ارتعاشات مکانیکی

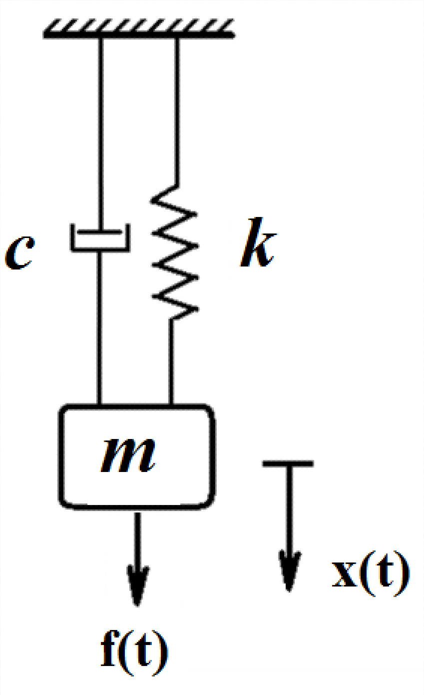
ارائه دهنده: دکتر سیروان فرهادی

فصل پنجم: ارتعاشات سیستم‌های یک درجه آزادی- تحریک هارمونیک

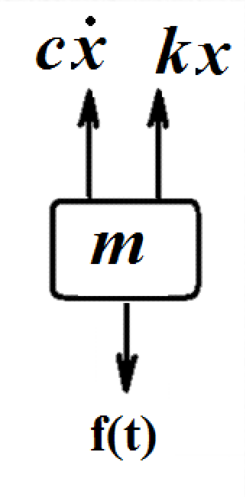
ارائه دهنده: دکتر سیروان فرهادی

فهرست مطالب

معادله دیفرانسیل حرکت



یک جرم و فنر با میراگر ویسکوز را در نظر بگیرید.



با استفاده از قانون دوم نیوتون و با توجه به دیاگرام آزاد جرم، معادله‌ی دیفرانسیل حرکت را می‌توان مطابق زیر استخراج نمود:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f(t)$$

معادله‌ی دیفرانسیل فوق یک معادله‌ی غیرهمگن است که می‌تواند دارای دو جواب همگن و غیرهمگن باشد.

پاسخ سیستم‌های غیرمیرا به تحریک هارمونیک

در ابتدا سیستمی را در نظر می‌گیریم که غیرمیرا باشد ($c=0$)، برای بدست آوردن پاسخ این سیستم به یک تحریک هارمونیک، نیروی تحریک را مطابق زیر با یک تابع مثلثاتی معرفی می‌نماییم:

$$f(t) = F\cos(\omega t)$$

در این صورت معادله‌ی حرکت به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$m\ddot{x} + kx = F\cos(\omega t)$$

برای حل معادله‌ی فوق، پاسخ را به صورت حاصل‌جمع حل همگن و غیرهمگن در نظر می گیریم:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

برای حل همگن معادله، سمت راست معادله را باید برابر صفر در نظر بگیریم:

$$x_h(t) = A\sin(\omega_n t) + B\cos(\omega_n t), \quad \omega_n = \sqrt{k/m}$$

برای یافتن پاسخ غیرهمگن معادله یا حل خصوص آن، می‌توانیم با توجه به فیزیک مسأله، پاسخ را به صورت هارمونیک فرض نماییم زیرا انتظار می‌رود یک نیروی متناوب باعث یک جابجایی متناوب شود:

$$x_p(t) = X\cos(\omega t)$$

با جایگذاری پاسخ پیش بینی شده در معادله حرکت، بدست می‌آید:

$$(-m\omega^{۲}+k)X\ \cos(\omega t)=F\cos(\omega t)$$

و در نتیجه

$$X=\frac{F}{k-m\omega^{۲}}=\frac{\left(F/k\right)}{۱-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{۲}}$$

با استفاده از رابطه بالا می‌توان ضریب بزرگنمایی را به شکل زیر بدست آورد:

$$M=\frac{X}{\delta_{st}}=\frac{۱}{۱-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{۲}}$$

برای حل معادله‌ی فوق، پاسخ را به صورت حاصل‌جمع حل همگن و غیرهمگن در نظر می گیریم:

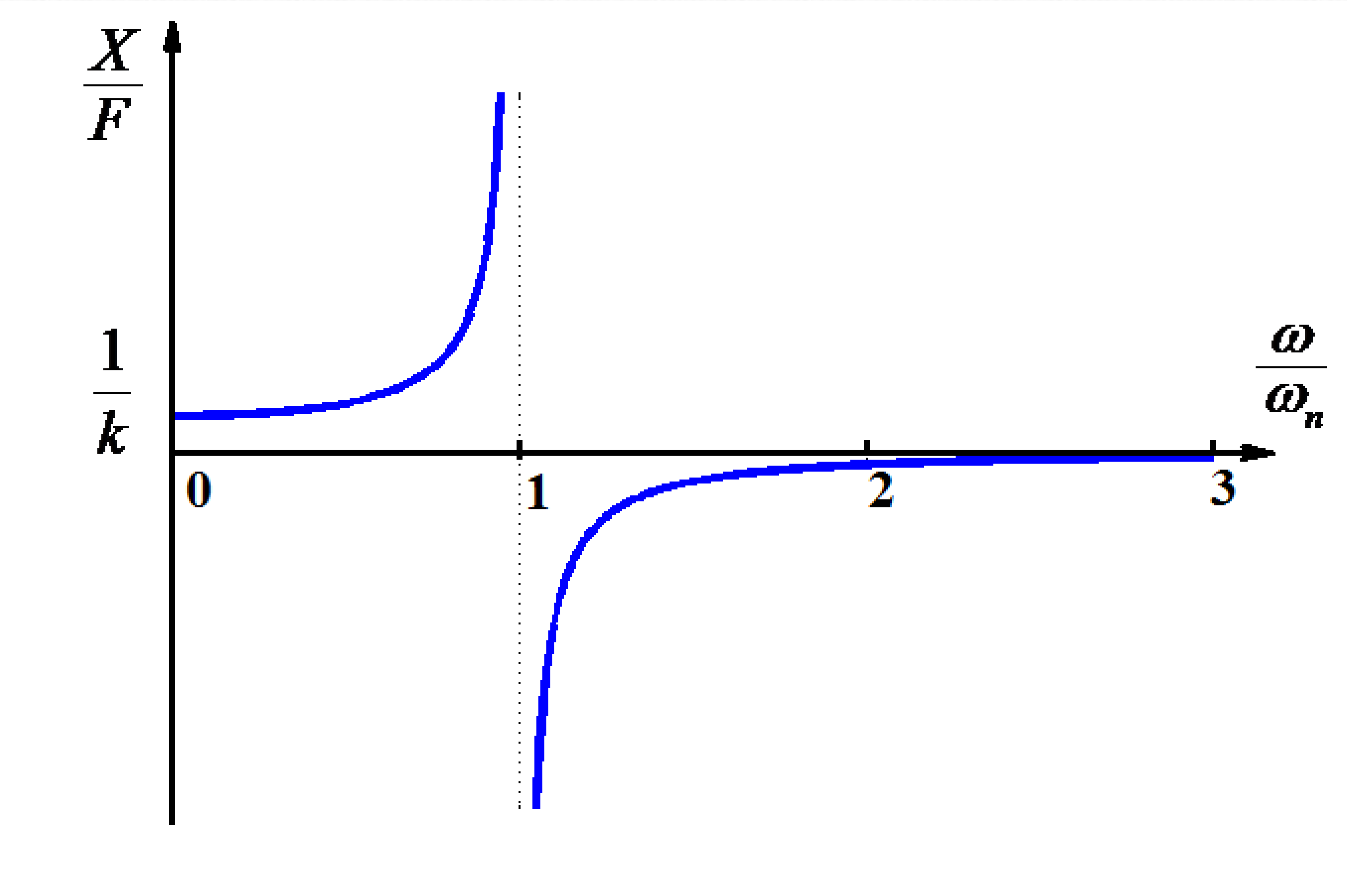
$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

برای حل همگن معادله، سمت راست معادله را باید برابر صفر در نظر بگیریم:

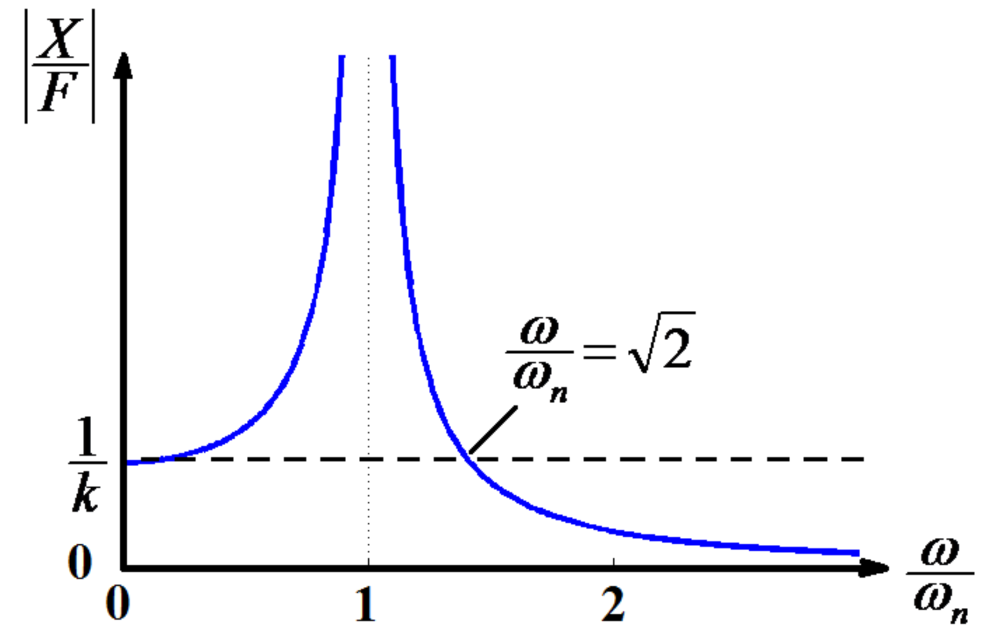
$$x_h(t) = A\sin(\omega_n t) + B\cos(\omega_n t), \quad \omega_n = \sqrt{k/m}$$

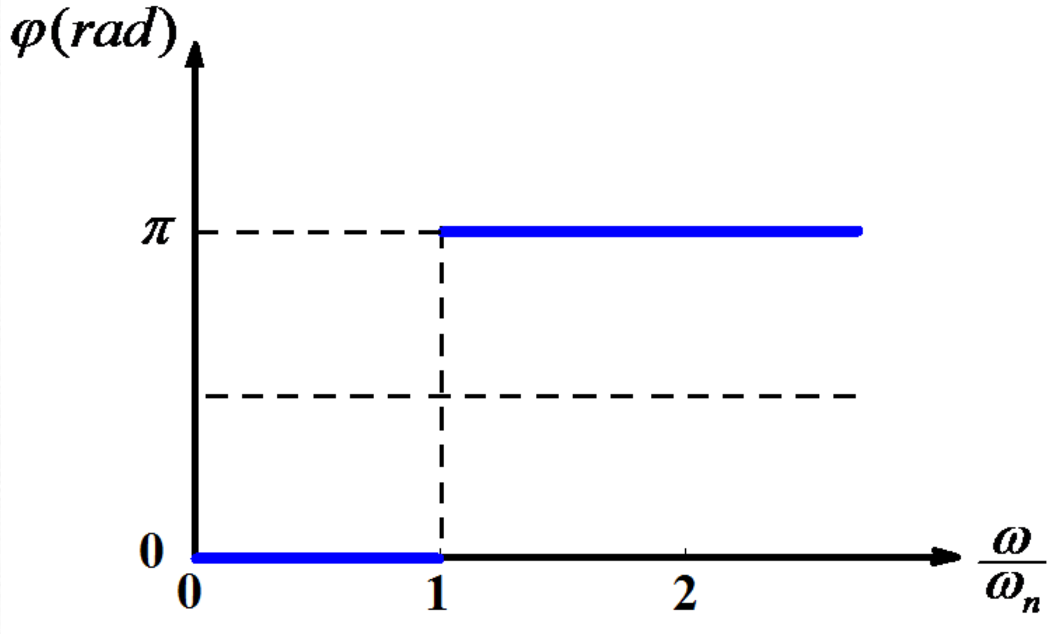
برای یافتن پاسخ غیرهمگن معادله یا حل خصوص آن، می‌توانیم با توجه به فیزیک مسأله، پاسخ را به صورت هارمونیک فرض نماییم زیرا انتظار می‌رود یک نیروی متناوب باعث یک جابجایی متناوب شود:

$$x_p(t) = X\cos(\omega t)$$



نسبت دامنه‌ی جابجایی به دامنه‌ی نیرو برای یک سیستم بدون میرایی





نسبت دامنه‌ی جابجایی به دامنه‌ی نیرو و اختلاف فاز بین نیرو و جابجایی برای یک سیستم بدون میرایی

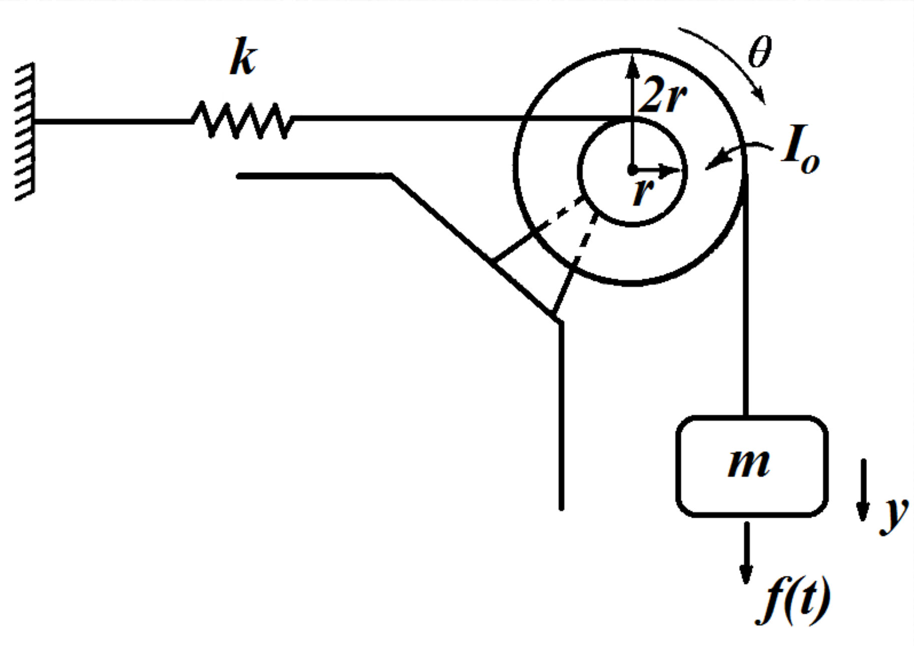
برای بدست آوردن پاسخ سیستم به تحریک هارمونیک، می‌توانیم نیرو و جابجایی را با استفاده از توابع نمایی تعریف نماییم:

$$f(t) = F\, e^{i\omega t}$$

$$x(t) = X\, e^{i\omega t}$$

که همان نتیجه قبلی را بدست می‌دهد.

مثال



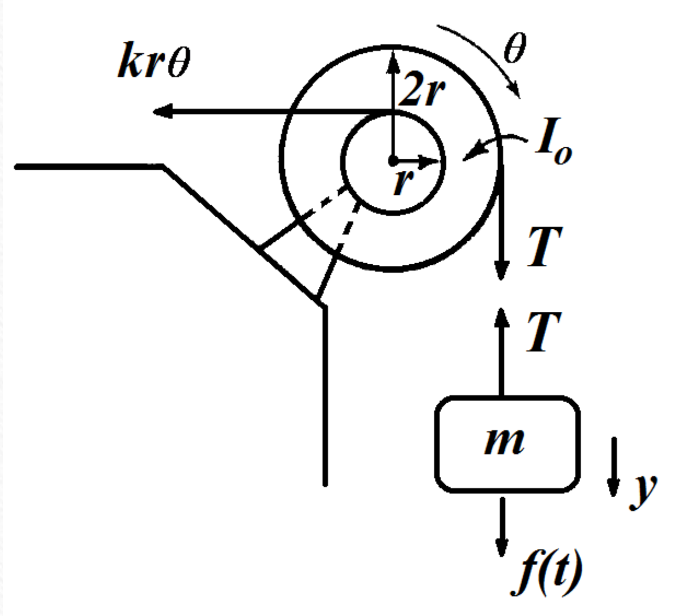
یک سیستم یک درجه آزادی را نشان می‌دهد که تحت تأثیر نیروی هارمونیک $f(t) = ۲\sin(\omega t)$ قرار گرفته است. فرکانس نوسان نیرو را به گونه‌ای تنظیم کنید که دامنه‌ی جابجایی وزنه برابر ۳ سانتیمتر باشد. فرض کنید:

$$m = 1kg, \qquad I_o = 0.01 kg.m^2,$$
$$r = 0.1m \qquad k = 100 N.$$

حل: معادله‌ی حرکت قرقره و جرم را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\sum M_o = I_o\ddot{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad -k(r\theta)(r) + T(۲r) = I_o\ddot{\theta} \qquad (I)$$

$$\sum F = ma \qquad \Rightarrow \qquad f(t) - T = m\ddot{y} \qquad (II)$$



با حذف نیروی کشش T و با بهره‌گیری از رابطه‌ی قیدی $y=2r\theta$ بدست می‌آید:

$$m_{eq}\ddot{y}+k_{eq}y=f(t)$$

برای حل همگن معادله، سمت راست معادله را باید برابر صفر در نظر بگیریم:

$$m_{eq}=m+I_o/۲r^{۲},\qquad k_{eq}=k/۲$$

بنابراین فرکانس طبیعی سیستم برابر است با

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}=\sqrt{\frac{۱۰۰/۲}{۱+\frac{۰{,}۰۱}{۲\times۰{,}۰۱}}}=۵{,}۷۷۴\,(rad/s)$$

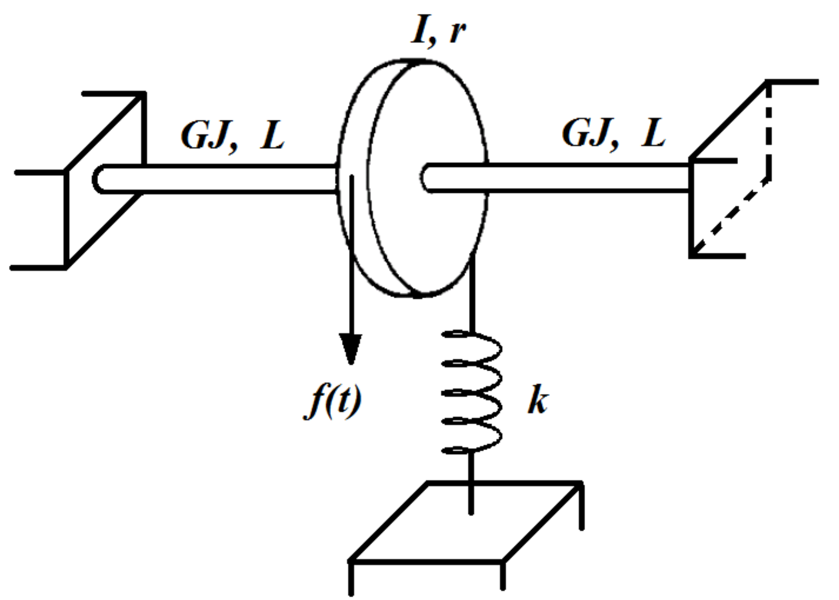
حال با استفاده از رابطه‌ی نسبت نیرو و جابجایی می‌توان نوشت:

$$|Y| = \left| \frac{F / k_{eq}}{۱ - (\omega / \omega_n)^۲} \right|$$

از آنجایی که دامنه‌ی جابجایی خواسته شده کمتر از جابجایی استاتیکی است ($Y < (F / k_{eq})$)، لزوماً باید $(\omega / \omega_n) > \sqrt{۲}$ باشد. در نتیجه رابطه‌ی بالا به شکل زیر ساده می‌شود:

$$\omega = \omega_n \sqrt{۱ + \frac{F}{k_{eq} Y}} = ۵{,}۷۷۴ \times \sqrt{۱ + \frac{۲}{۵۰ \times ۰{,}۰۳}} = ۸{,}۸۲ (rad / s)$$

مثال



مطابق شکل یک دیسک بر روی یک محور قرار گرفته است و یک نیروی هارمونیک به آن وارد می‌شود. پیش از آنکه فنر مارپیچ نشان داده شده به مجموعه وصل شود، فرکانس تحریک با فرکانس طبیعی پیچشی مجموعه برابر بوده است و با تحریک داده شده مجموعه دچار تشدید می‌گردید. حال می‌خواهیم با اضافه شدن این فنر مارپیچ، فرکانس طبیعی مجموعه به گونه‌ای تغییر کند که دامنه‌ی پیچش محور به حداکثر دو برابر زاویه‌ی پیچش استاتیکی آن محدود شود. سختی فنر باید چقدر باشد؟

حل: در این مسأله با افزوده شدن سختی مجموعه، فرکانس طبیعی آن نسبت به حالت قبل افزایش می‌یابد. در نتیجه فرکانس طبیعی بیشتر از فرکانس تحریک می گردد($(\omega/\omega_n)<۱$). در این حالت همواره دامنه‌ی جابجایی بزرگتر یا مساوی جابجایی استاتیکی خواهد بود.

با رسم دیاگرام آزاد دیسک و با استفاده از روش نیوتون می‌توان نشان داد که معادله‌ی حرکت سیستم در حالت کلی به شکل زیر است:

$$I\ddot{\theta}+(GJ/L+GJ/L+kr^{۲})\theta=r\times f(t)$$

در نتیجه با حضور فنر مارپیچ، فرکانس طبیعی سیستم برابر است با

$$\omega_n=\sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}=\sqrt{\frac{۲GJ/L+kr^{۲}}{I}} \qquad (I)$$

از آنجایی که فرکانس تحریک سیستم برابر است با فرکانس طبیعی سیستم در غیاب فنر مارپیچ، برای بدست آوردن فرکانس تحریک سیستم، در رابطه‌ی بالا سختی فنر را برابر صفر قرار می‌دهیم ($k = ۰$):

$$\omega = \omega_{n۰} = \sqrt{\frac{۲GJ/L}{I}} \qquad (II)$$

برای آنکه دامنه‌ی نوسان پیچشی کمتر از دو برابر دامنه‌ی پیچش استاتیکی باشد، باید داشته باشیم:

$$\left|\frac{\theta}{\theta_{st}}\right| = \left|\frac{۱}{۱-(\omega/\omega_n)^۲}\right| \le ۲$$

با توجه به آنکه فرکانس تحریک کوچکتر از فرکانس طبیعی است، از رابطه بالا نتیجه گرفته می شود:

$$\Rightarrow \qquad (\omega/\omega_n)^۲ \le ۱/۲ \qquad \Rightarrow \qquad \frac{۲GJ}{Lr^۲} \le k$$

پاسخ زمانی و پدیده‌ی ضربان

چنانکه گفته شد، پاسخ معادله حرکت از دو بخش همگن و غیر همگن تشکیل شده است که با جمع این دو، می‌توان پاسخ کلی سیستم یک درجه آزادی را به شرایط اولیه و تحریک هارمونیک بدست آورد:

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t)$$

$$= A\sin(\omega_n t) + B\cos(\omega_n t) + \frac{\left(F/k\right)}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\cos(\omega t)$$

با اعمال شرایط اولیه‌ی مسأله و تعیین ضرایب A و B، معادله‌ی فوق را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$x(t)=\frac{\dot{x}_{\circ}}{\omega_n}\sin(\omega_n t)+\left(x_{\circ}-\frac{\left(F/k\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{۲}}\right)\cos(\omega_n t)+\frac{\left(F/k\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{۲}}\cos(\omega t)$$

و یا

$$x(t)=\frac{\dot{x}_{\circ}}{\omega_n}\sin(\omega_n t)+x_{\circ}\cos(\omega_n t)+\frac{F}{k}\frac{\left(\cos(\omega t)-\cos(\omega_n t)\right)}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{۲}} \qquad (I)$$

در صورتی که سیستم از حالت سکون تحت بارگزاری قرار گرفته باشد، رابطه‌ی فوق به شکل زیر ساده می‌شود:

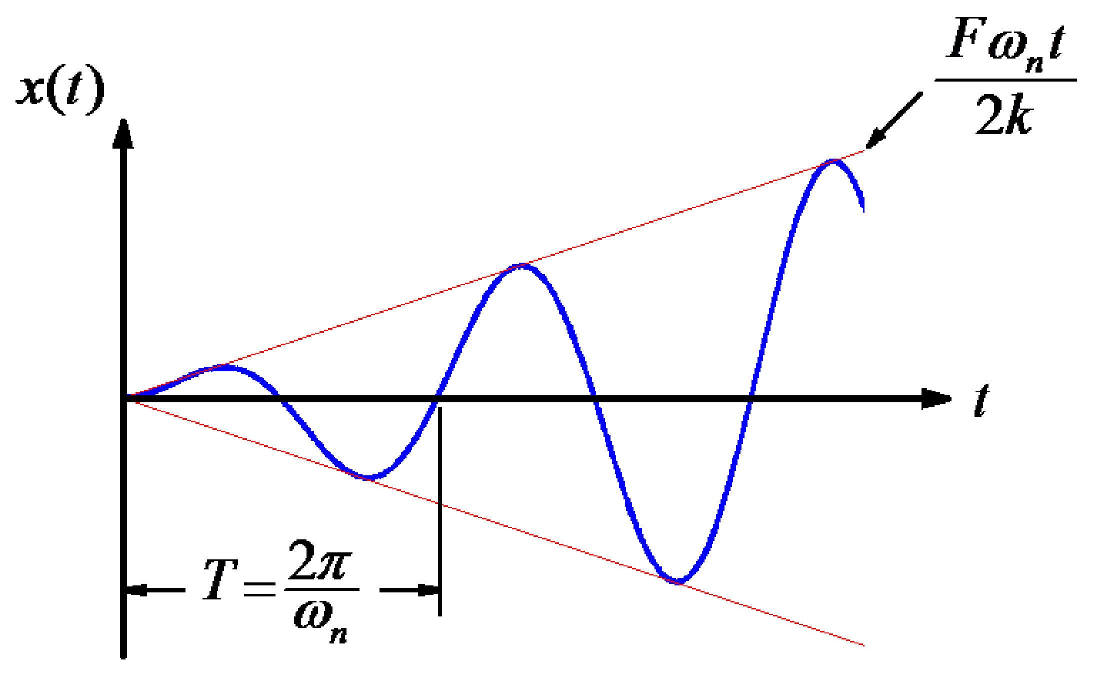
$$x(t)=\frac{F}{k}\frac{\left(\cos(\omega t)-\cos(\omega_n t)\right)}{۱-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{۲}} \qquad (II)$$

در فرکانس تحریک $\omega=\omega_n$ صورت و مخرج عبارت فوق به سمت صفر میل می‌نمایند و برای رفع ابهام می‌توان از قاعده هوپیتال استفاده کرد:

$$x(t)=\frac{F}{k}\lim_{\omega\to\omega_n}\frac{\left(\cos(\omega t)-\cos(\omega_n t)\right)}{۱-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{۲}}=\frac{F}{k}\lim_{\omega\to\omega_n}\frac{\frac{d}{d\omega}\left(\cos(\omega t)-\cos(\omega_n t)\right)}{\frac{d}{d\omega}\left(۱-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{۲}\right)}$$

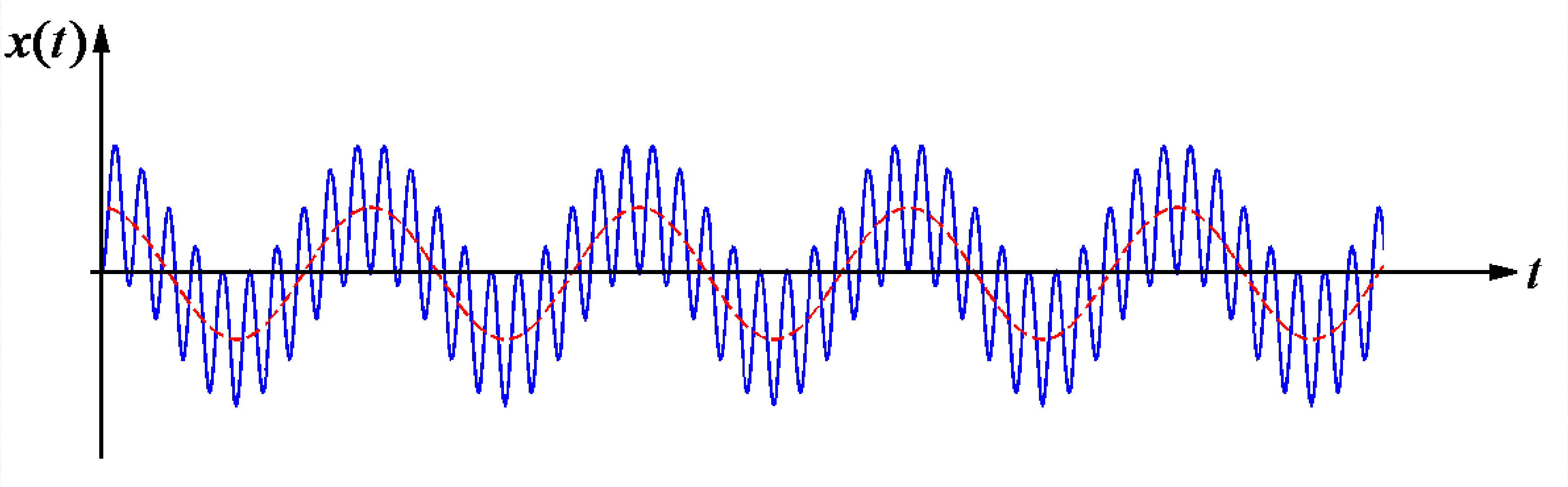
$$=\frac{F}{k}\left(\frac{\omega_n t}{۲}\sin(\omega_n t)\right) \qquad (III)$$

در رابطه‌ی بالا عبارت داخل پرانتز ناپایدار بوده و با افزایش زمان، دامنه‌ی حرکت به صورت خطی افزایش می‌یابد و به تدریج به سمت بی نهایت میل می‌کند. در این حالت تشدید یا رزونانس رخ می دهد.



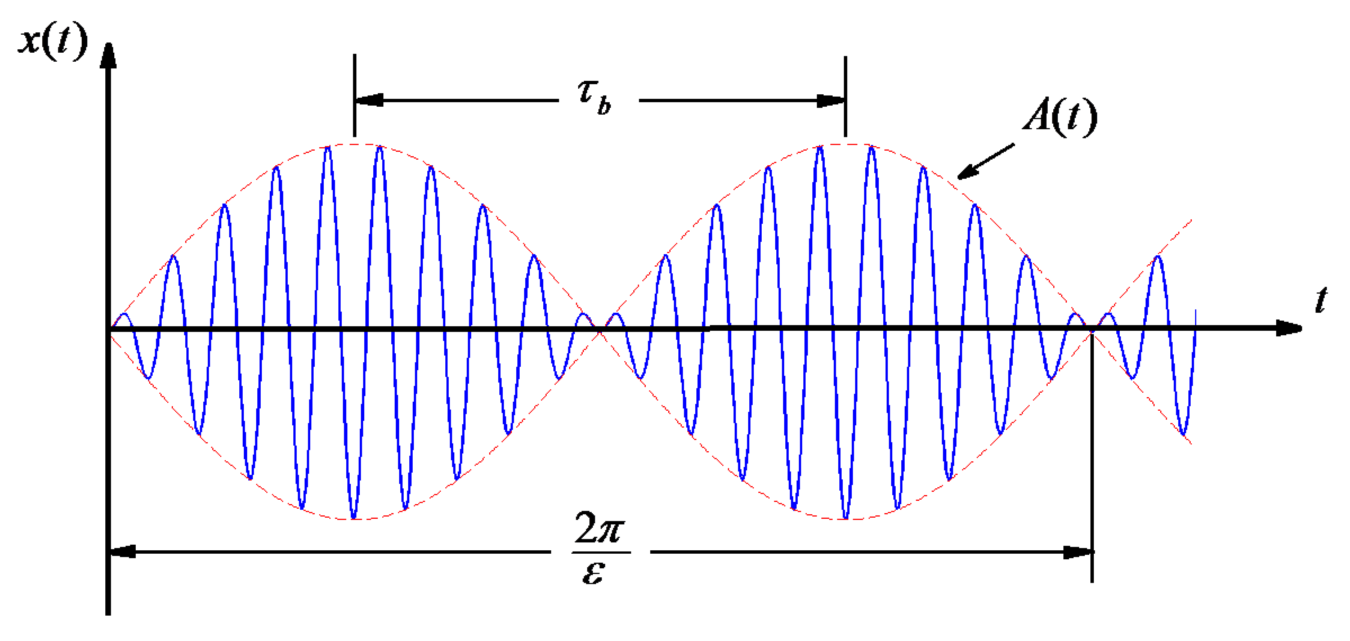
پاسخ سیستم برای حالت $\omega = \omega_n$

در فرکانس های تحریکی که به اندازه کافی از فرکانس طبیعی دور باشند، شکل ارتعاش پایدار بوده و مانند شکل زیر به صورت یک تابع هارمونیک آشفته دیده می‌شود. هنگامی که فرکانس تحریک به سمت بی‌نهایت میل می کند، عبارت (II) به سمت صفر میل می‌نماید و در غیاب شرایط اولیه ، دامنه‌ی نوسان بسیار ناچیز خواهد بود.



پاسخ سیستم برای حالت $\omega_n << \omega$

در فرکانس‌های تحریک نزدیک به فرکانس طبیعی، ارتعاش به صورت دیگری شکل می گیرد که آن را پدیده تپش و یا ضربان می‌نامند. در حالت ضربان، ارتعاش به شکل یک موج هارمونیک دیده می‌شود که دامنه‌ی نوسان آن به آرامی افزایش یافته تا به اوج خود برسد و سپس به سمت صفر میل می‌نماید و این روند به صورت متناوب تکرار می‌شود



پاسخ سیستم برای حالتی که ω و ω_n به هم نزدیک هستند

برای درک چگونگی رخ دادن این پدیده، معادله‌ی (II) را به شکل دیگری بازنویسی می‌کنیم. با استفاده از اصول توابع مثلثاتی، رابطه‌ی (II) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$x(t)=\frac{F}{k}\frac{\left(\cos(\omega t)-\cos(\omega_n t)\right)}{۱-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^۲}=\frac{۲F}{m(\omega^۲-\omega_n^۲)}\sin\left(\frac{\omega+\omega_n}{۲}t\right).\sin\left(\frac{\omega-\omega_n}{۲}t\right) \qquad (IV)$$

با فرض آنکه اختلاف بین فرکانس تحریک و فرکانس طبیعی مقدار کوچکی باشد

$$\omega-\omega_n=۲\varepsilon$$

بنابراین معادله (IV) به شکل زیر ساده می شود:

$$x(t)=\frac{F}{۲m\varepsilon\,\omega}\sin(\varepsilon t).\sin(\omega t)=A(t).\sin(\omega t)$$

در رابطه‌ی بدست آمده ضریب $\sin(\varepsilon t)$ $A(t)=\frac{F}{2m\varepsilon\omega}$ یک تابع هارمونیک است که در طول زمان و با سرعت بسیار کمی نوسان می‌نماید که دامنه‌ی نوسان آن با فرکانس کوچک ε برابر است.

برای یافتن زمان تناوب ضربان (فاصله‌ی زمانی بین دو پیک دامنه) می‌توان از شکل مربوطه بهره گرفت. با توجه به این شکل، زمان تناوب ضربان برابر است با نصف دوره‌ی تناوب تابع $\sin(\varepsilon t)$ ، یعنی

$$\tau_b=\left(\frac{2\pi}{\varepsilon}\right)/2=\frac{\pi}{\varepsilon}=\frac{2\pi}{\omega-\omega_n}$$

و در نتیجه فرکانس ضربان برابر است با

$$\omega_b=\frac{2\pi}{\tau_b}=2\varepsilon=\omega-\omega_n$$

پاسخ سیستم‌های میرا به تحریک هارمونیک

برای حالت با میرایی نیز می‌توانیم پاسخ معادله حرکت را به دو بخش همگن و غیر همگن تقسیم نماییم. حل همگن معادله‌ی حرکت، همان حل معادله‌ی ارتعاش آزاد با میرایی ویسکوز است:

$$x_h(t) = e^{-\xi\omega_n t}\left(A\sin(\omega_d t) + B\cos(\omega_d t)\right)$$

پاسخ همگن با گذشت زمان میرا شده و به سمت صفر میل می‌نماید. از این‌رو در بیشتر موارد آن را در نظر نمی‌گیریم و تنها به دنبال پاسخ پایدار (حل غیرهمگن) معادله هستیم که تابع نیروی هارمونیک است. برای بدست آوردن حل غیرهمگن معادله باز هم می‌توانیم نیروی هارمونیک را به صورت یک تابع مثلثاتی معرفی نماییم و در این صورت معادله حرکت به شکل زیر بدست می آید:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F\sin(\omega t)$$

در این حالت نیز می‌توان پیش‌بینی نمود که اعمال یک نیروی نوسانی با فرکانس ω، باعث نوسان سیستم با همان فرکانس خواهد شد:

$$x(t) = \bar{X} \sin(\omega t - \varphi)$$

در رابطه‌ی فوق ϕ تأخیر فاز پاسخ نسبت به نیرو را نشان می‌دهد که می‌تواند ناشی از اینرسی جسم و یا نیروی چسبندگی سیال درون میراکننده باشد.

با جایگذاری این حدس در معادله‌ی حرکت، خواهیم داشت:

$$-m\omega^2 \bar{X} \sin(\omega t - \varphi) + c\omega \bar{X} \cos(\omega t - \varphi) + k \bar{X} \sin(\omega t - \varphi) = F \sin(\omega t)$$

با بسط عبارت‌های مثلثاتی، رابطه‌ی بالا را به شکل زیر بازنویسی می کنیم:

$$\left[(k - m\omega^2)\cos(\varphi) + c\omega \sin(\varphi)\right]\bar{X} \sin(\omega t)$$
$$+\left[-(k - m\omega^2)\sin(\varphi) + c\omega \cos(\varphi)\right]\bar{X} \cos(\omega t) = F \sin(\omega t)$$

با مساوی قرار دادن ضرایب عبارت های سینوسی و کسینوسی از دو طرف معادله، بدست می‌آید:

$$\begin{cases} \left[(k - m\omega^{۲})\cos(\varphi) + c\omega\sin(\varphi)\right]\bar{X} = F, \\ \\ -(k - m\omega^{۲})\sin(\varphi) + c\omega\cos(\varphi) = ۰ \end{cases}$$

با توجه به رابطه‌ی دوم از معادله‌ی بدست می‌آید:

$$\tan(\varphi) = \frac{c\omega}{(k - m\omega^{۲})}$$

حال با استفاده از رابطه‌ی بالا و با بهره گیری از روابط مثلثاتی $\sin(\varphi) = \sqrt{۱ - \tan^{۲}(\varphi)}$ و $\cos(\varphi) = \sqrt{۱ + \tan^{۲}(\varphi)}$
رابطه‌ی اول از دستگاه معادلات بدست آمده نتیجه می دهد:

$$\frac{\bar{X}}{F} = \frac{۱}{\sqrt{(k - m\omega^{۲})^{۲} + (c\omega)^{۲}}}$$

حل معادله‌ی حرکت به کمک توابع مختلط

استفاده از توابع مثلثاتی برای توصیف توابع هارمونیک، حل معادله‌ی حرکت را تا حدودی دشوار و طولانی می‌نماید. مشکلات این روش با افزایش درجات آزادی بیشتر نیز می‌شود. از این رو ترجیح داده می‌شود از توابع نمایی با توان موهومی برای توصیف توابع هارمونیک استفاده شود.

فرض کنید برای توصیف نیروی هارمونیک از تابع نمایی زیر استفاده شود:

$$f(t) = F\, e^{i\omega t}$$

چون تابع تحریک هارمونیک است، می‌توان پیش‌بینی نمود که پاسخ معادله نیز هارمونیک است:

$$x(t) = X\, e^{i\omega t}, \qquad X = \bar{X}\, e^{-i\phi}$$

با جایگذاری روابط تعریف شده برای نیرو و جابجایی در معادله‌ی حرکت، بدست می‌آید:

$$\left[(k - m\omega^{۲}) + ic\omega\right] X\, e^{i\omega t} = F\, e^{i\omega t}$$

و در نتیجه

$$\frac{X}{F} = \frac{\bar{X}}{F} e^{-i\varphi} = \frac{۱}{(k - m\omega^{۲}) + ic\omega}$$

سمت دوم معادله که نسبت جابجایی به نیرو را نشان می‌دهد، پاسخ فرکانسی مختلط نامیده می‌شود:

$$H(\omega) = \frac{X}{F} = \frac{۱}{(k - m\omega^{۲}) + ic\omega}$$

ملاحظه می‌شود بکارگیری توابع نمایی مختلط می‌تواند با تبدیل معادلات دیفرانسیل خطی به معادلات جبری، رسیدن به پاسخ معادله را سریع‌تر و ساده‌تر نماید.

با استفاده از روابط $\omega_n = \sqrt{k/m}$ و $\xi = c/2\sqrt{k\,m}$ معادله‌های بدست آمده را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\tan\varphi = \frac{2\xi\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}, \qquad \frac{\bar{X}}{F} = \frac{1/k}{\sqrt{\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\,\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

ضریب بزرگنمایی به کمک رابطه‌ی بالا به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$M=\frac{\bar{X}}{\delta_{st}}=\frac{\bar{X}}{F/k}=\frac{۱}{\sqrt{\left(۱-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^۲\right)^۲+\left(۲\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^۲}}$$

برای یافتن فرکانس تشدید، باید از ضریب بزرگنمایی نسبت به فرکانس مشتق گرفت و برابر صفر قرار داد:

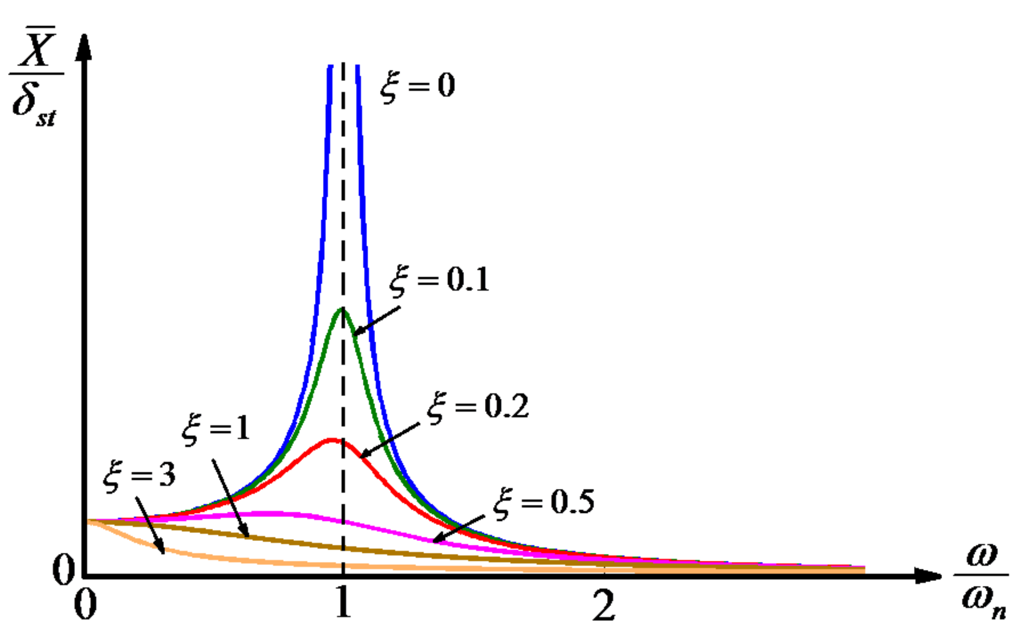
$$\frac{dM}{d\omega}=۰$$

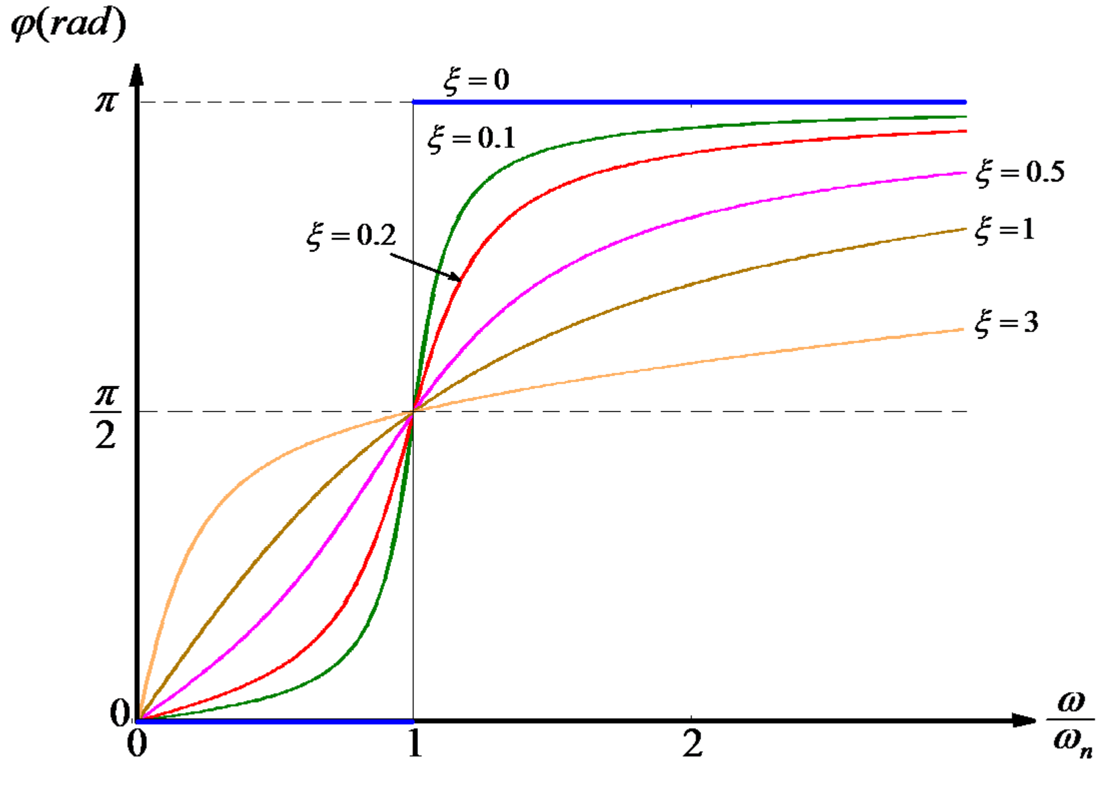
حل معادله‌ی بالا نشان می‌دهد که در مقادیر $\xi > \sqrt{1/2}$ ریشه‌ای وجود ندارد و در نتیجه تشدید اتفاق نمی‌افتد.
در مقادیر $0 < \xi < \sqrt{1/2}$ رابطه‌ی پیش گفته دارای ریشه است و تشدید در فرکانس زیر اتفاق می‌افتد:

$$\omega = \sqrt{1-2\xi^2}\,\omega_n$$

حداکثر دامنه‌ی نوسان که مربوط به فرکانس تشدید است، مساوی است با

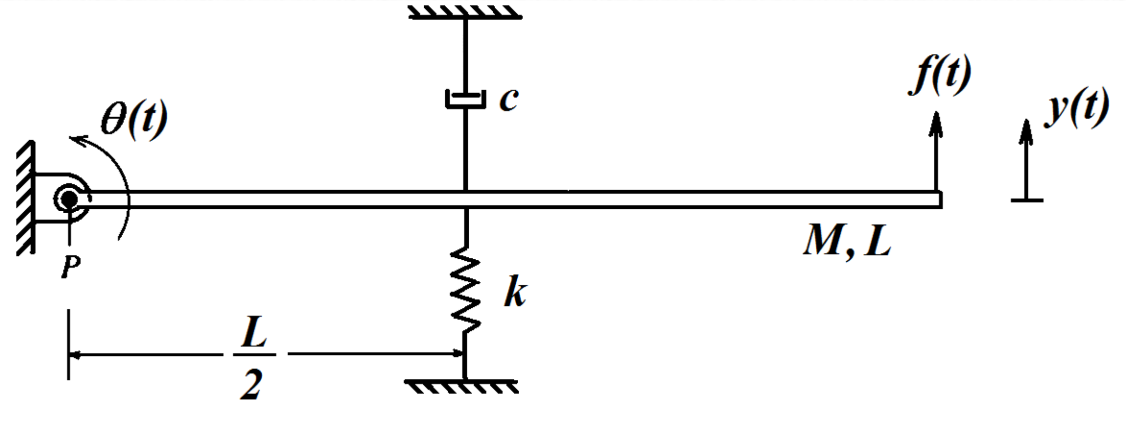
$$\left(\frac{\bar{X}}{\delta_{st}}\right)_{\max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$





پاسخ سیستم یک درجه آزادی به تحریک هارمونیک

مثال



شکل مقابل یک تیر یک سر لولا به طول $L = ۱\ m$ و جرم $m = ۳\ kg$ را نشان می‌دهد که به انتهای آزاد آن نیروی هارمونیک $f = ۰{,}۲ \sin(۵t)$ اعمال می‌شود و در وسط تیر به یک فنر با ضریب سختی $۱۰۰\ N/m$ و یک میراگر ویسکوز وصل شده است. اگر دامنه‌ی نوسان انتهای آزاد تیر برابر ۸ سانتیمتر باشد، ضریب میرایی میراگر را بدست آورید.

حل: با توجه به شکل داده شده، معادله‌ی حرکت را می‌توان به شکل زیر تعیین کرد:

$$(\frac{ML^2}{3})\ddot{\theta}+(\frac{cL^2}{4})\dot{\theta}+(\frac{kL^2}{4})\theta=L\times f\,(t)$$

رابطه‌ی فوق را با جایگذاری $y(t)=L\theta(t)$، می‌توان به شکل زیر بازنویسی نمود:

$$(\frac{M}{3})\ddot{y}+(\frac{c}{4})\dot{y}+(\frac{k}{4})y=f\,(t)$$

از طرفی با توجه به رابطه‌ی نسبت جابجایی به نیرو، داریم:

$$\frac{\bar{Y}}{F}=\frac{1}{\sqrt{(k_{eq}-m_{eq}\omega^2)^2+(c_{eq}\omega)^2}}$$

در نتیجه خواهیم داشت:

$$\frac{۰/۰۸}{۰/۲} = \frac{۱}{\sqrt{(\frac{۱۰۰}{۴} - \frac{۳}{۳} \times ۵^{۲})^{۲} + (\frac{c}{۴} \times ۵)^{۲}}} \quad \Rightarrow \quad c = ۱ N.s/m$$

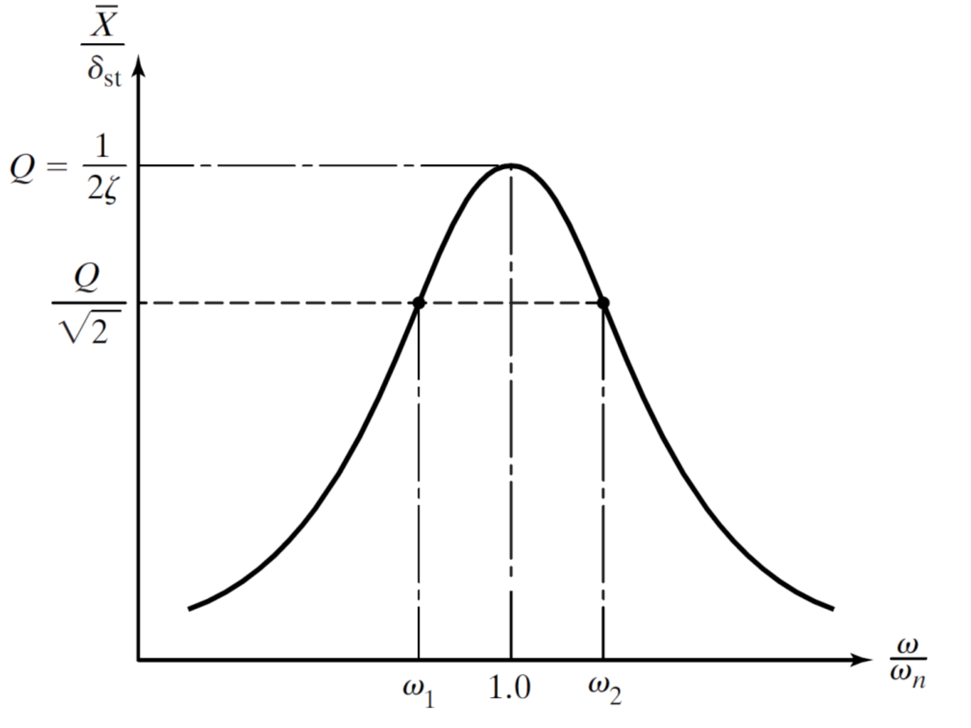
نسبت میرایی و نقاط نیم‌توان

هرچه نسبت میرایی بزرگتر باشد، حداکثر نسبت جابجایی (نسبت جابجایی در فرکانس تشدید) دارای مقدار کوچکتری خواهد بود. در مسائل عملی می‌توان با آزمایش، نسبت جابجایی را در فرکانس‌های مختلف بدست آورد و با تعیین فرکانس تشدید و جابجایی متناظر با آن، نسبت میرایی را از رابطه‌ی زیر استخراج کرد:

$$\left(\frac{\bar{X}}{\delta_{st}}\right)_{\max} = \frac{۱}{۲\xi\sqrt{۱-\xi^{۲}}}$$

اما در میرایی‌های کم، مقداری خطا در اندازه‌گیری و تعیین فرکانس تشدید، می‌تواند خطای قابل توجهی در نسبت میرایی ایجاد نماید. در عمل چون اندازه‌گیری‌های فرکانسی به صورت گسسته انجام می‌شوند، ممکن است فرکانس تشدید در میان اندازه‌گیری‌های ما قرار نگیرد و استفاده‌ی مستقیم از این رابطه چندان سودمند نیست.

برای محاسبه‌ی نسبت میرایی از روش دیگری استفاده می‌شود که با نام روش نقاط نیم‌توان شناخته می‌شود و دارای حساسیت کمتری نسبت به خطاهای اندازه‌گیری است. شکل زیر منحنی نسبت جابجایی را برای میرایی-های کوچک و در نزدیکی فرکانس تشدید نمایش می‌دهد. در این شکل حداکثر نسبت جابجایی را که به Q مشخص شده است، ضریب کیفیت می‌نامیم.



منحنی پاسخ فرکانسی و نقاط نیم‌توان

برای نسبت‌های میرایی کوچک، ضریب کیفیت مطابق زیر بدست می‌آید:

$$Q = \left(\frac{\bar{X}}{\delta_{st}} \right)_{\max} \approx \frac{۱}{۲\xi}$$

در منحنی پاسخ فرکانسی نقاطی را که در آنها نسبت جابجایی برابر $Q / \sqrt{۲}$ باشد، نقاط نیم‌توان می‌نامند. برای تعیین فرکانس‌های متناظر با نقاط نیم توان، نسبت جابجایی در نقاط نیم توان را در رابطه‌ی اصلی جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{\bar{X}}{\delta_{st}} = \frac{۱}{\sqrt{\left(۱-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^۲\right)^۲ + \left(۲\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^۲}} = \frac{Q}{\sqrt{۲}} = \frac{۱}{۲\sqrt{۲}\xi}$$

با حل رابطه‌ی بالا به جواب های زیر می‌رسیم:

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^۲ = \left(۱-۲\xi^۲\right) \pm ۲\xi\sqrt{۱-\xi^۲}$$

که برای نسبت‌های میرایی کوچک نتیجه می‌دهد

$$\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{۲} \approx ۱ \pm ۲\xi$$

در صورتی که فرکانس‌های نیم‌توان را با $\omega_۱$ و $\omega_۲$ نشان دهیم، و با توجه به آنکه $\omega_n \approx (\omega_۲ + \omega_۱)/۲$ است، از رابطه بالا بدست می‌آید:

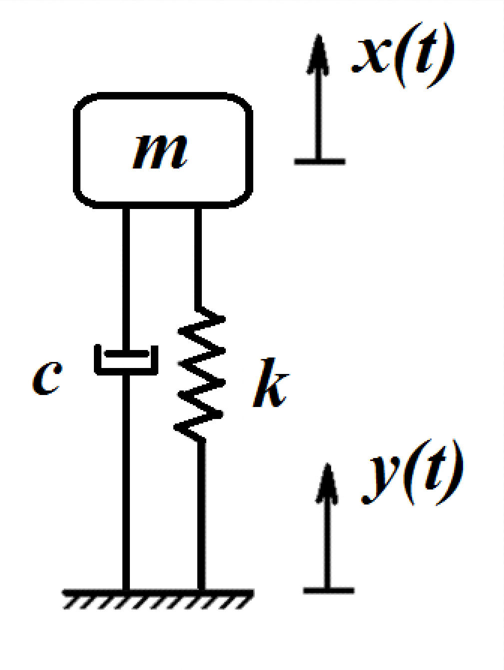
$$۴\xi = \frac{\omega_۲^۲ - \omega_۱^۲}{\omega_n^۲} \approx \frac{۲(\omega_۲ - \omega_۱)}{\omega_n}$$

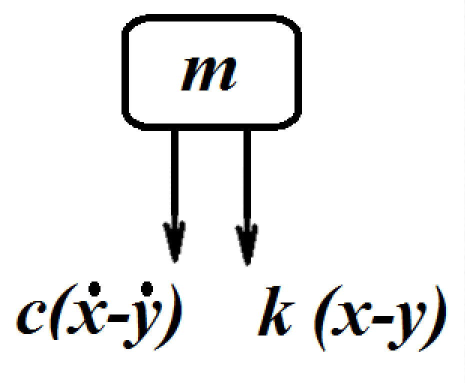
در نتیجه رابطه‌ی بین نسبت میرایی، ضریب کیفیت و فرکانس‌های نیم‌توان به شکل زیر در می‌آید:

$$Q \approx \frac{۱}{۲\xi} \approx \frac{\omega_n}{\omega_۲ - \omega_۱}$$

ارتعاشات پایه

بسیاری از اوقات دستگاه‌ها، ماشین‌آلات صنعتی، ابزارهای دقیق، خودروها و دیگر سیستم‌های مکانیک تحت تأثیر جابجایی‌های اجباری هستند که از سوی محیط پیرامونی و از طریق نواحی تکیه‌گاهی و یا پایه‌های سیستم به آنها منتقل می‌شود. این نوع از تحریک خارجی می‌تواند باعث اختلال در عملکرد دستگاه‌ها، کاهش دقت ماشین‌ابزارها، کاهش راحتی خودروها و .... شود.
برای مطالعه‌ی تأثیر جابجایی‌های پایه بر روی یک سیستم مکانیکی، یک مدل ساده یک درجه آزادی مانند شکل بعد را در نظر بگیرید که از یک جرم، یک فنر و یک میراکننده‌ی ویسکوز تشکیل شده است.





با توجه به شکل و با استفاده از قانون دوم نیوتون، معادله‌ی حرکت به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$m\ddot{x} = -c(\dot{x} - \dot{y}) - k(x - y)$$

با توجه به شکل و با استفاده از قانون دوم نیوتون، معادله‌ی حرکت به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$m\ddot{x} = -c(\dot{x} - \dot{y}) - k(x - y)$$

و در نتیجه

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = c\dot{y} + ky$$

رابطه‌ی فوق را می‌توان برحسب جابجایی نسبی بین جرم و پایه z(t)=x(t)-y(t) به شکل زیر نیز می توان نوشت:

$$m\ddot{z} + c\dot{z} + kz = -m\ddot{y}$$

با فرض اینکه حرکات پایه هارمونیک باشد، می‌توان از حل همگن معادله که با گذشت زمان میرا می‌شود، صرفنظر نمود و برای یافتن حل پایدار آن، جابجایی پایه را به صورت زیر در نظر گرفت:

$$y = Y e^{i\omega t}$$

می‌توان تصور نمود که جابجایی جرم نیز با همان فرکانس صورت گیرد:

$$x = X e^{i\omega t}$$

با استفاده از روابط بالا بدست می‌آید:

$$(-m\omega^{2} + i c\omega + k) X e^{i\omega t} = (i c\omega + k) Y e^{i\omega t}$$

و در نتیجه

$$\frac{X}{Y} = \frac{(i c\omega + k)}{(k - m\omega^{2}) + i c\omega}$$

با بهره‌گیری از روابط فوق می‌توان نسبت دامنه‌ی نوسان جرم به دامنه‌ی نوسان پایه و نیز تأخیر فاز نوسان جرم نسبت به پایه را مطابق زیر بدست آورد:

$$\left|\frac{X}{Y}\right| = \sqrt{\frac{k^{2} + (c\omega)^{2}}{(k - m\omega^{2})^{2} + (c\omega)^{2}}}, \qquad -\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{c\omega}{k - m\omega^{2}}\right)$$

روابط فوق را به شکل زیر نیز می‌توان بیان نمود:

$$\left|\frac{X}{Y}\right| = \sqrt{\frac{1 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{2}}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{2}\right)^{2} + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{2}}}, \qquad \varphi = -\tan^{-1}\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right) + \tan^{-1}\frac{\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{2}}$$

رابطه فوق را به شکل زیر نیز می‌توان بیان نمود:

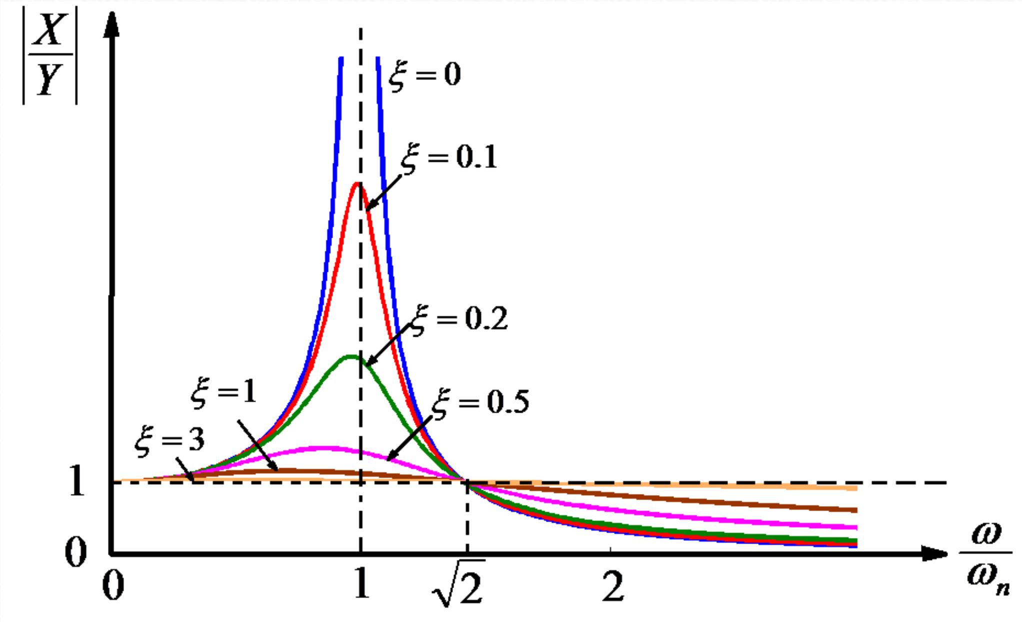
$$Z\,e^{i\omega t} = X\,e^{i\omega t} - Y\,e^{i\omega t}$$

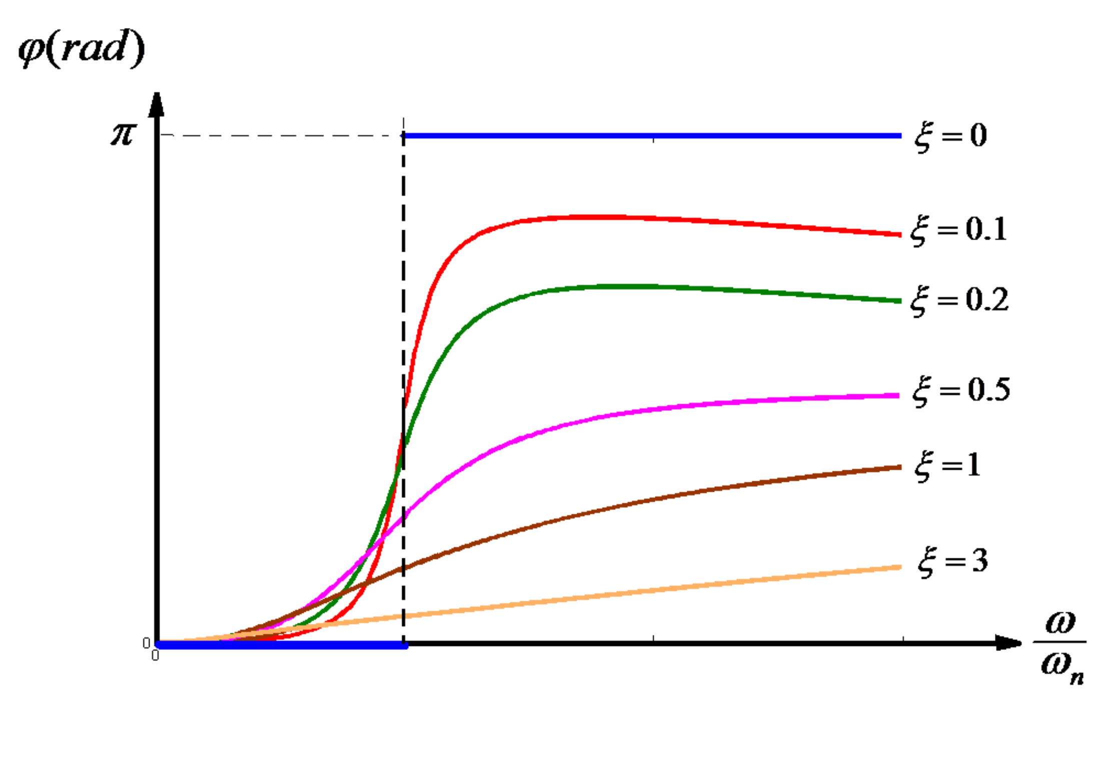
$$= \frac{k + i\,c\omega}{(k - m\,\omega^{۲}) + i\,c\omega} Y\,e^{i\omega t} - Y\,e^{i\omega t}$$

$$= \frac{m\,\omega^{۲} Y}{(k - m\,\omega^{۲}) + i\,c\omega} e^{i\omega t}$$

و بنابراین

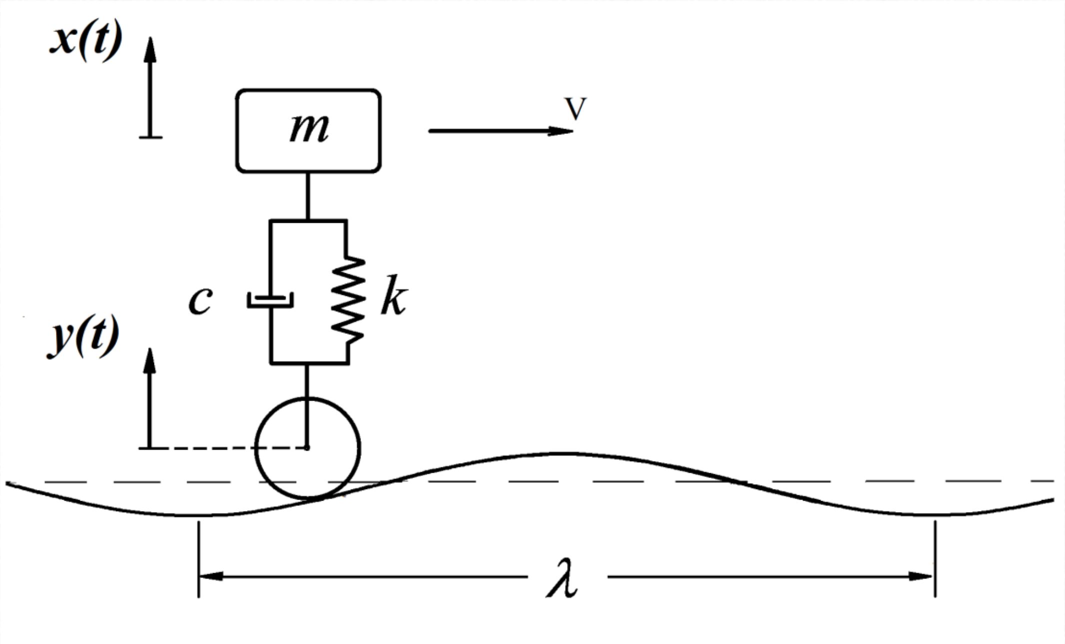
$$\left|\frac{Z}{Y}\right| = \frac{m\,\omega^{۲}}{\sqrt{(k - m\,\omega^{۲})^{۲} + (c\omega)^{۲}}} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{۲}}{\sqrt{\left(۱ - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{۲}\right)^{۲} + \left(۲\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{۲}}}$$





پاسخ سیستم یک درجه آزادی به تحریک هارمونیک پایه

مثال



شکل زیر یک مدل یک درجه آزادی از یک خودرو را نشان می‌دهد که با سرعت V بر روی یک سطح ناهموار به طول موج λ حرکت می‌کند. با فرض مشخص بودن جرم، سختی و ضریب میرایی خودرو، رابطه‌ی بین سرعت خودرو، دامنه‌ی نوسان خودرو، طول موج جاده و ارتفاع ناهمواری‌های جاده را بدست آورید.

حل: با توجه به شکل نشان داده شده می‌توان مسیر حرکت را به صورت یک موج سینوسی به شکل زیر در نظر گرفت:

$$y = Y \sin(\frac{2\pi}{\lambda} s + \varphi_0) \qquad (I)$$

از طرفی مسافت طی شده توسط خودرو را نیز می‌توان از رابطه‌ی زیر بدست آورد:

$$s = Vt \qquad (II)$$

بنابراین معادله‌ی جابجایی پایه خودرو بر حسب زمان مطابق زیر استخراج می گردد:

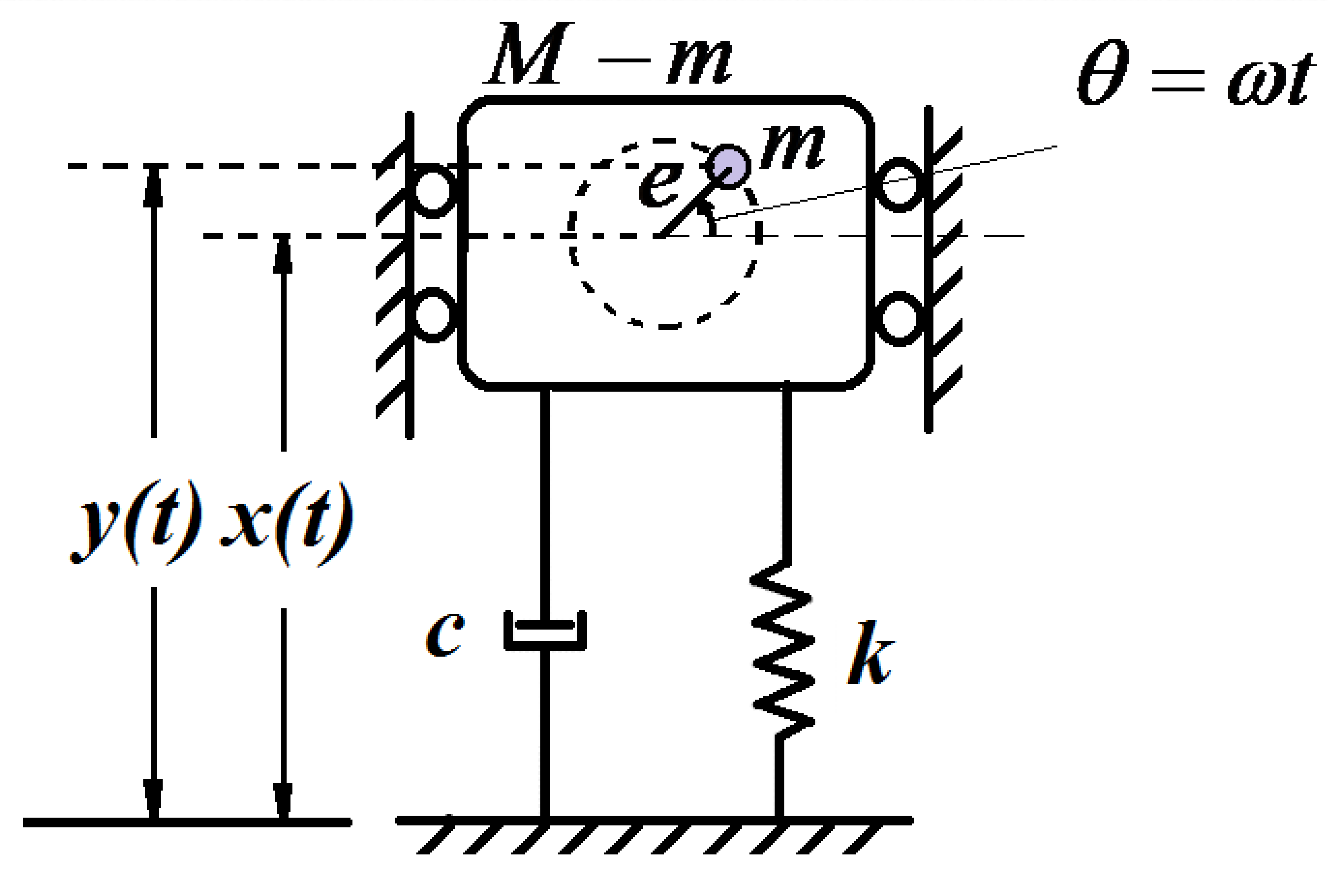
$$y = Y \sin(\frac{2\pi V}{\lambda} t + \varphi_0) \qquad (III)$$

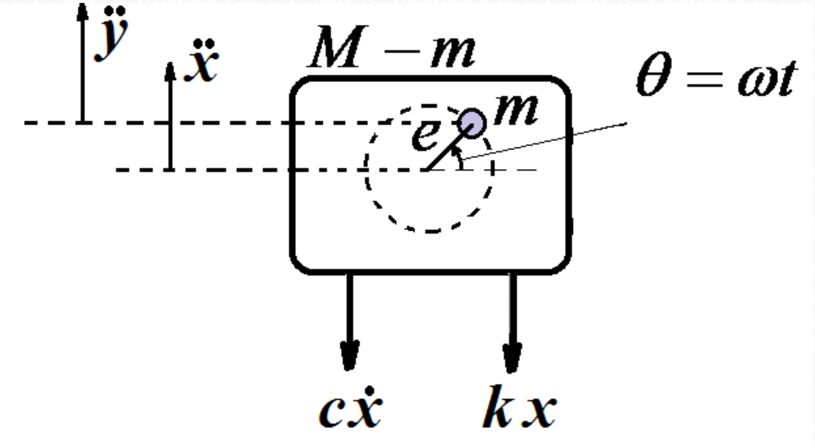
بنابراین پاسخ مسأله نیز از رابطه‌ی تحریک بدست می‌آید که در آن مقدار فرکانس تحریک پایه $\omega = 2\pi V / \lambda$ است.

نامیزانی چرخان

در بسیاری از ماشین آلات صنعتی، دستگاه از بخش‌های ثابت و دوار تشکیل شده است. برای کارکرد مناسب دستگاه، باید بخش‌های دوار آن بالانس (میزان) شوند تا موجب ارتعاش دستگاه نگردند. اما این کار همیشه نمی‌تواند به صورت کامل صورت گیرد و دستگاه‌ها همواره دارای مقداری نامیزانی هستند. این نامیزانی ممکن است ناشی از ساخت دستگاه بوده و یا اینکه در حین کار دستگاه به دلیل افتادن پیچ‌ها، شکست، سایش غیرمتقارن دستگاه و یا عوامل دیگر به وجود آید.

برای بررسی نامیزانی جرم‌های دوار بر ارتعاشات دستگاه، یک دستگاه را در نظر می‌گیریم که دارای جرم کلی M است و جرم بخش غیردوار آن برابر m می‌باشد. فرض می‌کنیم که مرکز جرم بخش دوار دارای خروج از مرکز e باشد و این بخش با سرعت زاویه‌ای ω دوران نماید.


$M-m$
$\theta=\omega t$
m
e
$y(t)$ $x(t)$
c
k



با استفاده از قانون دوم نیوتون برای کل مجموعه (پس از حذف نیروهای داخلی) می‌توان نوشت:

$$\sum F = (M - m) a_1 + m a_2$$

رابطه‌ی فوق را با استفاده از شکل می‌توان مطابق زیر نوشت:

$$(M - m)\ddot{x} + m\ddot{y} = -kx - c\dot{x}$$

از طرفی با توجه به شکل می‌دانیم که $y = x + e\sin(\omega t)$ است. بنابراین رابطه‌ی بالا به صورت زیر ساده می‌شود:

$$M\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = m\,e\,\omega^{2}\sin(\omega t)$$

با فرض نیروی نامیزانی به شکل $F = m\,e\,\omega^{2}$ معادله‌ی بالا را می‌توان مطابق زیر نوشت:

$$M\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = F\sin(\omega t)$$

پاسخ حالت پایدار این رابطه را می‌توان به شکل زیر فرض نمود:

$$x(t) = X\sin(\omega t - \varphi)$$

که نتیجه می‌دهد:

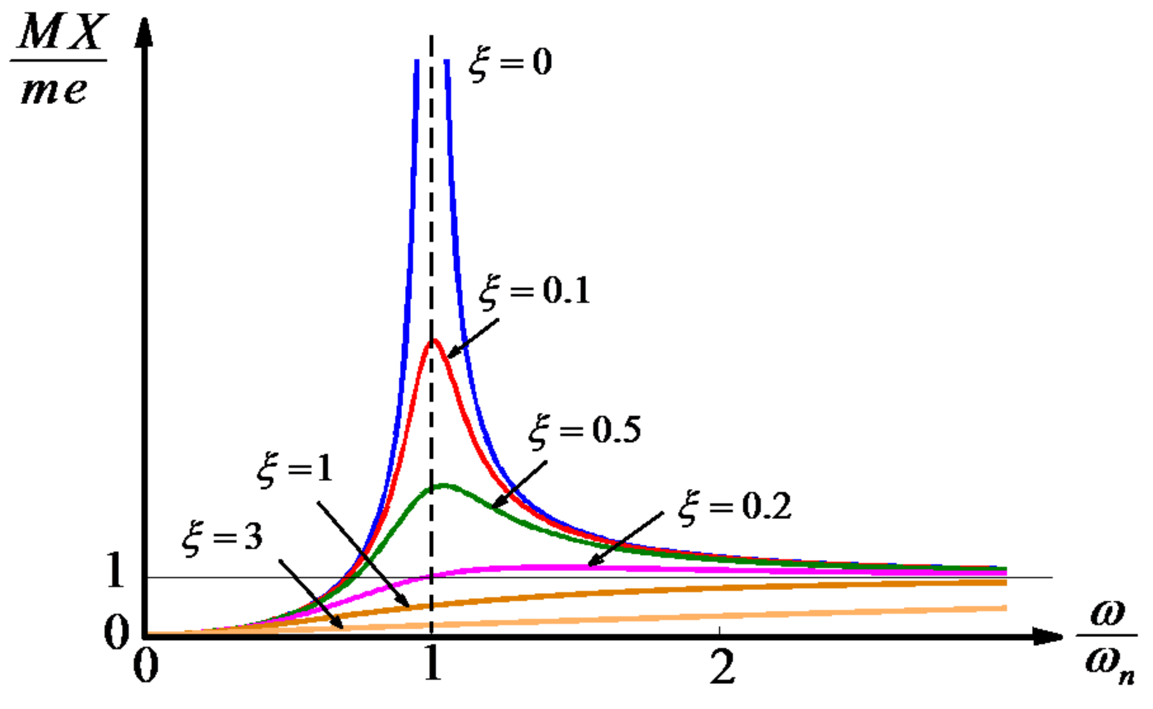
$$X = \frac{F}{\sqrt{(k - m\omega^{2})^{2} + (c\omega)^{2}}}, \qquad \tan(\varphi) = \frac{c\omega}{(k - m\omega^{2})}$$

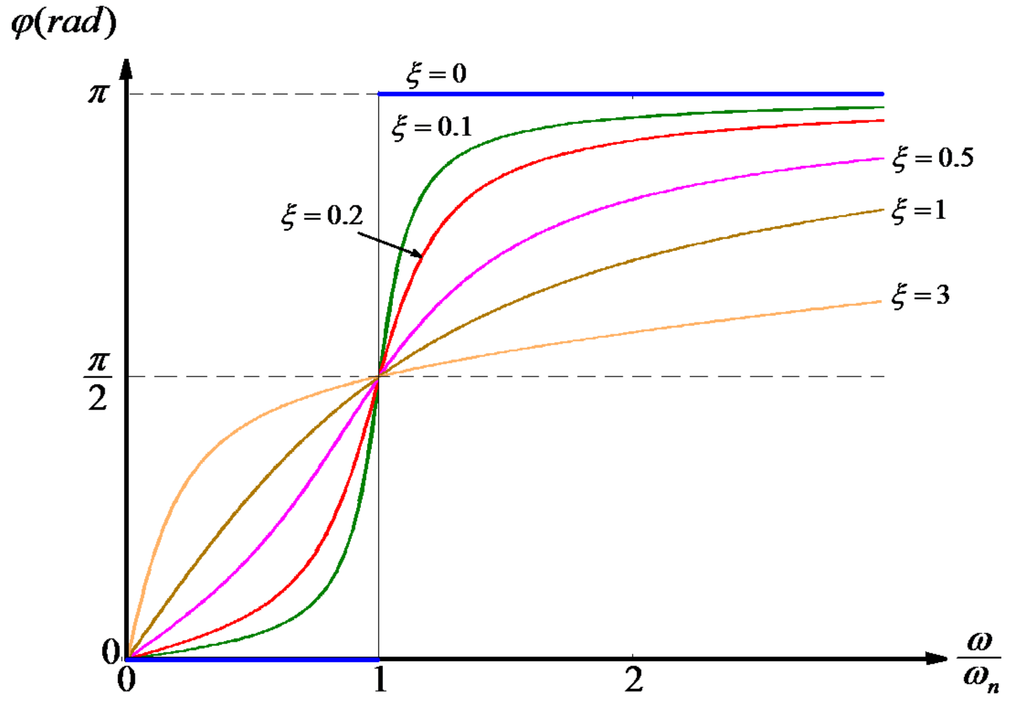
با جایگذاری $F = m e \omega^{۲}$ در روابط قبلی، و با در نظر داشتن روابط فرکانس طبیعی و نسبت میرایی بدست می‌آید:

$$\frac{M X}{m e} = \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{۲}}{\sqrt{\left(۱-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{۲}\right)^{۲} + \left(۲\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^{۲}}}$$

و

$$\tan\varphi = \frac{۲\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{۱-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{۲}}$$





پاسخ سیستم یک درجه آزادی به نامیزانی دوار

با توجه به شکل، در سرعت‌های دورانی بسیار بالا و در تمام مقادیر نسبت میرایی، دامنه‌ی ارتعاش به سمت مقدار ثابتی میل می‌نماید. در این حالت اختلاف فاز بین جابجایی بخش ثابت و بخش دوار نیز به سمت ۱۸۰ درجه میل می کند. این بدان معنی است که دو جسم در جهت عکس همدیگر حرکت می کنند و مرکز جرم دستگاه ثابت باقی می‌ماند. برای نشان دادن این موضوع از تعریف مرکز جرم استفاده می کنیم. فرض کنید مرکز جرم کل دستگاه با Z نشان داده شده باشد. با توجه به روابط مرکز جرم داریم:

$$z = \frac{(M-m)x + m y}{(M-m)+m} \qquad (I)$$

از طرفی داریم

$$y = x + e\sin(\omega t) \qquad (II)$$

و چون در سرعت‌های بسیار بالا $\varphi \to \pi$ می‌رود، پس

$$x = X\sin(\omega t - \varphi) = -X\sin(\omega t) \qquad (III)$$

با جایگذاری (II) و (III) در (I)، بدست می‌آید:

$$z = \frac{-M X \sin(\omega t) + m e \sin(\omega t)}{M}$$

در نهایت با توجه به آنکه در سرعت‌های بسیار بالا $M X / m e = ۱$ است، پس خواهیم داشت:

$$z = ۰$$

برای محدود کردن ارتعاش دستگاه می‌توان راهکارهای متفاوتی پیشنهاد نمود که عبارتند از:

۱- کاهش مقدار نامیزانی با بالانس کردن دستگاه و یا کاهش جرم بخش های دوار

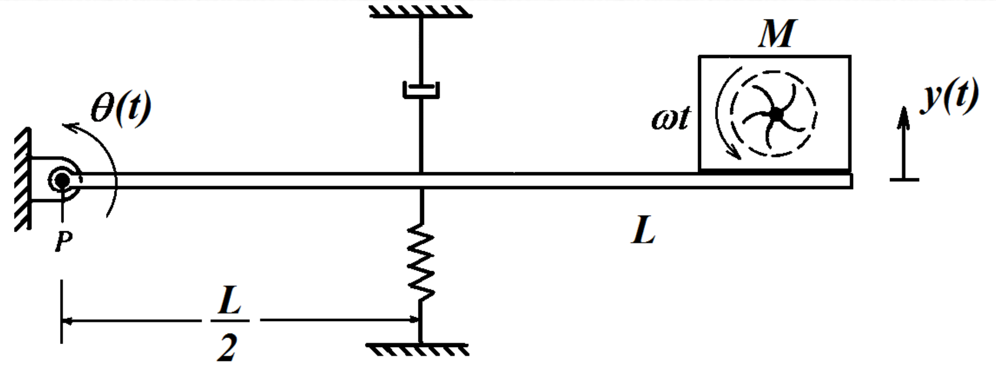
۲- دور کردن سرعت دوران دستگاه از فرکانس تشدید با افزایش یا کاهش سرعت دوران دستگاه

۳- دور کردن سرعت دوران دستگاه از فرکانس تشدید با تغییر فرکانس طبیعی دستگاه (افزایش یا کاهش سختی پایه‌های انعطاف‌پذیر دستگاه)

۴- افزایش نسبت میرایی (استفاده از میرا کننده های قوی تر در پایه دستگاه)

۵- افزایش جرم بخش غیردوار دستگاه

مثال



شکل مقابل یک تیر یک سر لولا به طول $L = ۱\,m$ و جرم $m = ۳\,kg$ را نشان می‌دهد که در وسط تیر به یک فنر با ضریب سختی $۱۰۰\,N/m$ و یک میراگر ویسکوز $c = ۵\,N.\sec/m$ وصل شده است. یک فن دوار به جرم $M = ۳\,kg$ در انتهای تیر قرار داده شده است که با سرعت زاویه‌ای $\omega = ۲\omega_n$ دوران می‌کند. اگر دامنه‌ی نوسان انتهای آزاد تیر برابر ۵ سانتیمتر باشد، مقدار نامیزانی فن را تعیین کنید.

حل: با توجه به شکل نشان داده شده، اثر فن انتهای تیر را می‌توان با شکل یک جرم متمرکز و یک نیروی هارمونیک که ناشی از نامیزانی است، در نظر گرفت. از این رو معادله‌ی حرکت مجموعه را می‌توان به شکل زیر استخراج کرد:

$$(\frac{mL^2}{3}+ML^2)\ddot{\theta}+\frac{cL^2}{4}\dot{\theta}+\frac{kL^2}{4}\theta=L\times me\omega^2\sin(\omega t)$$

و با استفاده از تبدیل $\theta(t)=y(t)/L$ خواهیم داشت:

$$m_{eq}\ddot{y}+c_{eq}\dot{y}+k_{eq}y=F\sin(\omega t),$$

که در آن

$$m_{eq}=(\frac{m}{3}+M)=4,\quad c_{eq}=\frac{c}{4}=1.25,\quad k_{eq}=\frac{k}{4}=25,\quad F=me\omega^2$$

با توجه به اطلاعات داده شده، نسبت میرایی سیستم برابر است با

$$\xi = \frac{c_{eq}}{۲\sqrt{k_{eq} m_{eq}}} = \frac{۱,۲۵}{۲\sqrt{۲۵ \times ۴}} = ۰,۰۶۲۵$$

حال با استفاده از رابطه‌ی مربوط به نامیزانی، بدست می‌آید:

$$\frac{۴ \times ۰,۰۵}{me} = \frac{۲^۲}{\sqrt{(۱-۲^۲)^۲ + (۲ \times ۰,۰۶۲۵ \times ۲)^۲}} = ۳,۰۱۰۴ \quad \Rightarrow \quad me = ۰,۰۶۶۴\, kg.m$$

جداسازی ارتعاشات

چنانکه در مباحث پیشین گفته شد، وجود دستگاه‌های مختلف در یک کارگاه صنعتی و ارتعاشات هریک از آنها می‌تواند بر عملکرد دیگر دستگاه ها تأثیر بگذارد، به این ترتیب که ارتعاشات یک دستگاه از طریق تکیه-گاه‌ها به زمین منتقل شده و باعث لرزش زمین می‌گردد و امواج لرزشی منتقل شده در سطح زمین نیز از طریق پایه‌های دیگر دستگاه ها به آنها منتقل می‌شود. چنین لرزش‌هایی نه تنها باعث اختلال در عملکرد دیگر دستگاه-ها می‌شوند، می‌توانند باعث اختلال در عملکرد اندام‌های داخلی کارگران حاضر در محیط کارگاه نیز بشوند.

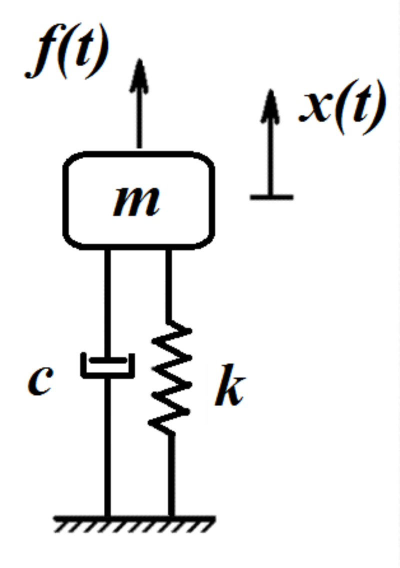
در مبحث جداسازی ارتعاشات دو هدف زیر تعریف می‌گردند:

۱- از طرف سیستم‌های ارتعاشی نیروی کوچکتری به پایه‌ها (زمین) منتقل شود.

۲- در صورت وجود لرزش در پایه‌ها (زمین) ارتعاش کمتری به دیگر دستگاه‌ها انتقال یابد.

نیروی انتقال یافته به زمین

فرض کنید مطابق شکل، به یک دستگاه نیروی هارمونیک خارجی $f(t) = F\, e^{i\omega t}$ وارد شود.



می‌دانیم جابجایی دستگاه هارمونیک بوده و از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$x(t) = X\, e^{i\omega t}, \qquad X = \frac{F}{(k - m\omega^{2}) + ic\omega}$$

بنابراین نیروی منتقل شده به زمین برابر است با

$$f_T(t) = c\dot{x} + kx = (ic\omega + k)\, X\, e^{i\omega t}$$

با فرض

$$f_T(t) = F_T\, e^{i\omega t}$$

دامنه نیروی انتقالی برابر است با

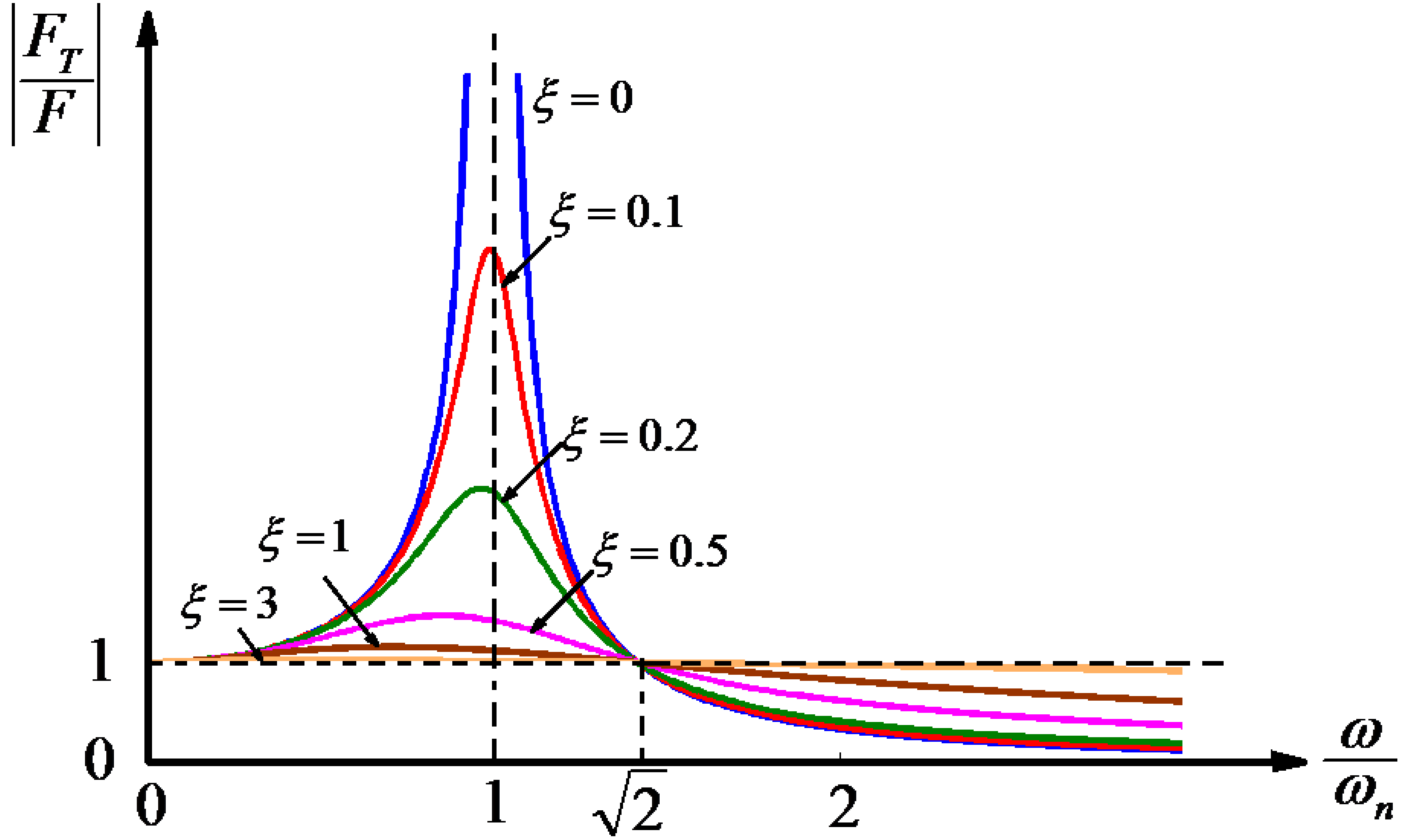
$$F_T = \frac{(ic\omega + k)F}{(k - m\omega^{2}) + ic\omega}$$

در نتیجه نسبت انتقال نیرو (نیروی انتقالی به نیروی خارجی) برابر است با

$$\left|\frac{F_T}{F}\right| = \frac{\sqrt{k^{۲} + (c\omega)^{۲}}}{\sqrt{(k - m\omega^{۲})^{۲} + (c\omega)^{۲}}} = \sqrt{\frac{۱ + \left(۲\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^{۲}}{\left(۱ - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{۲}\right)^{۲} + \left(۲\xi \frac{\omega}{\omega_n}\right)^{۲}}}$$

ملاحظه می‌گردد در فرکانس‌های $\sqrt{۲}\omega_n > \omega > ۰$ نیروی منتقل شده به زمین همواره بزرگتر از نیروی تحریک است، در این محدوده، افزایش نسبت میرایی باعث کاهش دامنه‌ی نیروی انتقالی می‌شود.

در فرکانس‌های $\sqrt{۲}\omega_n < \omega$ افزایش هر چه بیشتر فرکانس تحریک باعث کاهش دامنه نیروی انتقالی می‌شود. در این محدوده، افزایش نسبت میرایی باعث افزایش نیروی انتقالی می‌شود. باید توجه داشت کاهش مقدار میرایی باعث می‌شود که دامنه‌ی ارتعاش خود دستگاه افزایش یابد

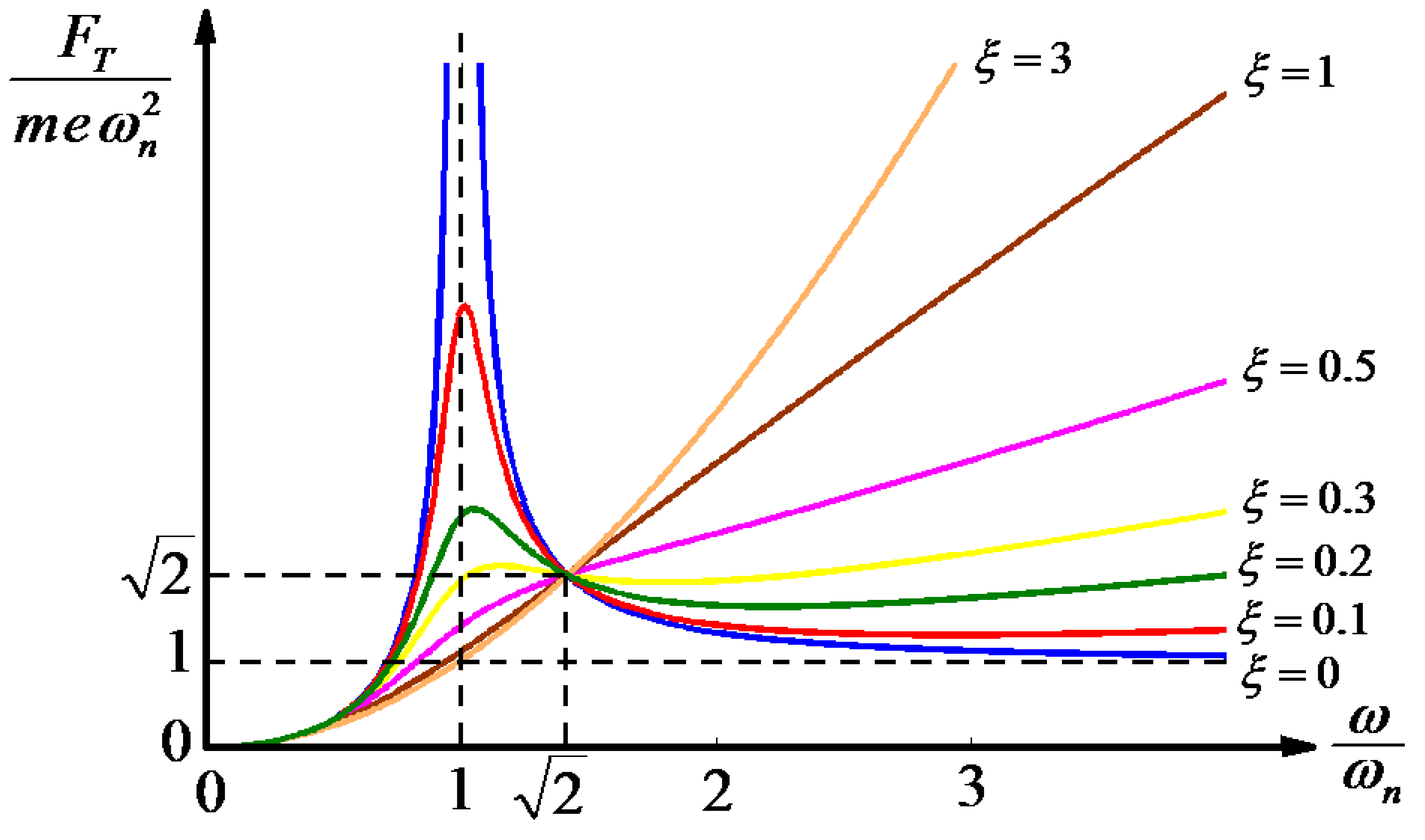


$\left|\frac{F_T}{F}\right|$
$\xi = 0$
$\xi = 0.1$
$\xi = 0.2$
$\xi = 0.5$
$\xi = 1$
$\xi = 3$
1
0
0
1
$\sqrt{2}$
2
$\frac{\omega}{\omega_n}$

اگر نیروی وارد شده به دستگاه ناشی از نامیزانی خود دستگاه باشد، دامنه‌ی نیروی ارتعاشی خود تابعی از سرعت دستگاه خواهد بود. دراین حالت:

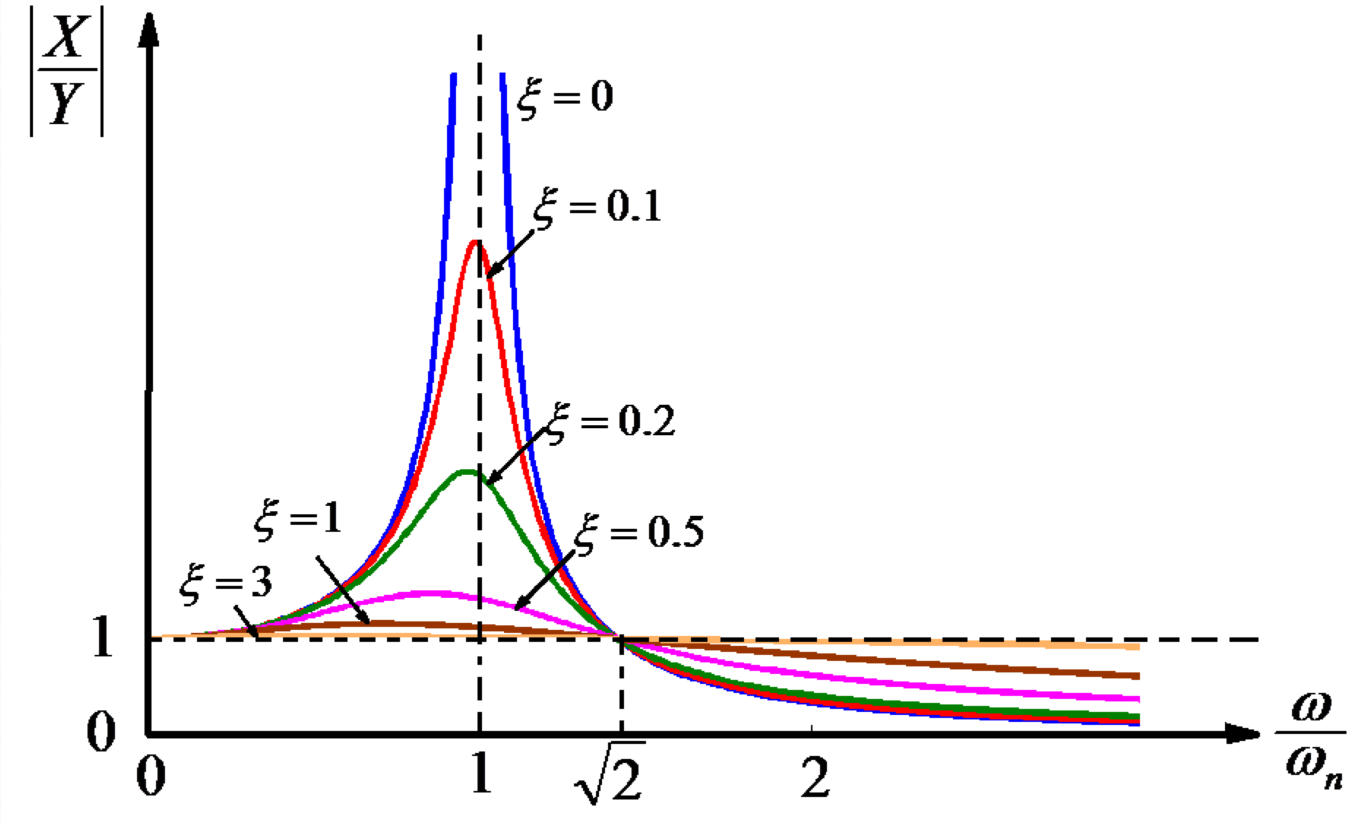
$$F_T = \frac{(i\,c\omega + k)\,m\,e\,\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}},$$

$$\left|\frac{F_T}{m\,e\,\omega_n^۲}\right| = \sqrt{\frac{1 + \left(۲\xi\,\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^۲}{\left(۱ - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^۲\right)^۲ + \left(۲\xi\,\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^۲}}\;\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^۲$$



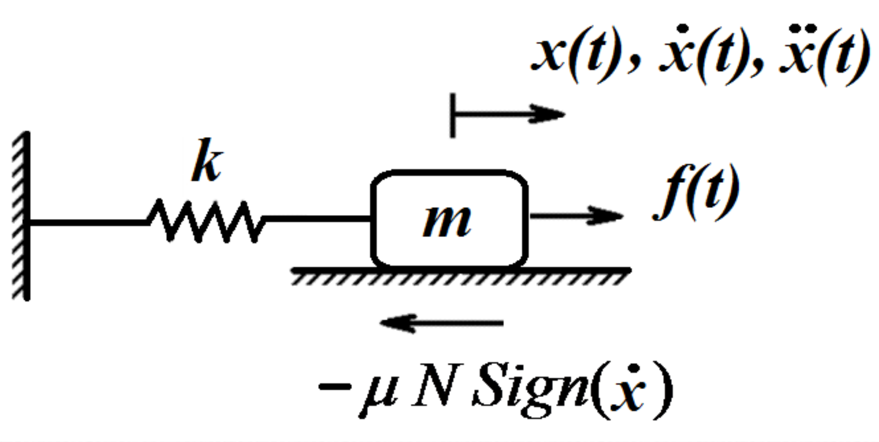
$\frac{F_T}{me\omega_n^2}$
$\xi = 3$
$\xi = 1$
$\xi = 0.5$
$\xi = 0.3$
$\xi = 0.2$
$\xi = 0.1$
$\xi = 0$
$\sqrt{2}$
1
0
0
1
$\sqrt{2}$
2
3
$\frac{\omega}{\omega_n}$

جابجایی انتقال یافته از پایه



تحریک هارمونیک سیستم‌های با میرایی کولمب

فرض کنید مطابق شکل، به یک یک سیستم ساده متشکل از یک جرم و فنر مطابق شکل نیروی هارمونیک خارجی $f(t) = F\, e^{i\omega t}$ وارد شود و ضریب اصطکاک سطح بین جرم و سطح لغزش مخالف صفر باشد.



با استفاده از قانون دوم نیوتون معادله‌ی حرکت را می‌توان مطابق زیر نوشت:

$$m\ddot{x} + k\,x + f_C = F\,e^{i\,\omega t}$$

که در آن

$$f_C = \begin{cases} -\mu\,N\,, & \dot{x} > 0 \\ +\mu\,N\,, & \dot{x} < 0 \end{cases}$$

اگر دامنه‌ی نیروی به اندازه‌ی کافی از نیروی اصطکاک بزرگتر باشد، حرکت جرم تقریباً به صورت هارمونیک پایدار خواهد بود و در غیر این صورت حرکت جرم به صورت گسسته می‌باشد. با فرض بزرگ بودن دامنه نیرو، فرض می‌کنیم جابجایی نیز هارمونیک بوده و از رابطه‌ی زیر تبعیت نماید:

$$x(t) = X\,e^{i(\omega t-\varphi)}$$

حال برای نیروی میراکننده‌ی اصطکاکی، یک میرایی ویسکوز معادل قرار دهیم. می‌دانیم در یک سیکل ارتعاشی انرژی مستهلک شده توسط میرایی کولمب برابر است با

$$W_d = ۴\mu_k N X$$

همچنین انرژی مستهلک شده توسط میرایی ویسکوز برابر است با

$$W_d = \pi c \omega X^۲$$

با مساوی قرار دادن دو عبارت فوق، میرایی ویسکوز معادل برابر خواهد بود با

$$c_{eq} = \frac{۴\mu_k N}{\pi \omega X}$$

با جایگذاری عبارت فوق در معادله‌ی حرکت و پس از ساده سازی، بدست می‌آید:

$$(-m\omega^۲ + k)X + i\frac{۴\mu N}{\pi} = F e^{i\varphi}$$

و در نتیجه

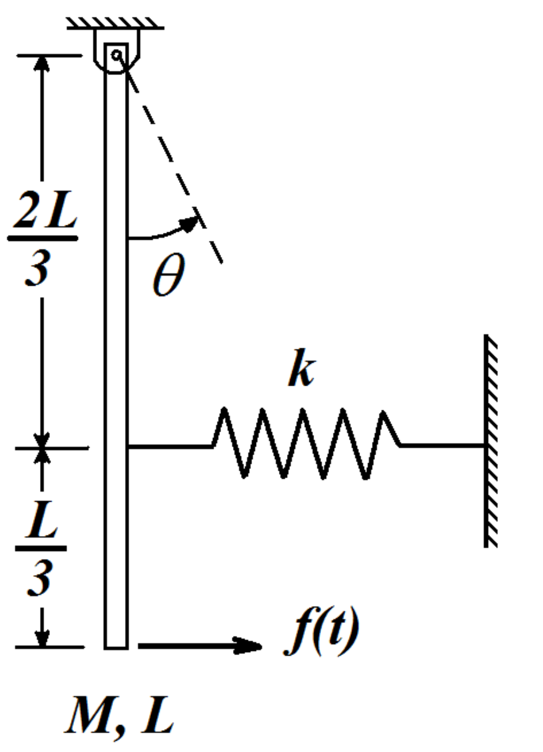
$$(k - m\omega^{۲})X = F\cos(\varphi) + i\left(F\sin(\varphi) - \frac{۴\mu N}{\pi}\right)$$

با حل معادله‌ی فوق برای قسمت‌های موهومی و حقیقی، و با بهره‌گیری از رابطه‌ی $\cos(\varphi) = \sqrt{۱ - \sin^{۲}(\varphi)}$ بدست می آید:

$$\frac{X}{F} = \sqrt{\frac{۱ - \left(\frac{۴\mu N}{\pi F}\right)^{۲}}{\left(۱ - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^{۲}\right)^{۲}}}, \qquad \varphi = \sin^{-۱}\left(\frac{۴\mu N}{\pi F}\right)$$

از آنجایی که دامنه‌ی ارتعاش همواره یک عدد حقیقی است، باید $F > \frac{۴\mu N}{\pi}$ باشد تا فرض پاسخ هارمونیک برقرار باشد.

مثال



مطابق شکل یک تیر یک سر لولا به یک فنر مارپیچ وصل شده است و به انتهای دیگر آن نیروی هارمونیک $f(t)=F\,e^{i\omega t}$ اعمال می‌شود. فرض کنید لولا روغن‌کاری نشده باشد و بین پین و لولا اصطکاک خشک وجود داشته باشد. اگر شعاع پین برابر r و ضریب اصطکاک سطوح تماس برابر μ_k باشد، دامنه‌ی ارتعاشات تیر را بدست آورید (فرض کنید زاویه ارتعاش کوچک باشد).

حل: ابتدا گشتاور نیروی اصطکاکی را در محل لولا محاسبه می‌کنیم. با توجه به آنکه شعاع پین برابر r و نیروی عمودی سطح برابر $N=Mg$ است (از نیروی جانب مرکز صرفنظر شده است)، گشتاور نیروی اصطکاکی برابر خواهد بود با

$$M_f = -\mu(Mg)r\,sign(\dot{\theta})$$

بنابراین کار نیروی اصطکاک در تکیه‌گاه در یک سیکل ارتعاشی ($\theta = \bar{\theta}e^{i(\omega t-\varphi)}$) برابر است با

$$W_d = ۴\mu(Mg)r\bar{\theta}$$

در نتیجه معادله‌ی دیفرانسیل حرکت به شکل زیر بدست می‌آید:

$$m_{eq}\ddot{\theta} + c_{eq}\dot{\theta} + k_{eq}\theta = F_{eq}e^{i\omega t}$$

که در آن

$$m_{eq} = \frac{ML^۲}{۳}, \quad k_{eq} = \left(\frac{MgL}{۲} + \frac{۴kL^۲}{۹}\right), \quad c_{eq} = \frac{W_d}{\pi\omega\bar{\theta}^۲} = \frac{۴\mu Mgr}{\pi\omega\bar{\theta}}, \quad F_{eq} = FL$$

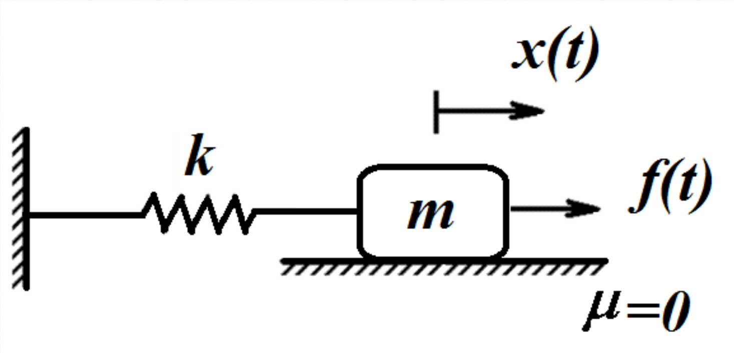
حال می توان نشان داد

$$\frac{\bar{\theta}}{FL} = \sqrt{\frac{۱ - \left(\frac{۴\mu Mgr}{\pi FL}\right)^۲}{\left(۱ - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^۲\right)^۲}}, \qquad \omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}}$$

تحریک هارمونیک سیستم‌های با میرایی هیسترزیس (سازه‌ای)

چنانکه در فصل سوم دیدیم، می‌توان برای منظور نمودن میرایی سازه‌ای در معادلات حرکت، از میرایی ویسکوز معادل ($c_{eq} = \alpha /(\pi \omega)$) بهره برد. به عنوان مثال یک جرم و فنر مطابق شکل زیر را در نظر بگیرید که به آن نیروی هارمونیک $f(t)$ وارد می‌شود. با استفاده از قانون دوم نیوتون، معادله‌ی حرکت این سیستم به صورت زیر استخراج می‌شود:

$$m\ddot{x} + k\,x = f(t)$$



برای منظور نمودن اثر میرایی سازه‌ای درون فنر، یک میرایی ویسکوزِ معادل به رابطه‌ی فوق اضافه می‌کنیم:

$$m\ddot{x} + c_{eq}\,\dot{x} + k\,x = f(t)$$

فرض کنید نیروی هارمونیک را با استفاده از تابع نمایی به صورت زیر معرفی نماییم:

$$f(t) = F\,e^{i\omega t}$$

در این صورت می‌توان جابجایی جرم را نیز به صورت هارمونیک حدس زد:

$$x(t) = X\,e^{i\omega t}$$

با جایگذاری نیرو و جابجایی در در معادله‌ی حرکت، بدست می‌آید:

$$(-m\,\omega^{۲} + i\,\omega c_{eq} + k\,)Xe^{i\,\omega t} = F\,e^{i\,\omega t}$$

سختی مختلط

رابطه‌ی قبلی را می توان به شکل زیر نوشت:

$$(-m\omega^{۲}+i\frac{\alpha}{\pi}+k)X e^{i\omega t}=F e^{i\omega t}$$

در رابطه‌ی بالا ملاحظه می‌شود که عبارت $\frac{\alpha}{\pi}$ همانند یک سختی موهومی در معادله‌ی مشخصه ظاهر شده است. با فرض تعریف ضریب میرایی سازه‌ایی $\eta=\frac{\alpha}{\pi k}$، می‌توان معادله‌ی بالا را به صورت زیر نوشت:

$$(-m\omega^{۲}+k(۱+i\eta))X e^{i\omega t}=F e^{i\omega t}$$

در رابطه‌ی فوق عبارت $k(1+i\eta)$ را سختی مختلط می‌نامند که در آن k و η هر دو تابعی از رفتار ماده هستند و به ترتیب به سختی ماده و رفتار الاستیک-پلاستیک آن بستگی دارند.

رابطه‌ی بین ضریب میرایی سازه‌ای و نسبت میرایی سازه‌ای به شکل زیر است:

$$\beta \approx \frac{\alpha}{۲\pi k} = \frac{\eta}{۲}$$

حال رابطه‌ی بین دامنه نیرو و جابجایی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{X}{F} = \frac{۱}{(k - m\omega^{۲}) + i\eta k}$$

با تعریف $\delta_{st} = F/k$ معادله‌ی فوق را می‌توان مطابق زیر بازنویسی کرد:

$$\frac{X}{\delta_{st}} = \frac{۱}{\left(۱-(\omega/\omega_n)^{۲}\right) + i\eta}$$

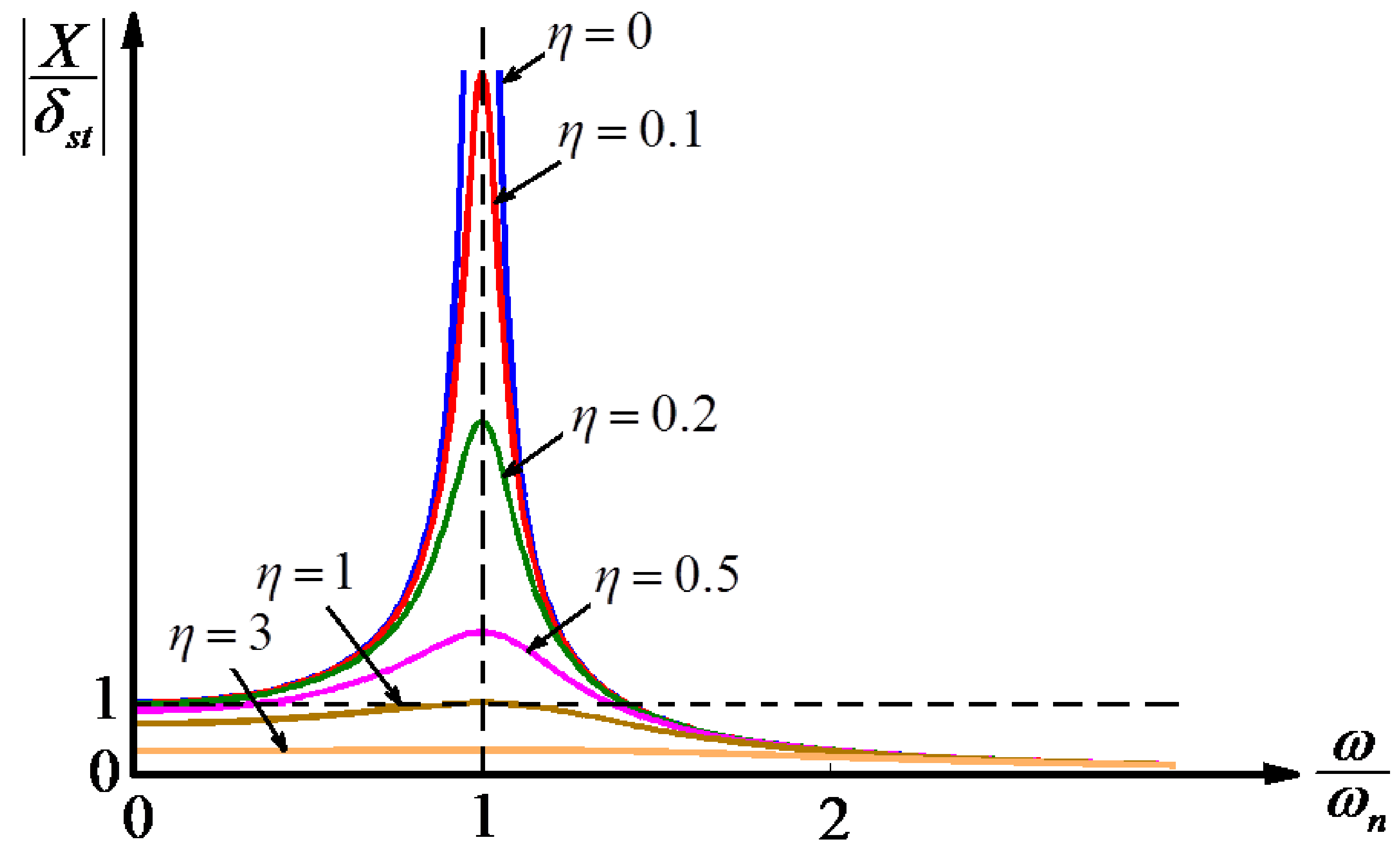
حال با تعریف

$$X = \bar{X}\, e^{-i\varphi}$$

دامنه جابجایی و اختلاف فاز بین نیرو و جابجایی را مطابق زیر استخراج می کنیم:

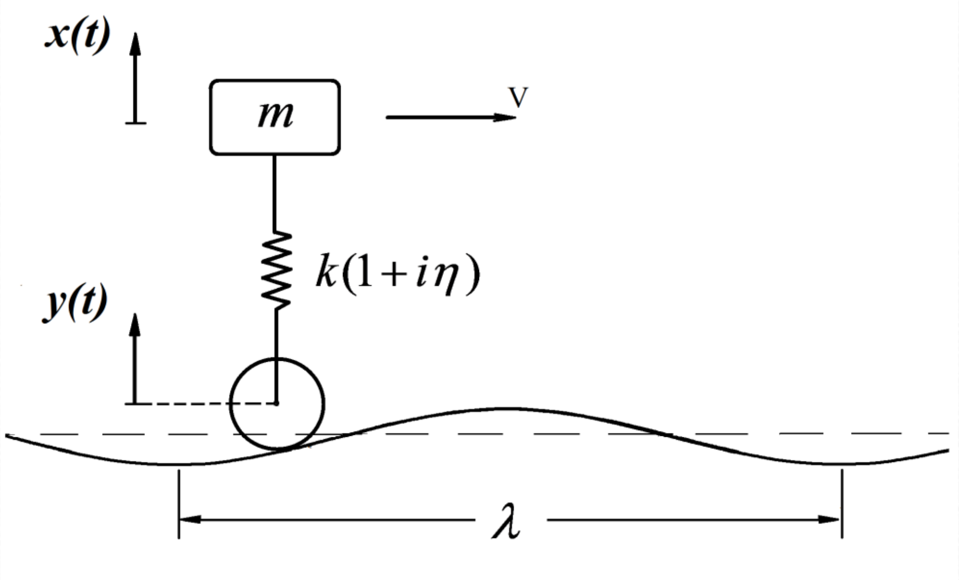
$$\frac{\bar{X}}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1-(\omega/\omega_n)^2\right)^2+\eta^2}}, \qquad \varphi = \tan^{-1}\frac{\eta}{1-(\omega/\omega_n)^2}$$

از آنجایی که ضریب میرایی سازه‌ای غالباً مقدار کوچکی است، سازه‌های با میرایی هیسترزیس معمولاً در فرکانس $\omega \approx \omega_n$ دچار تشدید می‌شوند. اما اندکی تغییرات در مقدار η می‌تواند دامنه جابجایی را در فرکانس تشدید تا حدود زیادی کاهش دهد.



دامنه‌ی جابجایی یک سیستم یک درجه آزادی با میرایی هیسترزیس
تحت تحریک هارمونیک در فرکانس‌های مختلف

مثال



شکل مقابل یک مدل یک درجه آزادی از یک خودرو را نشان می‌دهد که با سرعت $V=۵۰ km/h$ بر روی یک سطح ناهموار به طول موج $\lambda=۵m$ حرکت می‌کند. فرض کنید جرم، سختی و ضریب میرایی سازه‌ایی فنر به ترتیب برابر $m=۱۰۰۰kg$، $k=۳۰kN/m$ و $\eta=۰.۰۵$ باشند. اگر دامنه‌ی ناهمواری های جاده برابر ۲ سانتیمتر باشد، دامنه‌ی نوسان خودرو را بدست آورید.

حل: اگر فنر را الاستیک کامل فرض نماییم، معادله‌ی حرکت را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$m\ddot{x} + kx = ky \qquad (I)$$

از طرفی مطابق با توجه به شکل، جابجایی پایه را می‌توان با یک تابع هارمونیک نشان داد که دارای فرکانس نوسان $\omega = ۲\pi V / \lambda$ است. در اینجا برای راحتی کار جابجایی هارمونیک پایه را با یک تابع نمایی مختلط نمایش می‌دهیم:

$$y = Y e^{i\omega t} \qquad (II)$$

برای منظور نمودن میرایی سازه‌ای فنر، در معادله دیفرانسیل حرکت سختی فنر را با سختی مختلط جایگزین می-کنیم. برای بدست آوردن پاسخ ارتعاشی خودرو، فرض می‌کنیم جابجایی خودرو نیز به صورت هارمونیک باشد:

$$x = X e^{i\omega t} \qquad (III)$$

در نتیجه معادله‌ی دیفرانسیل حرکت به فرم جبری زیر در می‌آید:

$$(-m\omega^{۲} + k + ik\eta)X = k(۱ + i\eta)Y$$

و در نتیجه

$$\left|\frac{X}{Y}\right| = \sqrt{\frac{۱+\eta^{۲}}{\left(۱-(\omega/\omega_n)^{۲}\right)^{۲}+\eta^{۲}}} \qquad (IV)$$

با توجه به داده‌های مسأله داریم:

$$\omega_n = \sqrt{k/m} = \sqrt{۳۰} = ۵,۴۷۷\,(rad/s)$$

و

$$\omega = ۲\pi V/\lambda = ۲\pi \times \left(\frac{۵۰\times ۱۰^{۳}}{۳۶۰۰}\right)/۵ = ۱۷,۴۵۳\,(rad/s)$$

در نتیجه با استفاده از رابطه‌ی (IV)، بدست می‌آید:

$$\left|\frac{X}{Y}\right| = \sqrt{\frac{۱+۰/۰۵^{۲}}{\left(۱-(۱۷/۴۵۳/۵/۴۷۷)^{۲}\right)^{۲}+۰/۰۵^{۲}}} \approx ۰/۱۰۹$$