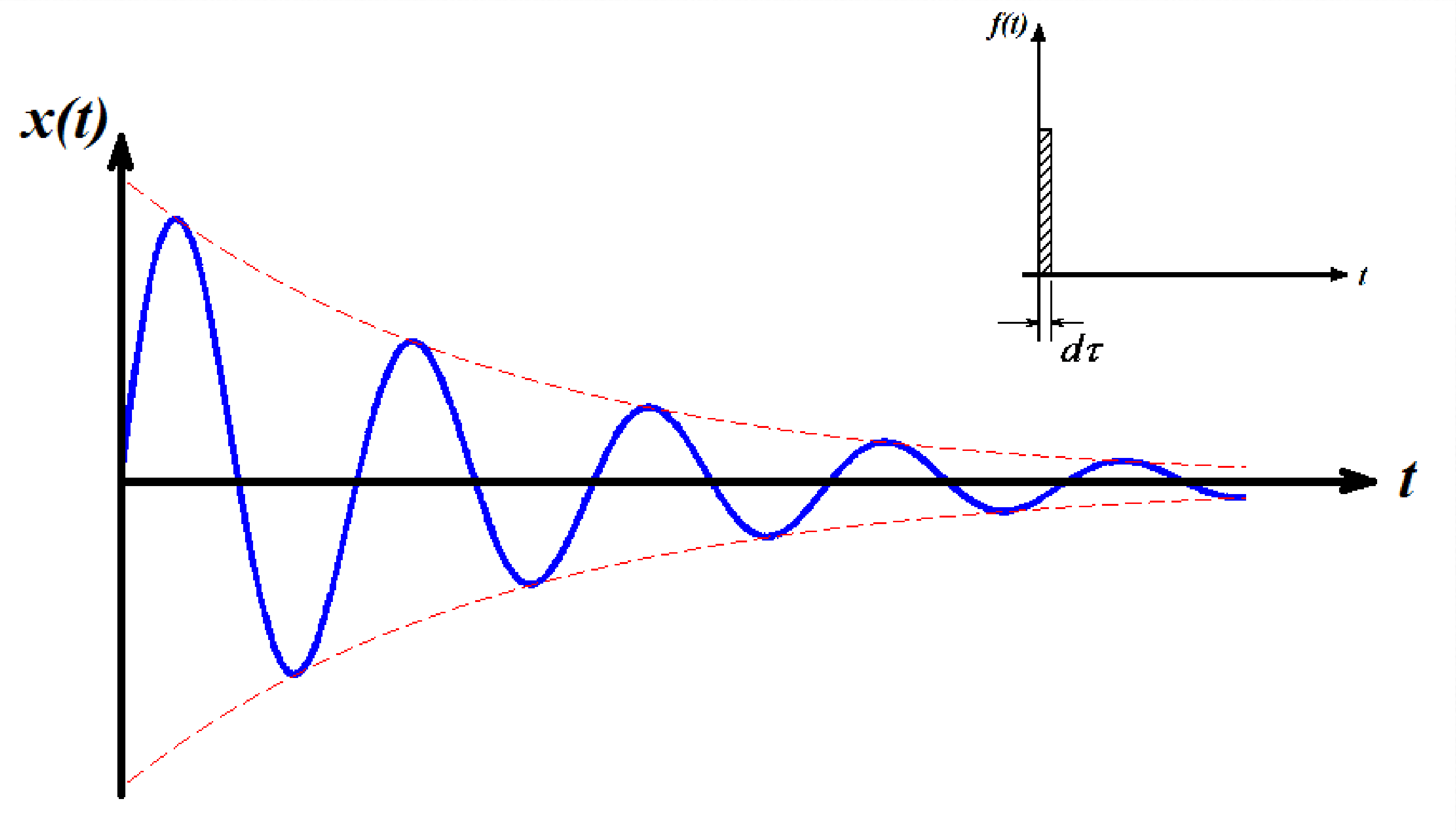
$$h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t)$$

بنابراین اگر یک ضربه در زمان $t = 0$ به سیستم اعمال شود، پاسخ سیستم به این ضربه برابر خواهد بود با

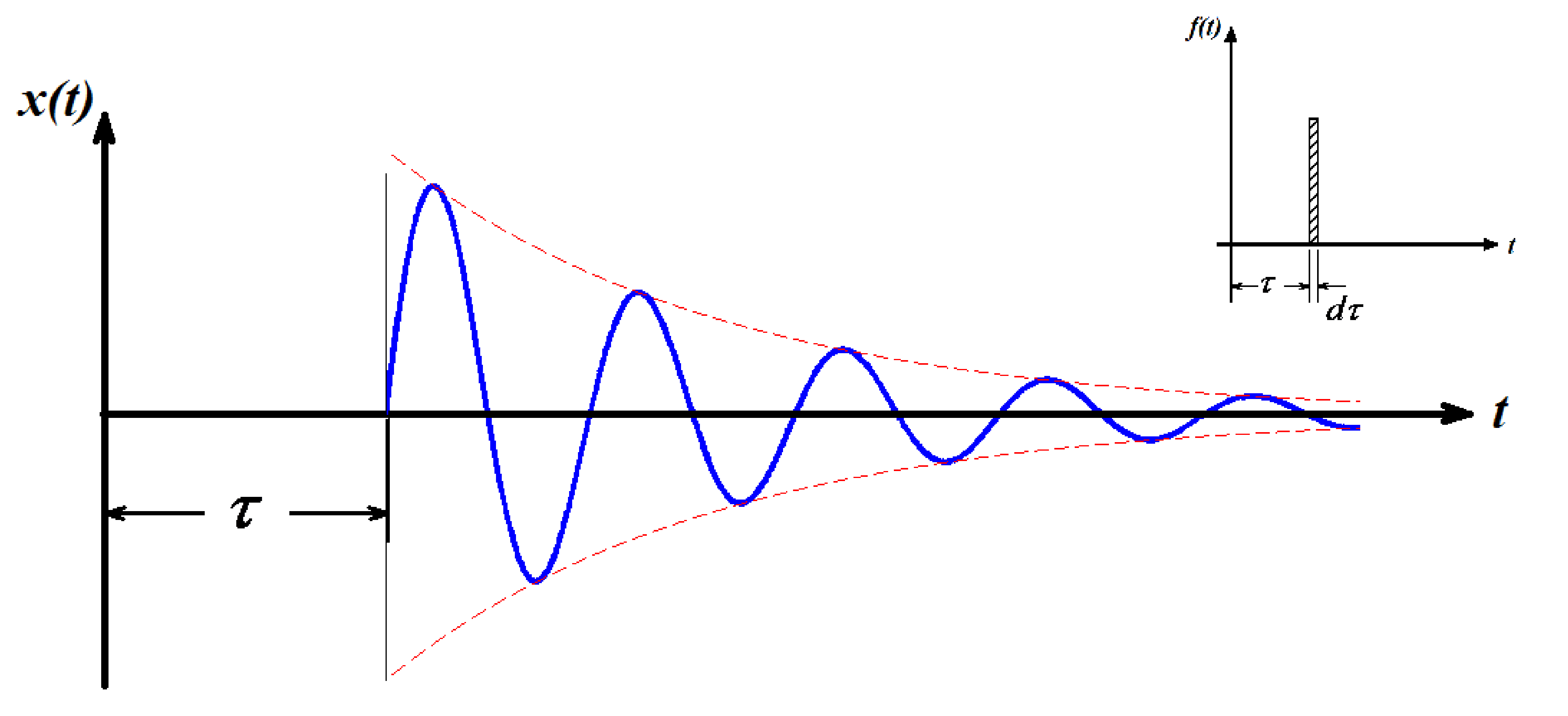
$$x(t) = \frac{f\ d\tau}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_d t) = f\ d\tau\ h(t)$$

بدیهی است که اگر همان ضربه این بار در زمان $t = \tau$ به سیستم اعمال شود، اثر ضربه با یک تأخیر زمانی خود را نشان خواهد داد

$$x(t) = \begin{cases} ۰ & t < \tau \\ \dfrac{f\ d\tau}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n (t-\tau)} \sin\omega_d (t-\tau) = f\ d\tau\ h(t-\tau) & t > \tau \end{cases}$$



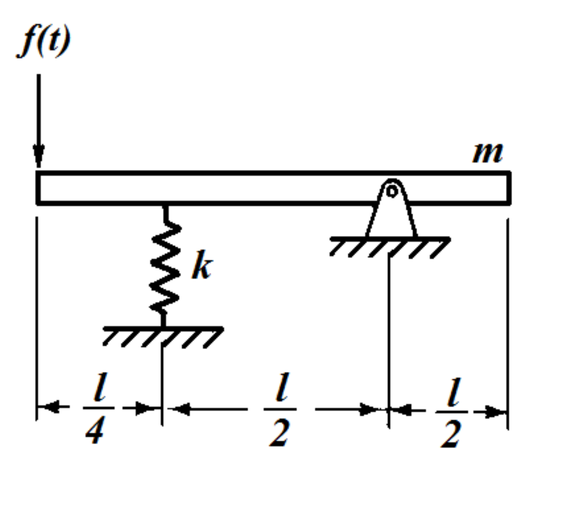
پاسخ سیستم به ضربه‌ی واحد در زمان صفر

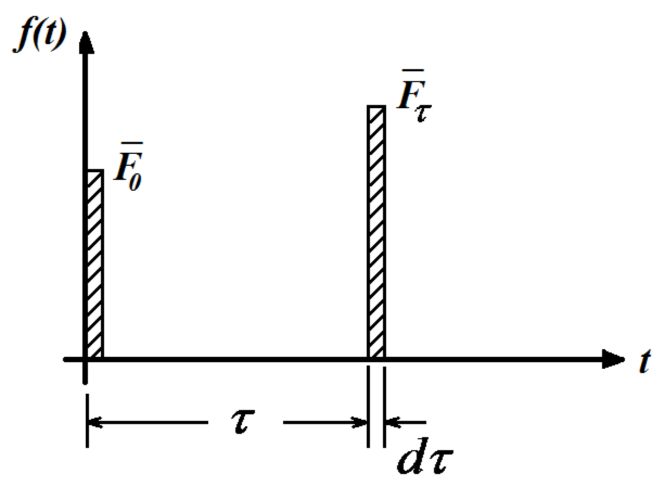


پاسخ سیستم به ضربه‌ی واحد در زمان غیر صفر

مثال

شکل زیر یک سیستم ارتعاشی را نشان می‌دهد که توسط نیروی $f(t)$ تحریک شده است. اگر $f(t)$ از دو نیروی ضربه‌ای تشکیل شده باشد که در زمان‌های $t = 0$ و $t = \tau$ به سیستم اعمال شده‌اند، جابجایی انتهای تیر را بر حسب زمان بدست آورید.





حل: با توجه به شکل نشان داده شده، معادله‌ی حرکت را می‌توان مطابق زیر استخراج کرد:

$$\sum M_O = I_O\ddot{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad f(t)\times\frac{۳l}{۴}\theta - k\left(\frac{l}{۲}\right)^{۲}\theta = I_O\ddot{\theta}$$

از طرفی

$$\theta = \frac{y}{l}, \qquad I_O = \bar{I} + m\left(\frac{l}{۴}\right)^{۲} = \frac{۱}{۱۲}ml^{۲} + \frac{۱}{۱۶}ml^{۲} = \frac{۷}{۴۸}ml^{۲}$$

در نتیجه معادله‌ی حرکت را می‌توان به شکل زیر ساده کرد:

$$m_{eq}\ddot{y} + ky_{eq} = f(t), \qquad m_{eq} = \frac{۷}{۳۶}m, \quad k_{eq} = \frac{k}{۳}$$

با توجه به آنکه معادله‌ی دیفرانسیل سیستم خطی است، اصل جمع آثار برقرار است و می‌توان جابجایی ناشی از هر ضربه را جداگانه محاسبه کرد و سپس آنها را با هم جمع نمود. در این صورت پاسخ کلی سیستم به شکل زیر ارائه می‌شود:

$$y(t)=\begin{cases}\bar{F}_{\circ}h(t) & \circ \le t<\tau \\ \bar{F}_{\circ}h(t)+\bar{F}_{\tau}h(t-\tau) & \tau<t\end{cases}$$

که در آن *h(t)* تابع پاسخ ضربه واحد است و برای استفاده از آن باید فرکانس طبیعی غیرمیرا، فرکانس طبیعی میرا و نسبت میرایی سیستم تعیین شده باشند که برای شکل نشان داده شده از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}=\sqrt{\frac{۱۲k}{۷m}},\qquad \xi=\frac{c_{eq}}{۲\sqrt{k_{eq}m_{eq}}}=\circ,\qquad \omega_d=\sqrt{۱-\xi^{۲}}\,\omega_n=\omega_n$$

انتگرال کانولوشن

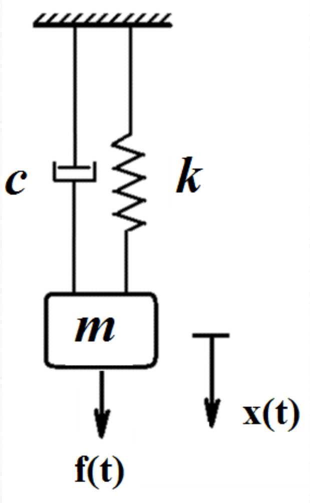
حال که پاسخ سیستم را به یک نیروی ضربه‌ای بدست آوردیم، می‌توانیم با استفاده از اصل جمع‌آثار جابجایی کلی سیستم را تحت ضربه‌های متوالی بدست آوریم. با استفاده از اصل جمع‌آثار می‌توان گفت جابجایی سیستم در زمان t برابر است با جابجایی سیستم ناشی از تمام نیروهای ضربه‌ای که قبل از زمان t به سیستم اعمال شده‌اند، به عبارت دیگر

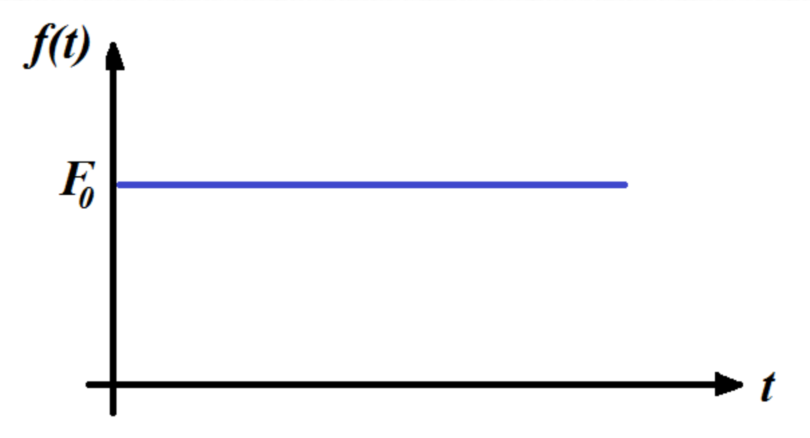
$$x(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)\,d\tau$$

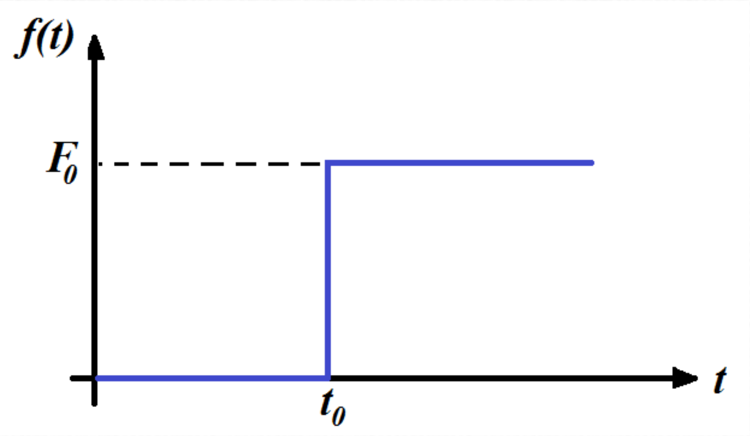
که در آن $f(\tau)d\tau$ ضربه‌ای است که در زمان $t=\tau$ به سیستم اعمال شده است و $h(t-\tau)$ پاسخ سیستم به یک ضربه واحد است که در زمان $t=\tau$ به سیستم وارد شده باشد. انتگرال ارائه شده در رابطه‌ی بالا را انتگرال کانولوشن می‌نامند که با استفاده از جمع‌آثار، پاسخ سیستم را به نیروی $f(t)$ محاسبه می کند.

مثال

مطابق شکل، یک نیروی پله به سیستم یک درجه آزادی نشان داده شده وارد می‌شود. با استفاده از روش پاسخ ضربه پاسخ زمانی آن را بیابید. پاسخ زمانی همان سیستم به یک تابع پله با تأخیر زمانی چگونه محاسبه می‌شود؟







حل: با توجه به شکل نشان داده شده برای یک نیروی پله که در زمان صفر به سیستم اعمال می‌گردد، تابع تحریک برابر است با

$$f(t) = F_{\circ} \qquad t \geq \circ$$

بنابراین با استفاده از رابطه پاسخ ضربه واحد و رابطه انتگرال کانولوشن بدست می‌آید:

$$y(t) = \int_{\circ}^{t} f(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$$

$$= \int_{\circ}^{t} F_{\circ} \times \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n (t-\tau)} \sin\omega_d (t-\tau)\, d\tau$$

انتگرال بالا را می‌توان با استفاده از روش جزء به جزء و در دو مرحله‌ی متوالی ساده کرد که در نهایت، نتیجه زیر حاصل می‌شود:

$$y(t)=\frac{F_{\circ}}{m\omega_d}\left[e^{-\xi\omega_n(t-\tau)}\left(\frac{\xi\omega_n \sin\omega_d(t-\tau)+\omega_d \cos\omega_d(t-\tau)}{(\xi\omega_n)^{۲}+(\omega_d)^{۲}}\right)\right]_{\circ}^{\tau}$$

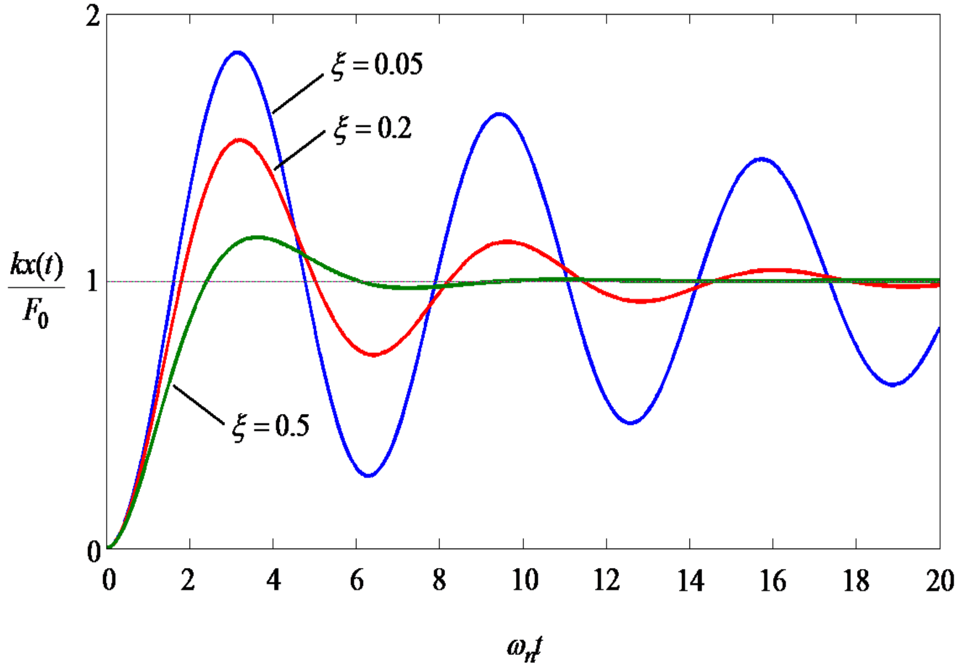
$$=\frac{F_{\circ}}{k}\left(۱-\frac{۱}{\sqrt{۱-\xi^{۲}}}e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t-\varphi)\right) \qquad (I)$$

که در آن

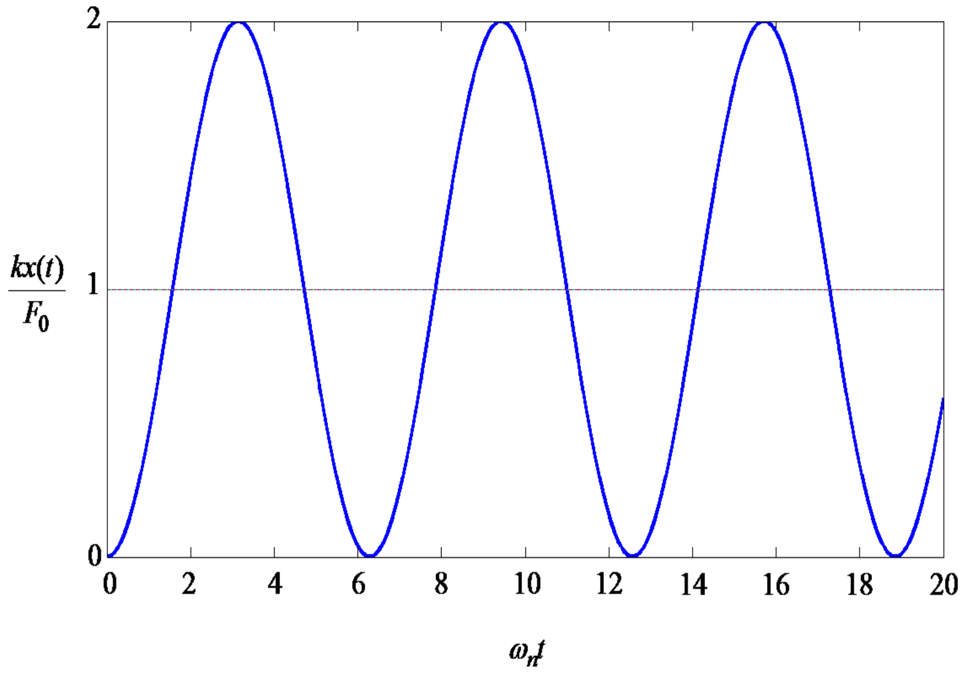
$$\varphi=\tan^{-۱}\frac{\xi}{\sqrt{۱-\xi^{۲}}} \qquad (II)$$

در حالت خاص اگر نسبت میرایی سیستم برابر صفر باشد، پاسخ زمانی سیستم به شکل زیر ساده می‌گردد:

$$y(t)=\frac{F_{\circ}}{k}\left(۱-\cos\omega_n t\right) \qquad (III)$$



(ب)

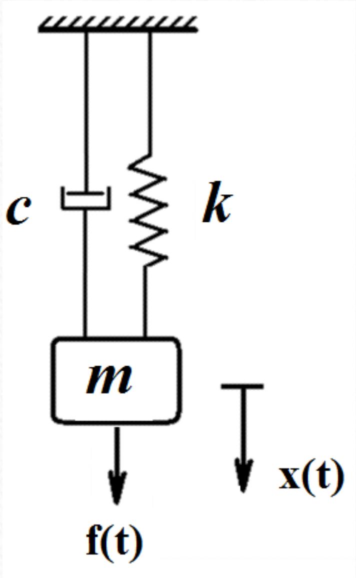


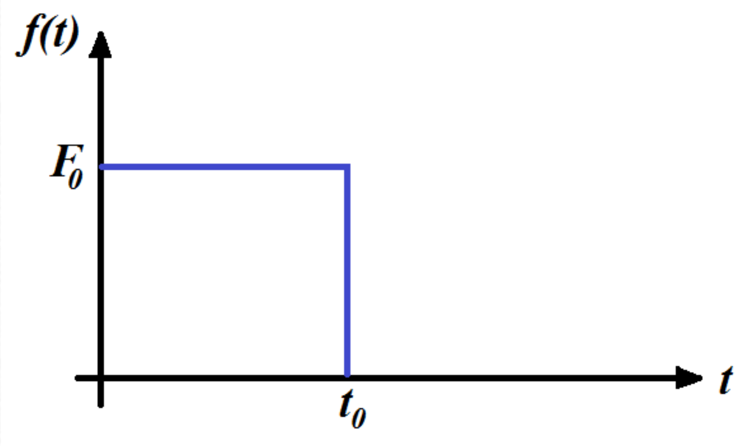
(الف)

پاسخ زمانی سیستم به تابع پله: الف) بدون میرایی و ب) با میرایی

مثال

پاسخ سیستم نشان داده شده در شکل را به نیروی پالس مستطیلی را بدست آورید.

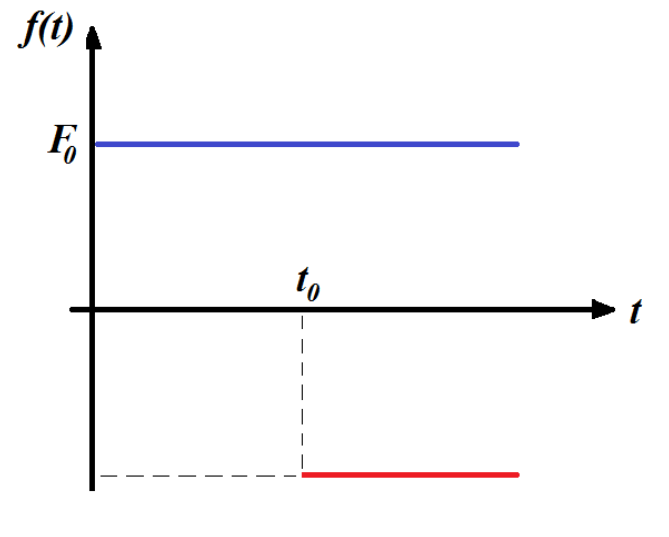




حل: برای تابع پالس مستطیلی، تابع تحریک را می‌توان به صورت حاصل‌جمعی از دو تابع پله نوشت که یکی از آنها با تأخیر زمانی t_0 و با مقدار معکوس دیگری به سیستم وارد می‌شود

$$f(t)=\begin{cases} F_\circ \delta(t), & t \le t_\circ \\ F_\circ \delta(t)+(-F_\circ)\delta(t-t_\circ), & t_\circ < t \end{cases} \qquad (I)$$

که در آن $\delta(t)$ تابع پله‌ی واحد است. در نتیجه پاسخ زمانی سیستم برای زمان‌هایی که $t \le t_0$ باشد، عیناً مانند مثال قبل است.



برای زمان‌هایی که $t > t_0$ باشد، جابجایی سیستم را می‌توان به کمک پاسخ بدست آمده برای مثال قبل، به شکل زیر استخراج نمود:

$$y(t) = \frac{F_۰}{k}\frac{۱}{\sqrt{۱-\xi^۲}}\left(-e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t - \varphi) + e^{-\xi\omega_n (t-t_۰)}\cos(\omega_d (t - t_۰) - \varphi)\right) \qquad (II)$$

که در آن

$$\varphi = \tan^{-۱}\frac{\xi}{\sqrt{۱-\xi^۲}} \qquad (III)$$

در حالت خاص اگر سیستم غیرمیرا باشد، خواهیم داشت:

$$y(t) = \frac{F_۰}{k}\left(-\cos\omega_n t + \cos\omega_n (t - t_۰)\right), \qquad t_۰ < t \qquad (IV)$$

برای زمان‌هایی که $t > t_0$ باشد، جابجایی سیستم را می‌توان به کمک پاسخ بدست آمده برای مثال قبل، به شکل زیر استخراج نمود:

$$y(t) = \frac{F_{\circ}}{k}\frac{1}{\sqrt{1-\xi^{2}}}\left(-e^{-\xi\omega_n t}\cos(\omega_d t-\varphi)+e^{-\xi\omega_n (t-t_{\circ})}\cos(\omega_d (t-t_{\circ})-\varphi)\right) \qquad (II)$$

که در آن

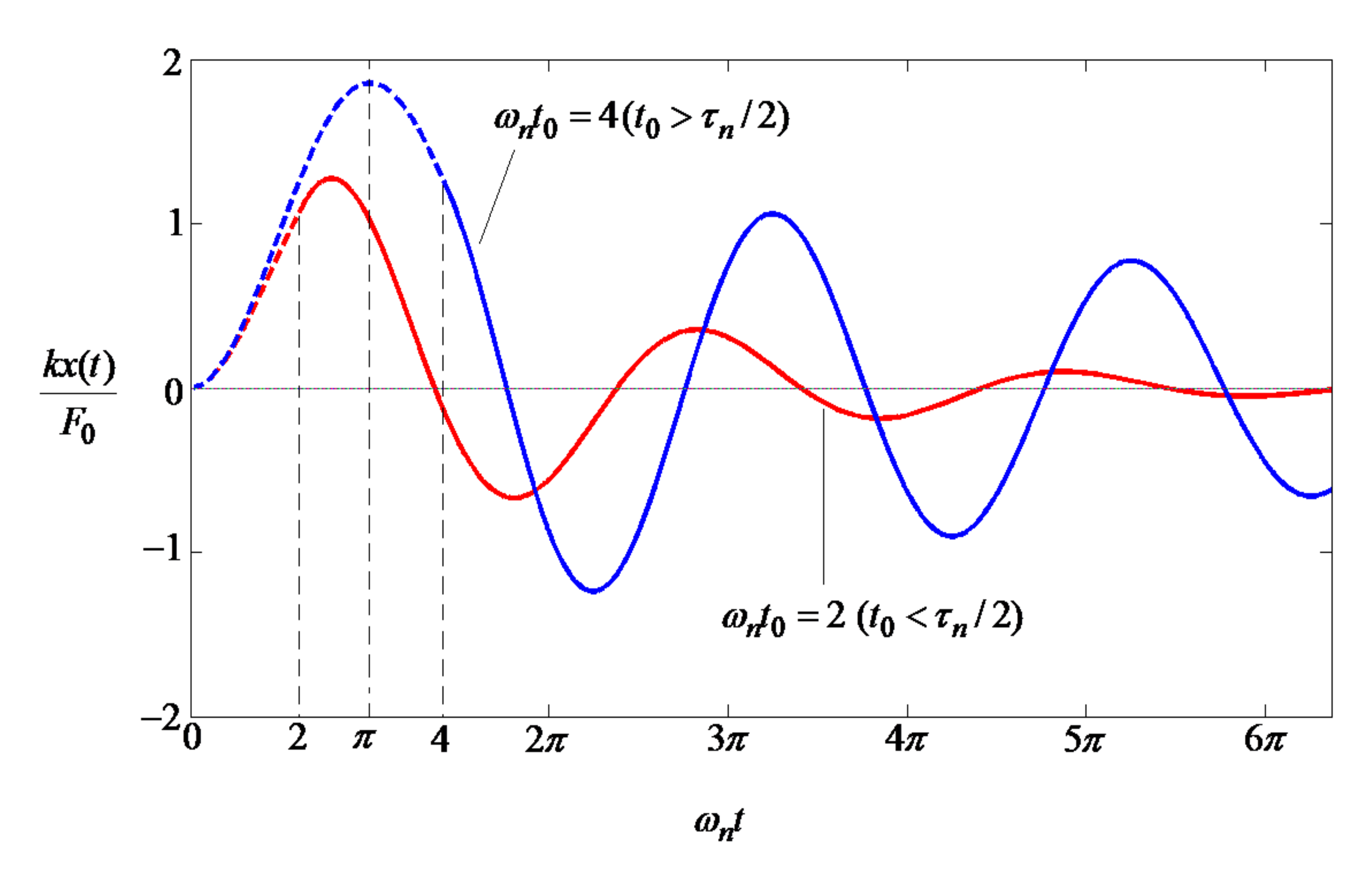
$$\varphi = \tan^{-1}\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^{2}}} \qquad (III)$$

در حالت خاص اگر سیستم غیرمیرا باشد، خواهیم داشت:

$$y(t) = \frac{F_{\circ}}{k}\left(-\cos\omega_n t+\cos\omega_n (t-t_{\circ})\right), \qquad t_{\circ} < t \qquad (IV)$$

شکل بعد پاسخ زمانی سیستم را به یک پالس مستطیلی نشان می‌دهد. در حالت اول ($t_{\circ} < \tau_n / ۲$)، طول زمان پالس کمتر از نصف دوره‌ی تناوب طبیعی سیستم بوده است ($t_{\circ} > \tau_n / ۲$).

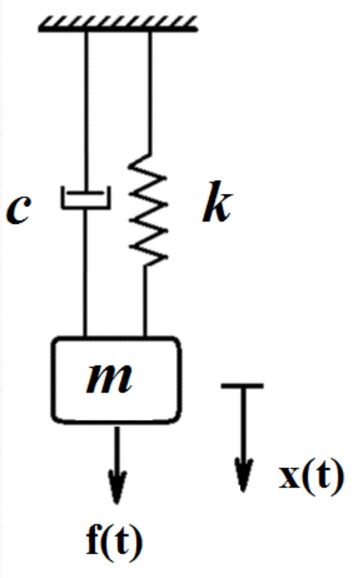
در این شکل پاسخ زمانی سیستم تا انتهای زمان پالس به صورت خط‌چین نشان داده شده است. ملاحظه می‌گردد حداکثر جابجایی سیستم برای حالت اول در زمانی بعد از اعمال پالس رخ داده است. این بدان معنی است که پالس اعمال شده سیستم را به حرکت در آورده است، اما پیش از آنکه سیستم به حداکثر جابجایی خود برسد، نیروی اعمالی قطع شده است و سیستم در ادامه با سرعت اولیه‌ی مثبت شروع به ارتعاش آزاد نموده است. اما در حالت دوم، چون طول دوره‌ی اعمال نیرو به اندازه‌ی کافی بزرگ بوده است، پیش از انتهای زمان اعمال نیرو، سیستم به حداکثر جابجایی خود رسیده است و در ادامه با قطع شدن نیرو، سیستم با سرعت اولیه‌ی منفی شروع به ارتعاش آزاد نموده است. با توجه به این توضیحات به نظر می‌رسد نسبت زمان اعمال نیرو به دوره‌ی تناوب طبیعی سیستم، یکی از عوامل تأثیرگذار در حداکثر مقدار جابجایی سیستم باشد. این موضوع را در ادامه‌ی این فصل و در بخش طیف پاسخ با جزئیات بیشتری بررسی خواهیم کرد.

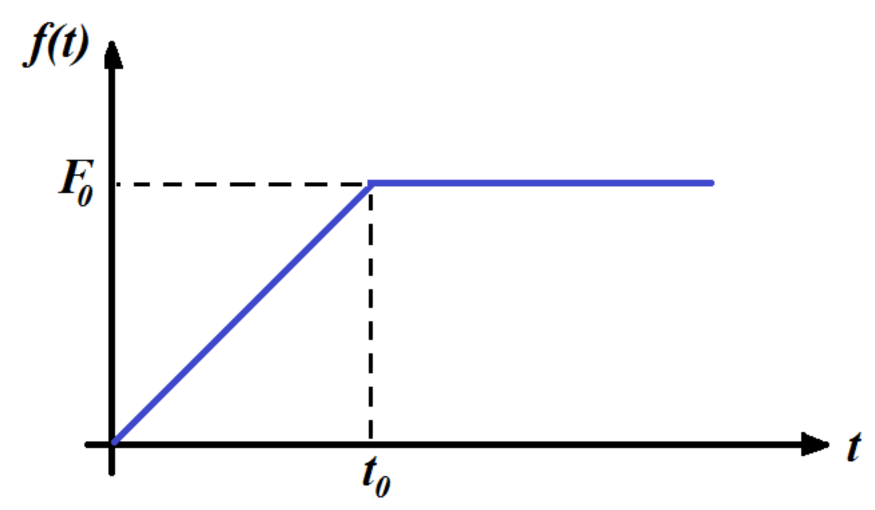


پاسخ زمانی سیستم به تابع پالس مستطیلی

مثال

یک نیرو مطابق شکل به سیستم یک درجه آزادی وارد می‌شود. چنانکه دیده می‌شود نیرو به صورت خطی افزایش می‌یابد تا اینکه به یک مقدار ثابت برسد. با استفاده از روش پاسخ ضربه، پاسخ زمانی سیستم به این نیرو را بیابید.





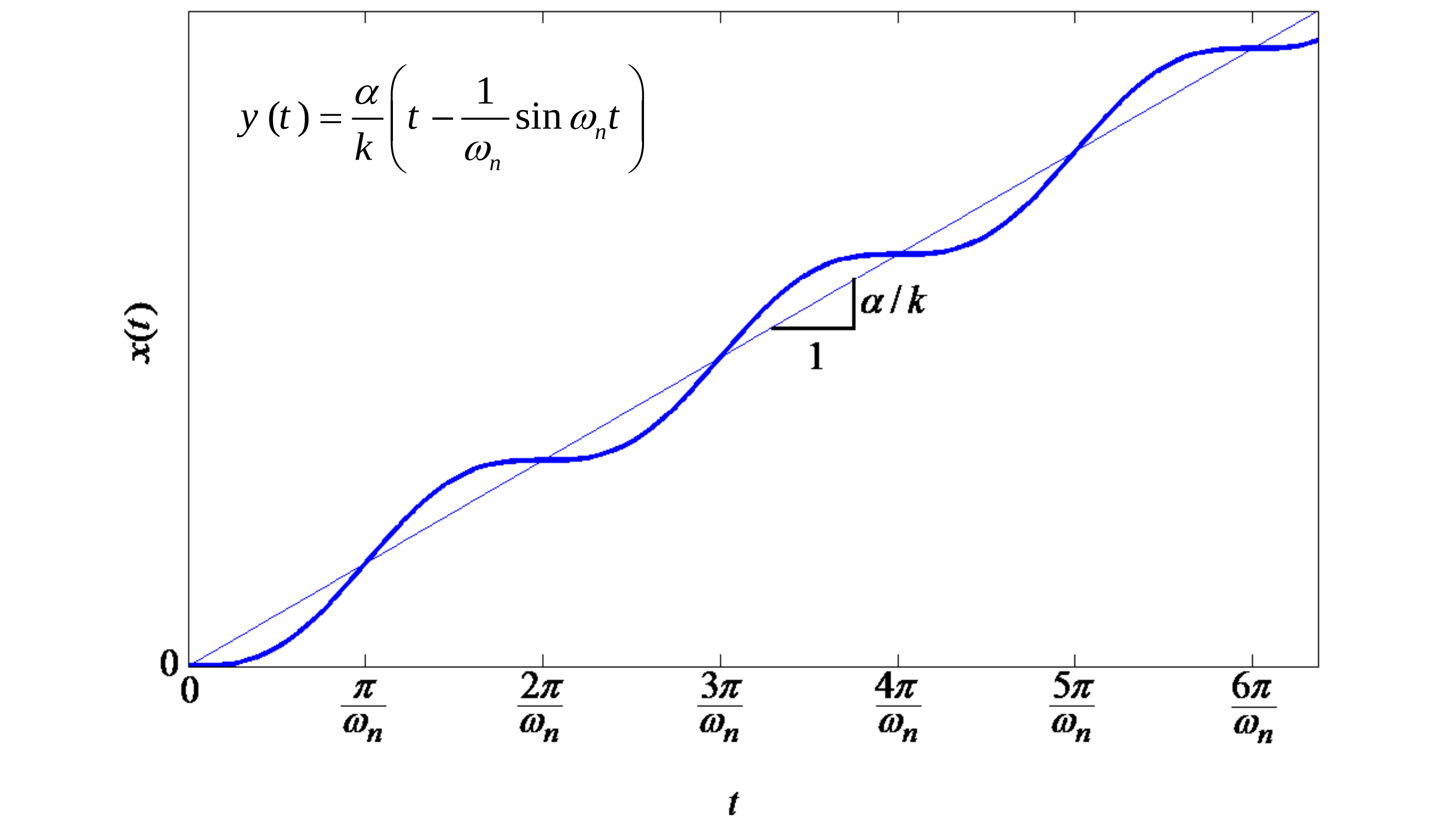
حل: با توجه به شکل ملاحظه می‌شود که نیروی نشان داده شده را می‌توان به صورت حاصل‌جمعی از دو تابع خطی بدست آورد که دارای شیب مخالف همدیگر می‌باشند و یکی از آنها با تأخیر زمانی t_0 به سیستم وارد می گردد:

$$f(t) = \begin{cases} (F_0/t_0)t, & t \le t_0 \\ (F_0/t_0)t + (-F_0/t_0)(t - t_0), & t_0 < t \end{cases} \qquad (I)$$

بنابراین کافی است پاسخ سیستم را به این دو تابع تحریک خطی بدست آوریم و سپس آنها را با همدیگر جمع کنیم. برای این منظور ابتدا پاسخ سیستم را به یک نیروی خطی ($f(t)=\alpha t$) بدست می‌آوریم:

$$y(t) = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad = \int_0^t \alpha\tau \times \frac{1}{m\omega_d} e^{-\xi\omega_n(t-\tau)} \sin\omega_d(t-\tau)d\tau$$

$$= \frac{\alpha}{k}\left[t - \frac{2\xi}{\omega_n} + e^{-\xi\omega_n t}\left(\frac{2\xi}{\omega_n}\cos\omega_d t - \frac{\omega_d^2 - \xi^2\omega_n^2}{\omega_d\omega_n^2}\sin\omega_d t\right)\right]$$



پاسخ زمانی سیستم نامیرا به تابع شیب

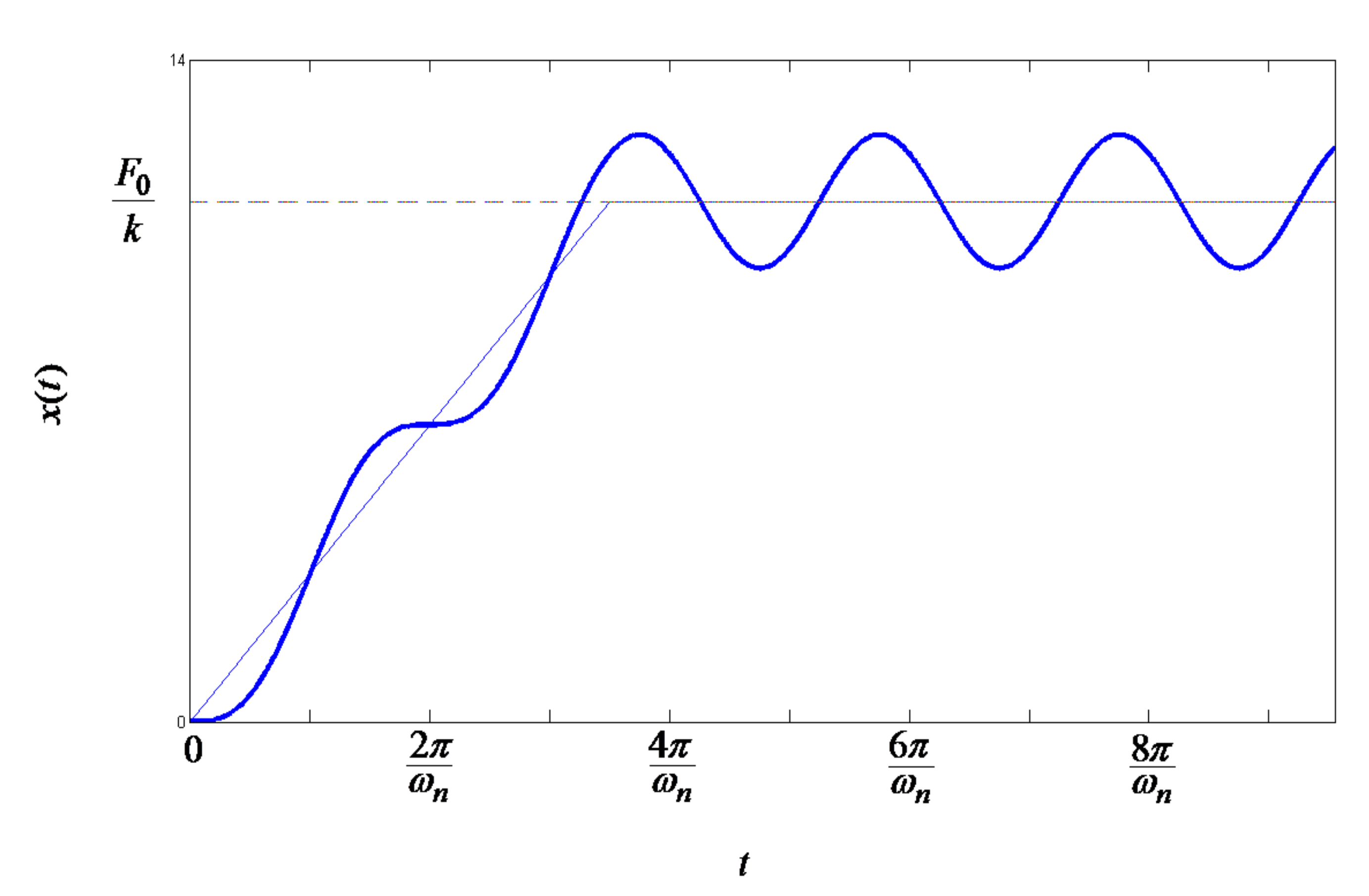
حال برای بارگذاری داده شده در این مثال، پاسخ کلی سیستم را می‌توان با استفاده از پاسخ به دو بارگذاری خطی مطابق زیر بدست آورد:

$$y(t)=\begin{cases} y_{۱}(t), & t \le t_{۰} \\ y_{۱}(t)+y_{۲}(t-\tau), & t_{۰} < t \end{cases} \qquad (IV)$$

به عنوان مثال برای یک سیستم نامیرا بدست خواهد آمد:

$$y(t)=\begin{cases} \dfrac{F_{۰}}{k\,t_{۰}}\left(t-\dfrac{۱}{\omega_n}\sin\omega_n t\right), & t \le t_{۰} \\ \dfrac{F_{۰}}{k\,t_{۰}}\left(t-\dfrac{۱}{\omega_n}\sin\omega_n t\right)-\dfrac{F_{۰}}{k\,t_{۰}}\left((t-t_{۰})-\dfrac{۱}{\omega_n}\sin\omega_n (t-t_{۰})\right), & t_{۰} < t \end{cases}$$

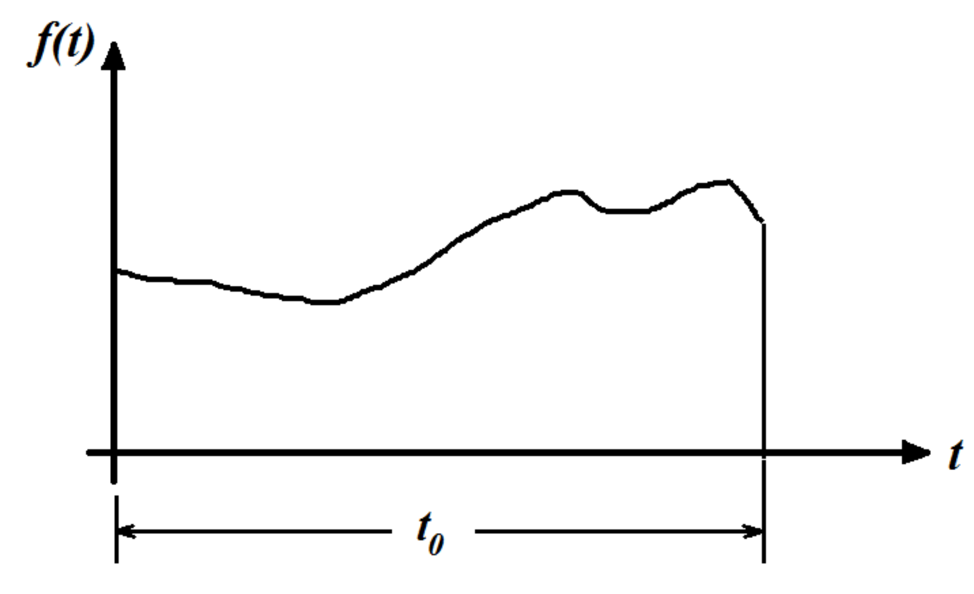
مقایسه‌ی این پاسخ با پاسخ تابع پله نشان می‌دهد که افزایش تدریجی نیرو باعث شده است که حداکثر مقدار جابجایی و همچنین دامنه‌ی نوسان حول حالت تعادل به شکل مؤثری کاهش بیابد.



پاسخ زمانی سیستم به تابع شیب با مقدار محدود

طیف پاسخ ❊

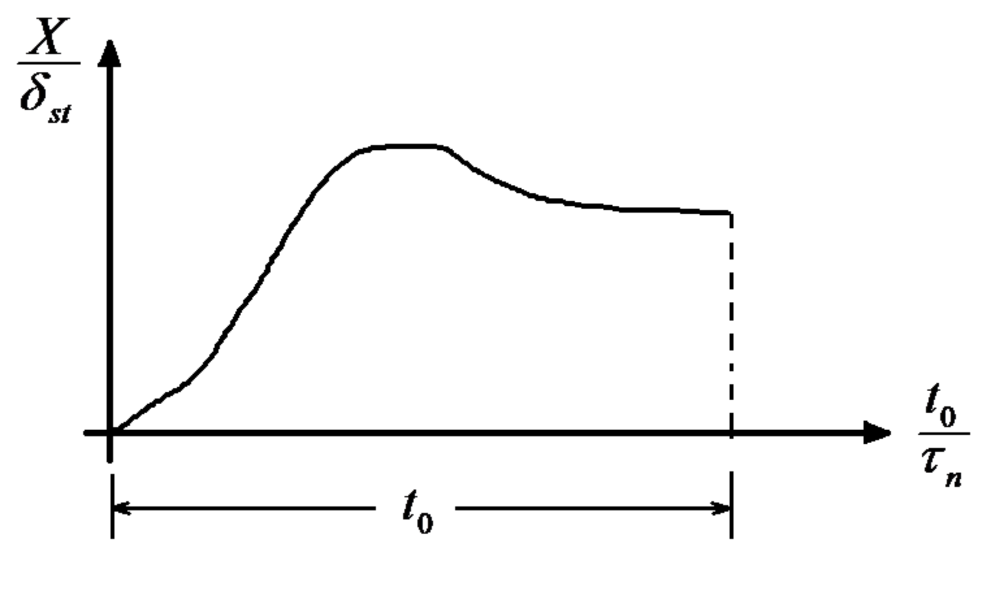
فرض کنید یک نیروی گذرا مانند آنچه که در شکل نشان داده شده است به یک سیستم ارتعاشی وارد شود. اعمال این نیرو موجب برانگیزش سیستم از حالت سکون می‌شود و پس از حذف نیرو و با گذشت زمان سیستم به حالت اولیه خود باز می گردد. می‌توان با بهره‌گیری از انتگرال کانولوشن پاسخ سیستم را به نیروی اعمال شده بدست آورد و بیشترین مقدار جابجایی را نیز تعیین کرد.



نموداری از یک نیروی گذرا

طیف پاسخ ❊

در صورت تعیین ماکزیمم مقدار جابجایی، ملاحظه خواهد شد که بیشترین جابجایی سیستم تابعی از نسبت زمان اعمال نیرو به دوره‌ی تناوب طبیعی سیستم و یا t_0 / τ_n است. چنانکه نمودار حداکثر جابجایی را بر حسب فرکانس طبیعی سیستم و یا دوره‌ی تناوب طبیعی آن رسم نماییم، نمودار بدست آمده را طیف پاسخ می‌نامند.



طیف پاسخ سیستم

شوک ❋

به نیرو و شتاب‌های بزرگی که در زمان کوتاهی به یک سیستم وارد می‌شوند، شوک می گویند. معمولاً زمان اعمال شوک کوچکتر از دوره‌ی تناوب سیستم است. شوک باعث می‌شود که به صورت ناگهانی موقعیت، سرعت و نیروهای داخلی سیستم افزایش یابند و سیستم دچار فروپاشی و یا اختلال شود.

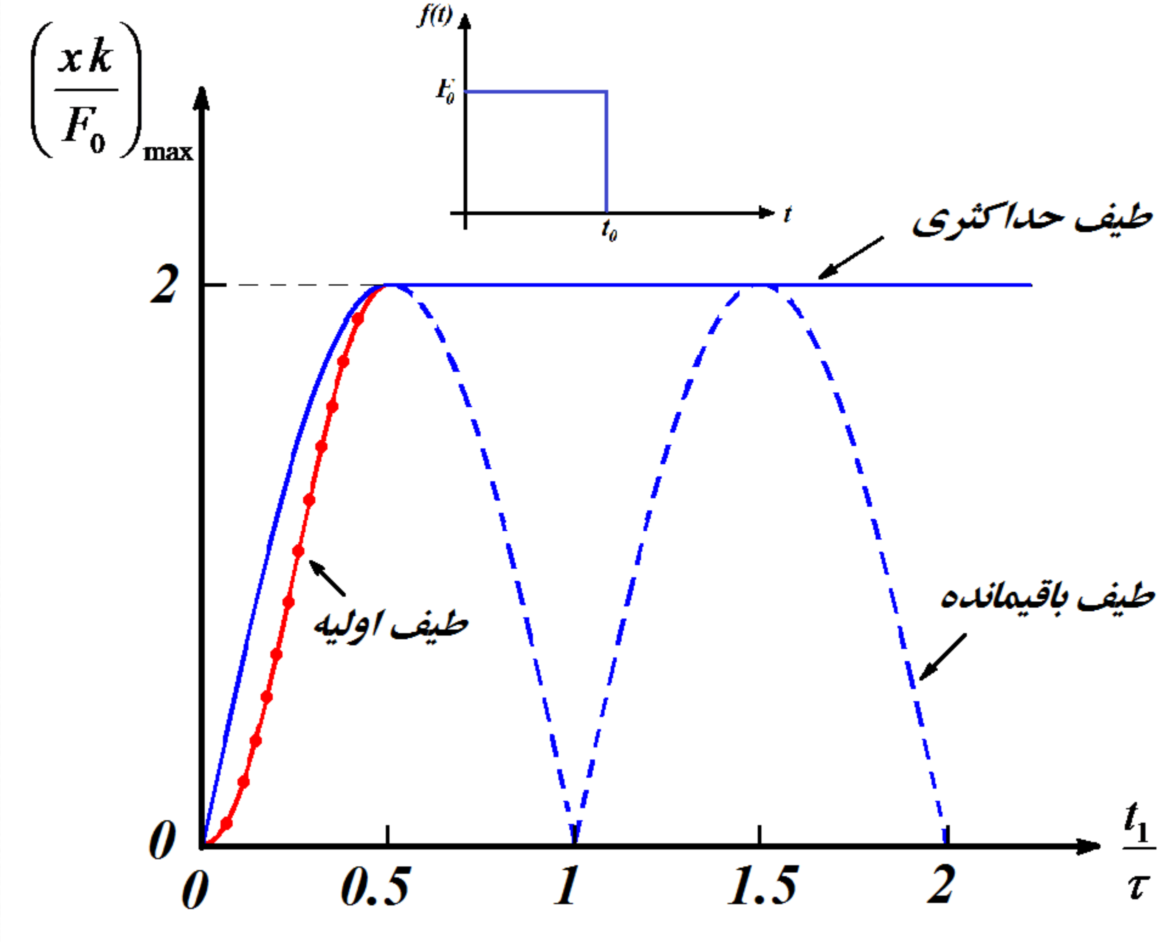
یکی از مشخصاتی که معمولاً در آزمون‌های شوک مورد توجه قرار می گیرد، حداکثر دامنه‌ی پاسخ است که معیاری است برای ارزیابی شدت شوک وارد شده به سیستم.

در مسائل مهندسی معمولاً از طیف پاسخ شوک برای طراحی اولیه استفاده می‌شود. برای بررسی عکس‌العمل سیستم در برابر انواع شوک، مدل یک درجه آزادی جرم و فنر بدون میرایی به عنوان یک مدل استاندارد پذیرفته شده است. در عمل انواع شوک‌هایی که ممکن است به سیستم وارد شود بسیار متفاوتند، اما معمولاً پاسخ سیستم به شوک‌هایی از نوع پالس مستطیلی، مثلثی و سینوسی به عنوان شوک‌های استاندارد مورد ارزیابی قرار می گیرد.

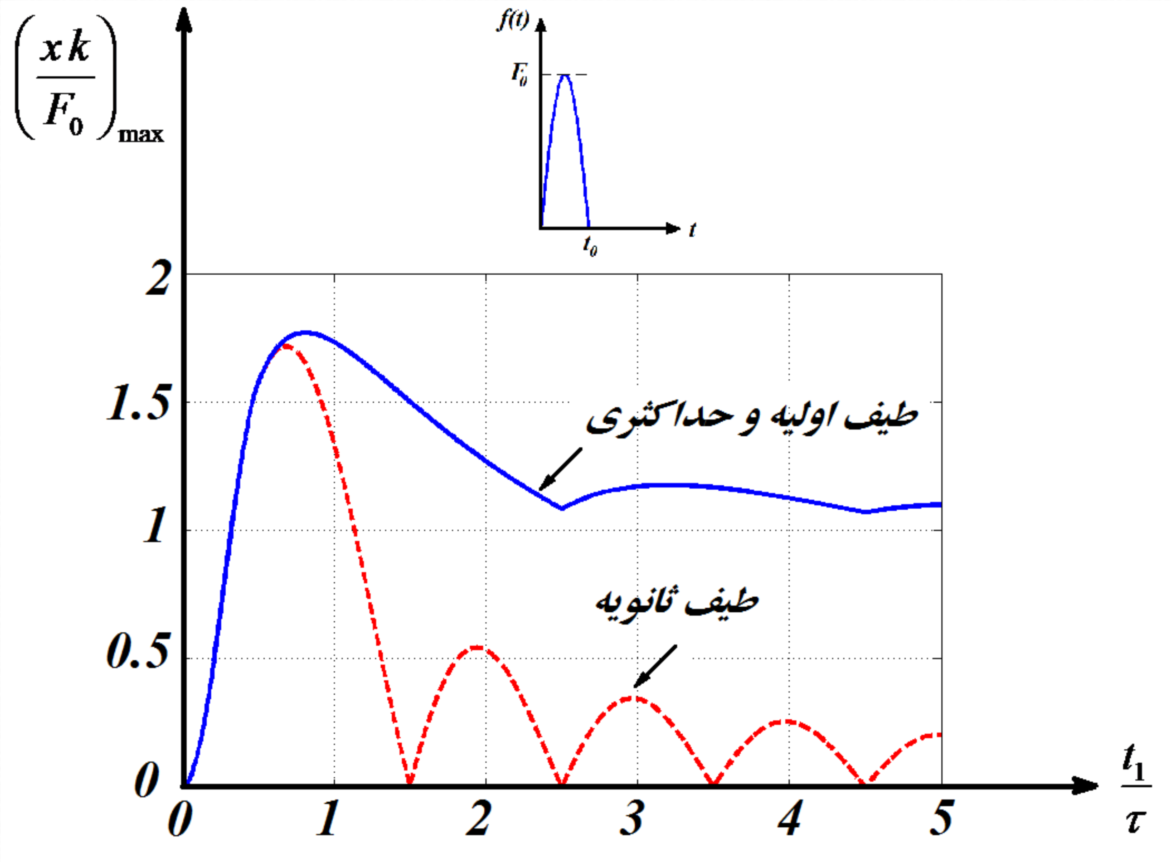
طیف پاسخی که از رابطه‌ی حداکثر جابجایی پیش از پایان شوک بدست می‌آید، طیف اولیه شوک نامیده می-شود.

پس از اعمال شوک سیستم به صورت آزاد ارتعاش خواهد کرد. طیف پاسخی که از رابطه‌ی حداکثر جابجایی در زمان های پس از شوک بدست می آید را طیف باقیمانده می‌نامند که مربوط به ارتعاشات آزاد (ارتعاشات باقیمانده) پس از شوک است.

در طراحی‌های مربوط به شوک که به دنبال ماکزیمم مقدار مطلق جابجایی هستیم، حداکثر مقدار دو منحنی طیف اولیه و طیف باقیمانده را مورد نظر قرار می‌دهیم که با نام طیف حداکثر شناخته می‌شود.



طیف پاسخ سیستم جرم و فنر به یک پالس مستطیلی



طیف پاسخ سیستم جرم و فنر به یک پالس نیم‌سینوسی

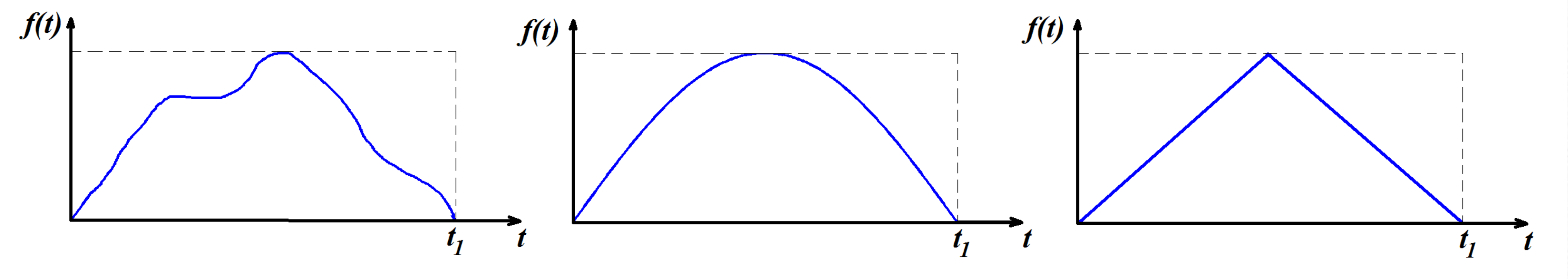
❁حفاظت در برابر شوک

برای حفاظت در برابر شوک باید ضریب انتقال نیرو، جابجایی و ... کمتر از ۱ باشد. به عنوان مثال برای پالس مستطیلی باید داشته باشیم:

$$t_{۱} < \frac{\tau}{۶}$$

به عبارت دیگر دوره تناوب طبیعی سیستم باید حداقل ۶ برابر دوره‌ی اعمال شوک باشد.

حال یک پالس کلی را در نظر بگیرید که در داخل یک مستطیلی محصور شده است. ضربه چنین پالس‌هایی قطعاً از ضربه اعمال شده توسط پالس مستطیلی کوچکتر است. می‌توان تصور ثابت نمود اگر دوره اعمال نیرو بسیار کوتاهتر از دوره تناوب باشد، شکل ضربه مهم نیست و تنها اندازه ضربه مهم است. در این حالت بزرگترین جابجایی ممکن مربوط است به پالس مستطیلی که پالس کلی ضربه را در برگرفته است.



انواع پالس های نیرو که توسط یک پالس مستطیلی محصور شده‌اند

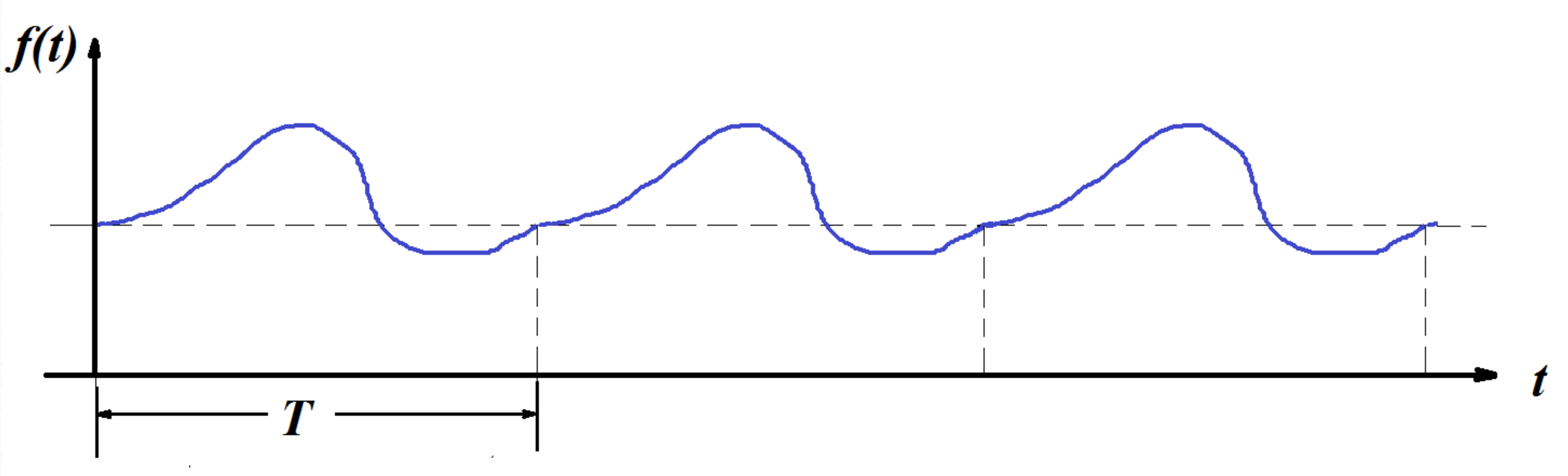
تبدیل فوریه❊

فوریه نشان داد که یک تابع متناوب کلی را می‌توان به صورت مجموعی از چندین تابع هارمونیک در نظر گرفت. از طرفی می‌توان نشان داد که در سیستم‌های دارای معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت، همواره پاسخ سیستم به یک تحریک هارمونیک، هارمونیک خواهد بود. بنابراین با کمک اصل جمع آثار می‌توان نشان داد پاسخ چنین سیستم‌هایی به یک تحریک متناوب برابراست با حاصل‌جمع چندین تابع هارمونیک که در نهایت معادل است با یک تابع متناوب (پریودیک).

حال اگر تابع تحریک غیرمتناوب باشد، می‌توان در حالت خاص آن را یک تابع متناوب با دوره تناوب بی-نهایت دانست. در این صورت چون دوره‌ی تناوب تابع به سمت بی‌نهایت میل می‌کند، حاصل‌جمع فوریه تبدیل به انتگرال فوریه می‌شود. به این ترتیب تابع پاسخ نیز به جای آنکه حاصل‌جمع چند تابع هارمونیک با فاصله‌های فرکانسی ثابت باشد، تبدیل به انتگرالی از توابع هارمونیک خواهد شد که معادل است با عکس تبدیل فوریه و یا انتگرال فوریه.

برای نشان دادن روش استخراج تبدیل‌های فوریه، یک تـابع متنـاوبماننـد f(t) را در نظـر بگیریـد کـه دارای دوره‌ی تناوب T باشد، مانند آنچه که در شکل نشان داده شده است. بر اساس اصل فوریه این تابع را می‌تـوان مطابق زیر به صورت حاصل‌جمع یک سری از توابع هارمونیک بعلاوه یک مقدار ثابت نوشت:

$$f(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t)$$

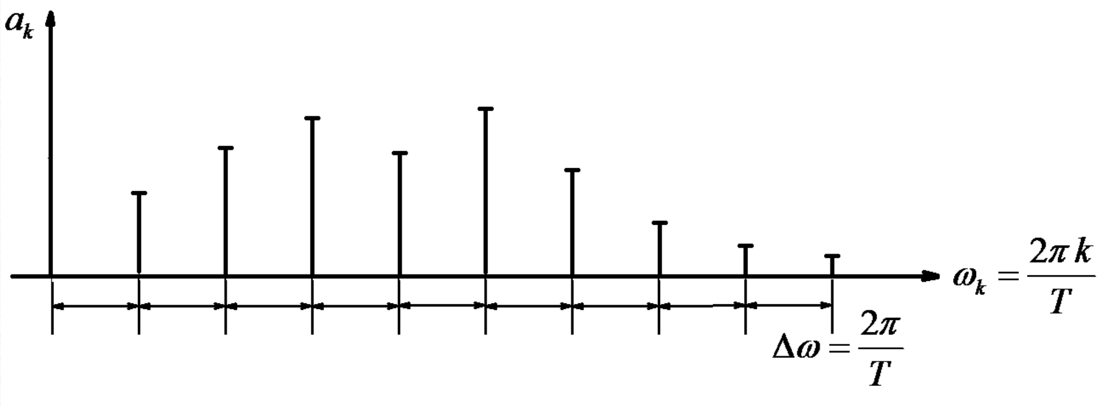


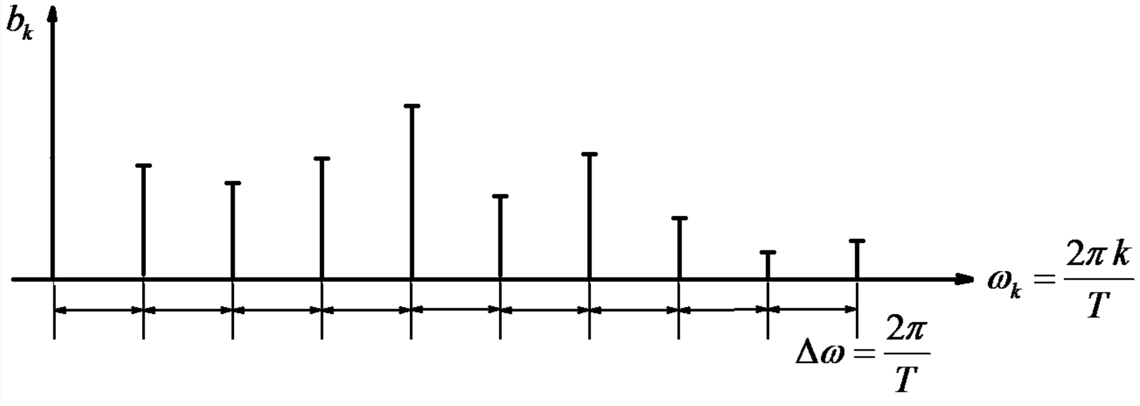
یک تابع متناوب کلی

که در آن

$$\omega_k = \frac{۲\pi k}{T}, \qquad a_\circ = \int_{-T/۲}^{T/۲} f(t)\,dt,$$

$$a_k = \frac{۲}{T}\int_{-T/۲}^{T/۲} f(t)\cos\omega_k t\,dt, \qquad b_k = \frac{۲}{T}\int_{-T/۲}^{T/۲} f(t)\sin\omega_k t\,dt.$$





ضرایب فوریه

می‌توان ملاحظه کرد وقتی که T بسیار بزرگ می‌شود، فاصله‌ی فرکانسی کاهش یافته و ضرایب فوریه به همدیگر فشرده می‌شوند و در حالت حدی وقتی که T به سمت بی‌نهایت میل می کند (تابع غیرمتناوب)، این ضرایب کاملاً به همدیگر می‌چسبند و دیگر نمی‌توانیم را به صورت توابع هارمونیك مجزا تحلیل کنیم.
البته می‌توانیم ایده سری فوریه را با تعریفی جدید همچنان دنبال کنیم، به این صورت که سری فوریه تبدیل به انتگرال فوریه شده و ضرایب فوریه نیز تبدیل به توابع پیوسته‌ای می‌شوند که تبدیل‌های فوریه نامیده می‌شوند.
با جایگذاری ضرایب فوریه در بسط فوریه، برای حالت $a_۰ = ۰$ بدست می‌آید:

$$f(t) = \sum_{k=۱}^{\infty}\left[\left(\frac{۲}{T}\int_{-T/۲}^{T/۲} f(t)\cos\omega_k t\,dt\right)\cos\omega_k t + \left(\frac{۲}{T}\int_{-T/۲}^{T/۲} f(t)\sin\omega_k t\,dt\right)\sin\omega_k t\right]$$

وقتی که دوره‌ی تناوب بسیار بزرگ می‌شود، فاصله‌های فرکانسی کاهش یافته و حاصل‌جمع‌های بالا تبدیل به انتگرال می‌شوند. در این حالت

$$f(t) = \int_{\omega=۰}^{\infty}\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos\omega t\,dt\right)\cos\omega t\,\frac{d\omega}{\pi} + \int_{\omega=۰}^{\infty}\left(\frac{۲}{T}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin\omega t\,dt\right)\sin\omega t\,\frac{d\omega}{\pi}$$

و یا

$$f(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}A(\omega)\cos\omega t\,d\omega+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}B(\omega)\sin\omega t\,d\omega$$

که در آن

$$A(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos\omega t\,dt\,,\qquad B(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\sin\omega t\,dt$$

با تعریف

$$F(\omega)=A(\omega)-i\,B(\omega)$$

فرم مختلط تبدیل فوریه مطابق زیر بدست می‌آید:

$$\mathscr{F}\big(f(t)\big)=F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,(\cos\omega t-i\sin\omega t)\,dt=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\,e^{-i\omega t}\,dt$$

و انتگرال فوریه یا تبدیل معکوس فوریه نیز معادل خواهد شد با

$$f(t) = \mathscr{F}^{-1}\left(F(\omega)\right) = \frac{۱}{۲\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\, e^{i\omega t}\, dt$$

شرط همگرایی تبدیل‌های فوریه آن است که داشته باشیم:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| f(t) \right| dt < \infty$$

تبدیل لاپلاس*

در بخش پیش سعی کردیم مفاهیم فیزیکی را که در توسعه تبدیل‌های فوریه مورد استفاده قرار گرفتند، بررسی نماییم. نشان دادیم که بر اساس اصل فوریه هر تابع پریودیک را می‌توان با یک بسط فوریه و هر تابع غیرپریودیک را با یک انتگرال فوریه ارائه داد. اکنون می‌خواهیم نشان دهیم که تبدیل لاپلاس نیز در برگیرنده مفاهیم مشابهی است، با این تفاوت که با تغییر متغیر انتگرال و حدود آن، شکل دیگری به خود می-گیرد و می‌تواند شرایط اولیه تابع را نیز در خود جای دهد.

اگر در روابط پایه مربوط به بسط فوریه، حدود انتگرال را که از $-T/2$ تا $T/2$ است، به ۰ تا T تغییر دهیم، آنگاه تبدیل فوریه در شکل زیر ظاهر خواهد شد:

$$F(\omega) = \int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt$$

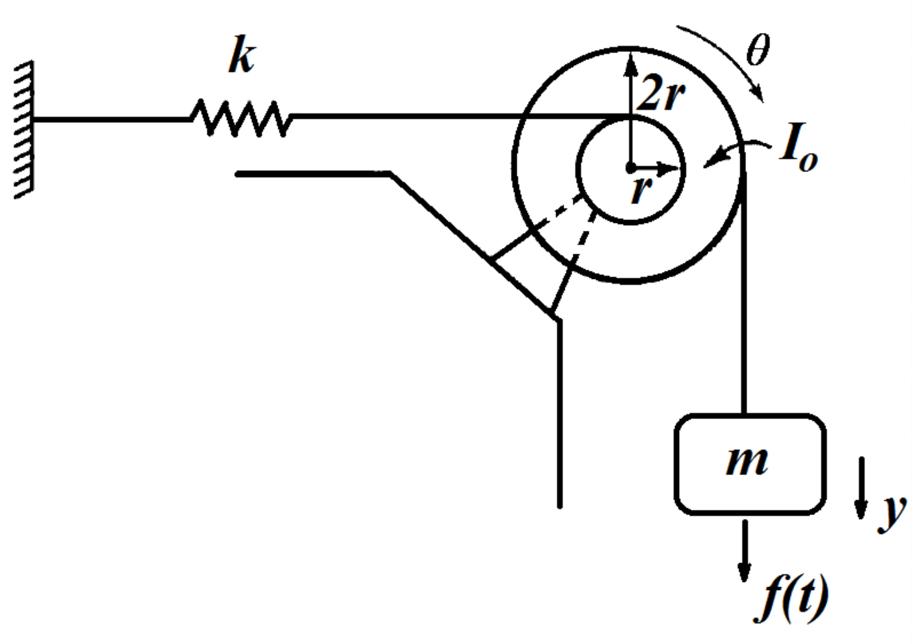
با تغییر متغیر $s=i\,\omega$، رابطه قبلی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$F(s)=\int_{0}^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt$$

رابطه‌ی بالا تعریف رسمی تبدیل لاپلاس است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که تبدیل لاپلاس بیان دیگری از تبدیل فوریه است که در آن حدود انتگرال از ۰ تا ∞ است.

مزیت تبدیل لاپلاس بر تبدیل فوریه آن است که چون حدود انتگرال از ۰ تا ∞ تعریف شده‌اند، شرایط اولیه‌ی مسأله نیز در حل معادلات دخیل شده و بنابراین با استفاده از تبدیل‌های لاپلاس می‌توان حل کلی معادله را که شامل حل همگن و غیرهمگن معادله است، استخراج نمود. ضمن آنکه شکل کلی ساده‌تری نیز دارد.

مثال



یک سیستم یک درجه آزادی را نشان می‌دهد که تحت تأثیر نیروی هارمونیک $f(t)=۲\sin(\omega t)$ قرار گرفته است. فرکانس نوسان نیرو را به گونه‌ای تنظیم کنید که دامنه‌ی جابجایی وزنه برابر ۳ سانتیمتر باشد. فرض کنید:

$$m=1kg, \qquad I_o=0.01kg.m^2,$$
$$r=0.1m \qquad k=100N.$$