

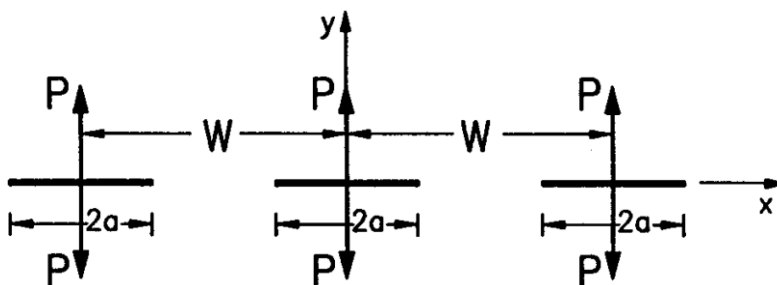
## مسائل تمرینی بخش کاربرد آنالیز مختلط در تحلیل میدان تنش الاستیک خطی اجسام ترک دار

۱- در روش بسط تابع ویژه ویلیامز، تابع تنش ایری برای ترک نیمه محدود در یک ورق نامحدود که در معرض بارگذاری عمومی قرار گرفته است، به فرم  $\varphi = r^{\lambda+1} f(\theta)$  در نظر گرفته می شود که در آن  $r, \theta$  مختصات قطبی ایجاد شده قرار گرفته در نوک ترک بوده و  $\lambda$  یک مقدار حقیقی می باشد. با استفاده از شرایط مرزی در راستای وجوه ترک، تابع  $\varphi$  را تعیین کرده و عبارت هایی برای مؤلفه های جابجائی و تنش سینگولار در مد اول بازشدگی و مد دوم لغزش ناشی از بارگذاری پیدا کنید. مشاهده می شود که مقادیر منفی برای  $\lambda$  نادیده گرفته می شود، چونکه جابجائی های نامحدود در نوک ترک ایجاد می کند.

۲- نشان دهید که تابع تنش ایری  $\varphi = Cr^{\frac{3}{2}} (\cos \frac{\theta}{2} + \frac{1}{3} \cos \frac{3\theta}{2})$  متناظر با مد اول ترک نیمه محدود با وجوه ترک در  $\theta = \pm \pi$  می باشد، هنگامی که بدون بارگذاری می شود.

۳- یک آرایش متناوب (پریودیک) از ترک های با فاصله مساوی مطابق شکل ۱ در راستای محور  $x$  در نظر بگیرید که هر کدام از ترک ها در معرض زوج نیروهای متمرکز در مرکز ترک قرار گرفته است. نشان دهید که تابع وسترگارد به فرم زیر مورد قبول است. نشان دهید که فاکتور شدن تنش برابر است با:

$$Z_I = \frac{P \sin(\frac{\pi a}{w})}{w (\sin \frac{\pi z}{w})^2} \left[ 1 - \left( \frac{\sin \frac{\pi a}{w}}{\sin \frac{\pi z}{w}} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad k_I = \frac{P}{\sqrt{\frac{w}{2} \sin \frac{\pi a}{w}}}$$



شکل ۱- آرایش متناوب نامتناهی ترک های با فواصل مساوی که در معرض جفت (زوج) نیروهای متمرکز  $P$  در مرکز آن ها در صفحه ی نامحدود قرار گرفته اند.

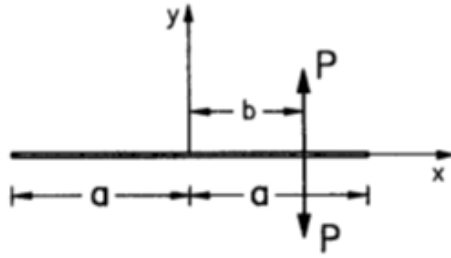
۴- نشان دهید که تابع وسترگارد برای یک ورق نامحدود با ترک به طول  $2a$  که در  $x=b$  مطابق شکل (۲- الف) در معرض زوج نیروی

$P$  قرار گرفته است، به فرم  $Z_I = \frac{P}{\pi(z-b)} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{z^2 - a^2}}$  می باشد. سپس نشان دهید که فاکتور شدت تنش نوک  $x=a$  به صورت

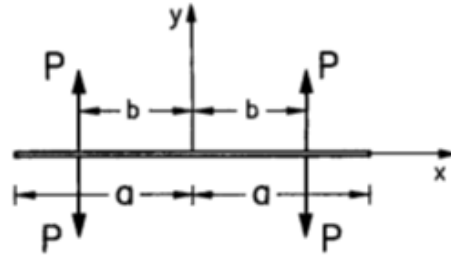
$k_I = \frac{P}{\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$  است. با استفاده از این نتایج نشان دهید که برای زوج نیروهای اضافی در  $x=-b$  (شکل ۲- ب) تابع وسترگارد

به صورت  $Z_I = \frac{2PZ}{\pi(z^2 - b^2)} \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{z^2 - a^2}}$  بوده و فاکتور شدت تنش نیز برابر است با:

$$k_I = 2P \sqrt{\frac{a}{\pi(a^2 - b^2)}}$$



الف



ب

شکل ۲- یک ورق نامحدود با ترکی به طول  $2a$  در معرض الف) زوج نیروهای  $P$  در  $x=b$  (شکل بالایی) و ب) دو زوج نیرو در

$$x = \pm b$$