$$T_{av} = \frac{1}{4} I_m^2 L_2 \sin 2\delta$$
$$= \frac{1}{8} I_m^2 (L_d - L_q) \sin 2\delta$$

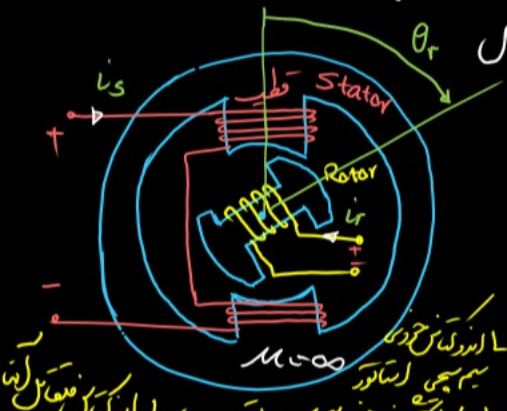
δ زاویه‌ی بار — بیشترین مقدار گشتاور در متوسط به ازای $\delta = 45^\circ$

— این موتور فقط با سرعت ثابت می‌تواند بچرخد $\omega_r = \omega = 2\pi f$ پس کاربردان در جایی است که سرعت ثابت می‌چرخد

— این موتور با سرعت ثابت می‌چرخد. چون به ازای $\omega_r = 0$ متوسط گشتاور در راه اندازی ندارد. متوسط گشتاور صفر است.

گشتاوری که این موتور تولید می‌کند گشتاور رلوکتانسی نام دارد چون فقط از تغییرات رلوکتانس حاصل می‌شود نه برهم کنش دو میدان

سیستم‌های مغناطیسی در حرکت — بیشتر مدل‌های انرژی الکترومغناطیسی گردان در حرکت هستند — جز سیستم‌هایی که فقط در یک بازه‌ی کوچک حرکت یا جرخش دارند نه دوران کامل



اگر از اشباع دور بمانیم صرفنظر شود؟

در دو حرکت

$$dW_{elec} = i\,d\lambda$$
$$= i_s d\lambda_s + i_r d\lambda_r$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_s \\ \lambda_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_s & L_{sr} \\ L_{rs} & L_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_s \\ i_r \end{bmatrix}$$

$$\lambda_s = L_s i_s + L_{sr} i_r$$
$$\lambda_r = L_r i_r + L_{rs} i_s \quad , \quad L_{sr} = L_{rs}$$

اگر روتور مجاز به حرکت نباشد ← $dw_{mech}=0$ ← $dw_{elec}=dw_{fld}$

$$dw_{elec}=dw_{fld}=i_s\,d\lambda_s+i_r\,d\lambda_r=i_s\,d(L_s i_s+L_{sr}i_r)+i_r\,d(L_r i_r+L_{rs}i_s)$$

اگر مجهز نباشد L_{sr} و L_s و L_r ثابت می‌ماند

$$=L_s i_s\,di_s+L_{sr}i_s\,di_r+L_r i_r\,di_r+L_{sr}i_r\,di_s$$

$$=L_s i_s\,di_s+L_r i_r\,di_r+L_{sr}\,d(i_s\cdot i_r)\quad *$$

$$W_{fld}=L_s\int_0^{i_s} i_s\,di_s+L_r\int_0^{i_r} i_r\,di_r+L_{sr}\int_0^{i_s i_r} d(i_s\cdot i_r)=\frac{1}{2}L_s i_s^2+\frac{1}{2}L_r i_r^2+L_{sr}i_s i_r \quad **$$

برای محاسبه‌ی گشتاور فرض می‌کنیم که روتور جابجایی به اندازه‌ی $d\theta_r$ داشته باشد پس L_s و L_r و L_{sr} ثابت نیستند.

$$** \quad dw_{elec}=i_s L_s\,di_s+i_s^2\,dL_s+i_s i_r\,dL_{sr}+i_s L_{sr}\,di_r+i_r^2\,dL_r+i_r L_r\,di_r+i_r L_{rs}\,di_s+i_r i_s\,dL_{sr}$$

$$dw_{mech}=dw_{elec}-dw_{fld}=\frac{1}{2}i_s^2\,dL_s+\frac{1}{2}i_r^2\,dL_r+i_s i_r\,dL_{sr}$$

$$dw_{mech}=T_e\cdot d\theta_r \Longrightarrow T_e=\frac{1}{2}i_s^2\frac{dL_s(\theta)}{d\theta}+\frac{1}{2}i_r^2\frac{dL_r(\theta)}{d\theta}+i_s i_r\frac{dL_{sr}(\theta)}{d\theta}$$

گشتاور رلوکتانسی — گشتاور مغناطیسی

قید در یک تحریک

$$T_e=-\frac{\partial W_f(\lambda,\theta)}{\partial\theta}=\frac{\partial W'_f(i,\theta)}{\partial\theta}$$

روش دوم $W_f(\lambda_s,\lambda_r,\theta)=$ داریم $*$ $\Longrightarrow T_e=-\dfrac{\partial W_f(\lambda_s,\lambda_r,\theta)}{\partial\theta}$

$$=-\frac{\partial W_f(L_s,L_r,\theta)}{\partial\theta}$$

$$=\frac{\partial W'_f(i_s,i_r,\theta)}{\partial\theta}$$

مثال در یک سیستم دو تحریکه

$L_s=0.6+0.2\cos 2\theta_r$, $L_r=0.75+0.3\cos 2\theta_r$

$L_{sr}=0.8\cos\theta_r$, $r=0$

مثال در یک سیستم دو تحریکه

$L_s = 0{,}6 + 0{,}2\cos 2\theta_r$, $L_r = 0{,}75 + 0{,}3\cos 2\theta_r$

$L_{sr} = 0{,}8\cos\theta_r$, $r = 0$

(الف) $i_r = 10\,A_{DC}$, $i_s = 20\,A_{DC} \rightarrow T_e = ?$ $\theta = 60$

$$T_e = \frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL_s}{d\theta} + \frac{1}{2} i_r^2 \frac{dL_r}{d\theta} + i_r i_s \frac{dL_{sr}}{d\theta}\Big|_{\theta=60}$$

$$= \frac{1}{2}\times 20^2 \times (-0{,}4\sin 2\theta_r) + \frac{1}{2}\times 10^2 (-0{,}6\sin 2\theta_r) + 10\times 20\times(-0{,}8\sin\theta_r) = \dots$$

43,32 — 69,28 — −233,88

(ب) $i_r = -10\,A_{DC}$, $i_s = 20\,A_{DC}$, $\theta = 60$

(ج) $i_r = 0$, $i_s = 20\,A_{DC}$, $\theta = 60$

(د) $\theta_r = 60$, سیم‌پیچ روتور اتصال کوتاه, $i_s = 20\,A_{AC}$, rms

(هـ) $V_s = 314\,V$ rms (AC), $f = 50\,Hz$ — قسمت ③ را تکرار کنید.

سیم‌پیچ دوم اتصال کوتاه ③

$$V_r = r_r i_r + \frac{d\lambda_r}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d\lambda_r}{dt} = 0 \rightarrow \frac{d}{dt}(L_r i_r + L_{sr} i_s)$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(L_r i_r) = -\frac{d}{dt}(L_{sr} i_s)$$

$$\Rightarrow i_r = -\frac{L_{sr}}{L_r} i_s \rightarrow i_r = -\frac{0{,}8\cos 60}{0{,}75 + 0{,}3\cos 120} \times 20$$

$e = N\frac{d\phi}{dt} = \frac{d\lambda}{dt}$

$$\tau = \frac{1}{2} i_s^2 \frac{dL_s}{d\theta} + \frac{1}{2} i_r^2 \frac{dL_r}{d\theta} + i_r i_s \frac{dL_{sr}}{d\theta} = 69{,}295\ N.m$$

(ه) $V_s = 314\,V$ rms

$$V_s = 314\sqrt{2}\cos(2\times\pi\times 50t) = r_s i_s + \frac{d\lambda_s}{dt}$$

$$\rightarrow \frac{d\lambda_s}{dt} = 314\sqrt{2}\cos(100\pi t)$$

$$\Rightarrow \lambda_s = \int 314\sqrt{2}\cos(100\pi t)\,dt$$

$$\lambda_s = L_s i_s + L_{sr} i_r \rightarrow i_s = ?$$

$$i_r = ?$$

$$\downarrow$$

$$-\frac{L_{sr}}{L_r} i_s$$

ماشین های دو تحریکه { قطب صاف یا استوانه‌ای
" برجسته

cylidrical

قطب صاف

L_s , L_r مستقل از θ و ثابت
$L_{sr} = M \cos\theta$
} Mutual Inductance اندوکتانس متقابل

$$T = i_s i_r \frac{dL_{sr}}{d\theta}$$

فرض کنید { $i_s = I_{sm} \cos \omega_s t$ → جریان سیم پیچی استاتور با ω_s
$i_r = I_{rm} \cos(\omega_r t + \alpha)$ → روتور " " "
$\theta = \omega_m t - \delta$ → سرعت زاویه‌ای مکانیکی

$$T = I_{sm} \cos\omega_s t * I_{rm} \cos(\omega_r t + \alpha) . (-M \sin(\omega_m t - \delta))$$

با بسط حاصلضرب حاصلجمع، گسترده را به صورت حاصلجمع چند جمله‌ای بنویسید و بررسی کنید که در چه شرایطی گشتاور متوسط وجود دارد و چقدر است؟

$$T = -\frac{I_{sm} I_{rm} . M}{4} \Big[\sin(\omega_m + (\omega_s + \omega_r)t + \alpha - \delta) + \sin((\omega_m - (\omega_s + \omega_r))t - \alpha + \delta) + \sin\{(\omega_m + (\omega_s - \omega_r))t - \alpha + \delta\} + \sin\{(\omega_m - (\omega_s - \omega_r))t + \alpha + \delta\}$$

$\omega_m = \pm(\omega_s - \omega_r)$

$\omega_m = \pm(\omega_s + \omega_r)$ → $\omega_m = \pm(\omega_s \mp \omega_r)$

$|\omega_m| = |\omega_s \pm \omega_r|$

الف) $\omega_r = 0 , \omega_m = \omega_s , \alpha = 0$ سه جریان سیم پیچی روتور با DC

ماشین سنکرون — جریان DC روتور — سرعت سنکرون

کاربرد در ژنراتورهای نیروگاهی

الف) $W_r = 0$, $W_m = W_s$, $\alpha = 0$

ماشین سنکرون با DC ← جریان DC به جریان سیم‌پیچی روتور

سرعت سنکرون

$$T_{avg} = -\frac{I_{sm} I_{R\cdot M}}{2} \sin\delta$$

δ زاویه‌ی بار

بیشترین گشتاور متوسط در $\delta = 90$

ب) ماشین کنسرون ← ماشین القایی

$W_m = W_s - W_r$

هر دو سیم‌پیچ جریان سینوسی

{Asynchronous machine
Induction

If $W_s = W_r$ → خواص جریان

$W_s \neq W_r$ ← لازمه‌ی ایجاد گشتاور متوسط

اگر فرکانس جریان‌های سیم‌پیچ روتور و استاتور برابر باشند.

کاربرد در موتورهای صنعت

کاربرد در ژنراتورهای نیروگاهی

$$T_{avg} = -\frac{I_{sm} I_{rm} \cdot M}{4} \sin(\alpha+\delta)$$

ماشین القایی ← جریان روتور از طریق القای مغناطیسی روی آرمیچر استاتور به برق AC متصل خواهد شد.

مثال: در سیستم مغناطیسی داده شده همه‌ی آهن‌ها، μ ثابت

الف) انرژی ذخیره شده در سیستم برای $i = 2^{A,DC}$, $x = 1^{cm}$

$g = 1^{mm}$, $A = 4^{cm^2}$

ب) اگر مقاومت سیم‌پیچ $R = 4\Omega$ باشد، برای ایجاد نیروی $F = 30^{N}$ ولتاژ AC اعمال به سیم‌پیچ با فرکانس 50^{Hz} چقدر باید باشد؟

$$\mathcal{R}_{g1}, \mathcal{R}_{g2} = \frac{g}{\mu_0 A} \quad , \quad \mathcal{R}(x) = \frac{x}{\mu_0 A}$$

$$\mathcal{R}_{eq}(x) = \left(\mathcal{R}_{g1} \parallel \mathcal{R}(x)\right) + \mathcal{R}_{g2}$$

$$L(x) = \frac{N^2}{\mathcal{R}(x)} \quad , \quad W'_f(i,x) = \frac{1}{2} L(x) \cdot i^2$$

متغیر مستقل i و x

روش دوم

$\varphi_{g1}, \varphi_{g2}, \varphi(x) = ?$

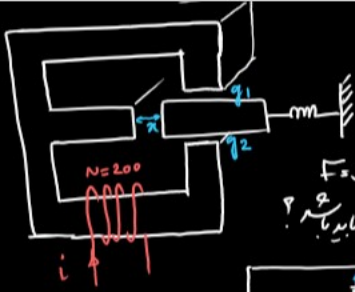
$$\varphi(g_2) = \frac{Ni}{\mathcal{R}_{eq}(x)} \quad , \quad \varphi(g_1) = \frac{\mathcal{R}(x)}{\mathcal{R}(x) + \mathcal{R}_{g1}} \cdot \varphi(g_2)$$

مثال: در سیستم مغناطیسی داده شده هسته آهن آلیاژ q ثابت

الف) انرژی ذخیره شده در سیستم برابر $g=1^{mm}$, $A=4cm^2$

$i=2^{A,DC}$ $x=1cm$

ب) اگر مقاومت سیم پیچ $R=4\Omega$ باشد، برای ایجاد نیروی $F=30^N$ ولتاژ AC اعمال به سیم پیچ با فرکانس $50Hz$ چقدر باید باشد؟



$$\mathcal{R}_{g_1}, \mathcal{R}_{g_2} = \frac{g}{\mu_0 A} \quad , \quad \mathcal{R}(x) = \frac{x}{\mu_0 A}$$

$$\mathcal{R}_{eq}(x) = \left(\mathcal{R}_{g_1} \parallel \mathcal{R}(x)\right) + \mathcal{R}_{g_2}$$

$$L(x) = \frac{N^2}{\mathcal{R}(x)} \quad , \quad W'_f(i,x) = \frac{1}{2} L(x) \cdot i^2$$

x متغیر ستقل

روش دوم

$\varphi_{g_1}, \varphi_{g_2}, \varphi(x) = ?$

$B_{g_1}, B_{g_2}, B(x)$ ← A

$$\varphi(g_2) = \frac{Ni}{\mathcal{R}_{eq}(x)} \quad , \quad \varphi(g_1) = \frac{\mathcal{R}(x)}{\mathcal{R}(x)+\mathcal{R}_{g_1}} \cdot \varphi(g_2)$$

$$\varphi(x) = \frac{\mathcal{R}_{g_1}}{\mathcal{R}(x)+\mathcal{R}_{g_1}} \varphi(g_2)$$

$$W'_f(i,x) = \frac{1}{2}\frac{B_{g_1}^2}{\mu_0} \times A g_1 + \frac{1}{2}\frac{B_{g_2}^2}{\mu_0} A g_2 + \frac{1}{2}\frac{B(x)^2}{\mu_0} \cdot A \cdot x$$

$$f(x) = \frac{\partial W'(i,x)}{\partial x}$$

آیا مجموع انرژی ذخیره شده ویژه از دو روش به یک نتیجه می رسد؟

$F=30 \xrightarrow[x=1cm]{} i=?$ ←

اگر منبع DC باشد $V = Ri = 4i$

اگر AC باشد $|V| = |Z| \cdot i$

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (L\omega)^2}$$

$L(x)$, $2\pi \times 50$

چقدر باید V_{DC} باشد؟ تا V_{AC} لازم برای ایجاد نیروی موردنظر