فصل هفتم

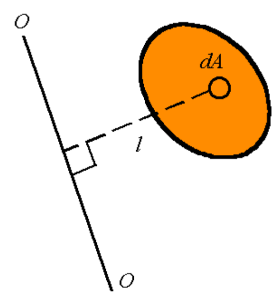
گشتاور ماند

۱-۷- ممان اینرسی یا گشتاور ماند:

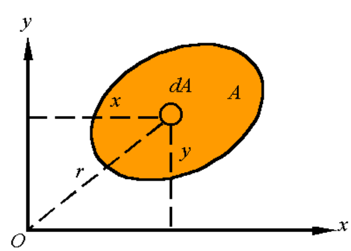
ممان اینرسی سطح و ممان اینرسی جرم از خـواص مهـم سـطوح و اجسـام هسـتند کـه در مکانیک دارای کاربرد وسیعی می باشند. به عنوان مثال ممان اینرسی سطح مشخصه مهم در تعیین مقاومت خمشی تیر است.

همچنین معادلات دینامیک اجسام صلب در حال دوران، شامل (ممان اینرسـی هـای) جـرم است که مشخصه وابسته به هندسه و توزیع جرم جسم می باشد. ممان اینرسی سطح، ممان دوم سطح حول محور داده شده می باشد. برای مثال مطـابق شـکل(۷-۱) محـور $O-O$ و سطح هاشورخورده را در نظر بگیرید. ممان دوم سطح مجموع l^2dA برای تمام المـان‌هـای سطح dA در ناحیه داده شده به دست می آید. ممان اینرسی سطح را بـا I نشـان داده و از فرمول زیر محاسبه می شود.

$$I=\int l^2dA \qquad (۷-۱)$$



شکل ۷-۱



شکل ۷-۲

سطح A در صفحه $x-y$ در نظر گرفته می شود. ممان‌هـای لختـی A حـول محورهـای x, y, z به صورت زیر تعریف می شود. (شکل ۷-۲)

$$I_x=\int y^2dA \qquad (۷-۲)$$

$$I_y=\int x^2dA \qquad (۷-۳)$$

از آنجایی‌که $r^2=x^2+y^2$ بنابراین $J_O=I_x+I_y$ ، سرانجام:

$$J_O = I_z = I_x + I_y = \int r^2 dA \qquad (۷-۴)$$

ممان اینرسی سطحی حول محور z را اصطلاحاً ممان اینرسی قطبی سطح می نامند و آن را با J نمایش می دهند.

ممان اینرسی سطح حول محور همیشه کمیتی مثبت است، برعکس، گشتاور اول سطح بصورت زیر تعریف می شود.

$$Q_y = \int xdA \quad ، \quad Q_x = \int ydA \qquad (۷-۵)$$

مقدار ممان اینرسی سطح بستگی به هندسه سطح و محوری داردکه ممان اینرسی حول آن محاسبه می شود.

۲-۷- شعاع ژیراسیون:

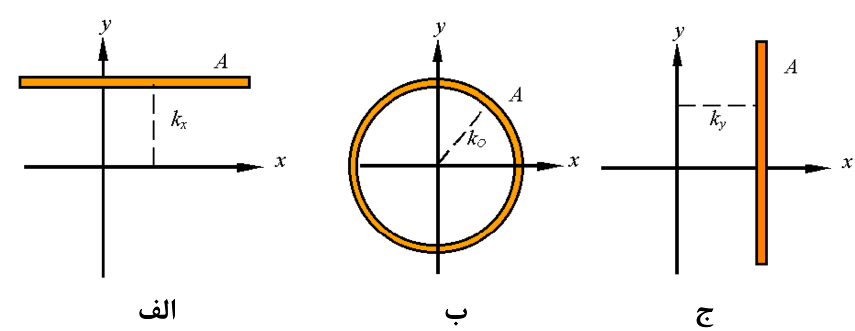
شعاع ژیراسیون یک سطح نسبت به یک محور را می توان به صورت فاصله محور تا نقطه‌ای تصور نمود که فرض می شود، سطح در آن نقطه متمرکز شده است تا همان گشتاور دومی که سطح واقعی نسبت به محور ایجاد می کرد را تولید نماید. (شکل ۷-۳)

$$I_x = K_x^2 A \rightarrow K_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \qquad (۷-۶)$$

$$I_y = K_y^2 A \rightarrow K_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \qquad (۷-۷)$$

$$I_z = K_z^2 A \rightarrow K_z = \sqrt{\frac{I_z}{A}} \qquad (۷-۸)$$

که در اینجا K_x , K_y , K_z شعاع ژیراسیون حول محور های x, y, z می باشد.



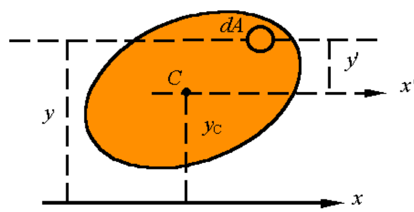
شکل ۷-۳

شعاع ژیراسیون، مقیاسی برای گسترش سطح از محور مورد بحث است. رابطه بین شعاع ژیراسیون قطبی K_O یا K_z و شعاع ژیراسیون K_y , K_x به صورت زیر بیان می شود.

$$K_z^2 = K_x^2 + K_y^2 \tag{۷-۹}$$

۳-۷- قضیه محور های موازی:

ممان اینرسی سطح محوری که از مرکز سطح جسم نمی گذرد را به راحتی می توان بر حسب ممان اینرسی سطح، حول محور موازی گذرنده از مرکز هندسی بیان کرد. با توجه به شکل، $x_C - y_C$ از مرکز هندسی C سطح می گذرد. اکنون هدف محاسبه ممان اینرسی سطح حول محور های $x - y$ موازی آنها می باشد. (شکل۷-۴)



شکل ۷-۴

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (y_C + y')^2 dA = \int_A y_C^2 dA + \int_A y'^2 dA + 2\int_A y_C y' dA = y_C^2.A + I_{x'} + 2y_C \int_A y' dA \tag{۷-۱۰}$$

از آنجایی‌که $\frac{1}{A}\int_A y'dA$ فاصله مرکز ثقل تا محور x' می باشد و این فاصله برابر صفر است، بنابراین قضیه محورهای موازی در این حالت به فرم زیر در می‌آید.

$$I_x = I_{x'} + Ay_C^2 \tag{۷-۱۱}$$

به همین ترتیب:

$$I_y = I_{y'} + Ax_C^2 \tag{۷-۱۲}$$

$$J_O = J_{O'} + Ar_C^2 = J_{O'} + A\left(x_C^2 + y_C^2\right) \tag{۷-۱۳}$$

با توجه به شکل (۷-۵) در حالت کلی، قضیه محورهای موازی برای محوری که موازی خط عبور کننده از مرکز ثقل می باشد، به صورت زیر نوشته می شود.

$$I = \bar{I} + Ad^2 \tag{۷-۱۴}$$

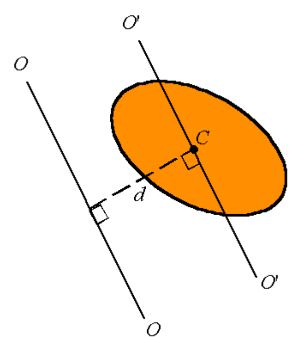
که در آن $\bar{I}$ ممان اینرسی حول محور $O'-O'$ می باشد که از مرکز ثقل می گذرد. I ممان اینرسی حول محور $O-O$ بوده و d فاصله عمودی بین دو محور موازی می باشد. بنابراین برای محورهای مختصات ممان اینرسی به صورت زیر نوشته می شود.

$$I_x = \bar{I}_x + Ad_x^2 \qquad (۷-۱۵)$$

$$I_y = \bar{I}_y + Ad_y^2 \qquad (۷-۱۶)$$

$$I_z = \bar{I}_z + Ad_z^2 \qquad (۷-۱۷)$$

$$I_z = I_x + I_y = \bar{I}_x + \bar{I}_y + A(dx^2 + dy^2) \qquad (۷-۱۸)$$



شکل ۷-۵

اگر انتقال بین دو محور موازی در نظر باشد که هیچ کدام از مرکز ثقل نمی‌گذرد. اول لازم است به یک محور موازی گذرنده از مرکز ثقل انتقال یابد، پس از یک انتقال از این محور، مرکز ثقل به محور دوم منتقل می شود. قضیه محورهای موازی برای شعاع ژیراسیون نیز صادق است.

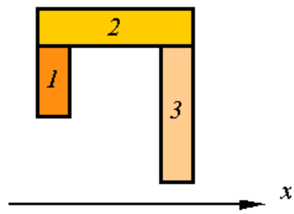
$$K^2 = \overline{K}^2 + d^2 \qquad (۷-۱۹)$$

$\overline{K}$ شعاع ژیراسیون حول محورگذرنده از مرکز ثقل، موازی محوری است که K بر آن اعمال می شود و d فاصله بین دو محور است، محورها ممکن است در صفحه عمود بر سطح باشند.

از قضیه محورهای موازی می توان برای تعیین ممان اینرسی سطح، در سطوح مرکب استفاده نمود. (شکل ۷-۶)

$$I_x = \sum_{i=1}^{n} \bar{I}_{ix} + \sum_{i=1}^{n} A_i d_{iy}^2 \qquad (۷-۲۰)$$

$$I_y = \sum_{i=1}^{n} \bar{I}_{iy} + \sum_{i=1}^{n} A_i d_{ix}^2 \qquad (۷-۲۱)$$



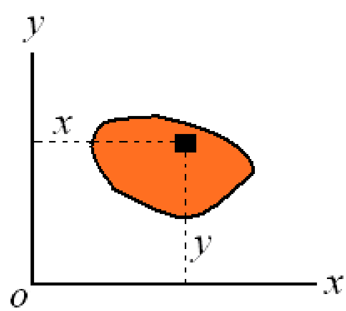
شکل ۷-۵

برای محاسبه شعاع ژیراسیون نمی توان از روابطی مشابه روابط فـوق اسـتفاده نمـود و بـرای تعیین آن لازم است ابتدا ممان اینرسی و مساحت مرکب را محاسبه نمود.

۴-۷- ممان اینرسی حاصلضرب:

کمیت I_{xy} را ممان اینرسی حاصلضرب نسبت به محور های $x-y$ می نامند و به صـورت زیر تعریف می شود. (شکل ۷-۶)

$$I_{xy} = \int xy dA \qquad (۷-۲۲)$$



شکل ۷-۶

واحد ممان اینرسی m^4 می باشد و بر خلاف ممان اینرسی های I_x , I_y که همواره مثبت می باشند، ممان اینرسی حاصلضرب یک سطح می تواند مثبت یا منفی باشد.

قضیه محور های موازی برای ممان اینرسی حاصلضرب عبارتست از:

$$I_{xy} = \bar{I}_{xy} + d_x d_y A \qquad (۷-۲۳)$$

اگر یکی از محور های x یا y محـور تقـارن سـطح باشـد T ممـان اینرسـی حاصلضـرب I_{xy} مساوی صفر می شود.

۵-۷- محور های اصلی:

محور های xy به عنوان دستگاه مختصات مرجع و محور هـای $x'y'$ را بـه عنـوان دسـتگاه مختصاتی که θ درجه خلاف عقربه های سـاعت دوران کـرده اسـت در نظـر بگیریـد. هـدف تعیین ممان اینرسی نسبت به محورهای x', y' بر حسـب ممـان اینرسـی‌هـای مربـوط بـه محورهای x, y و تعیین مقدار زاویه θ می باشد کـه بـه ازای آن حـداکثر و حـداقل ممـان اینرسی‌ها به دست آید. (شکل ۷-۷)

$$I_{x'} = \int_A y'^2 dA = \int_A \left(yCos\theta - xSin\theta\right)^2 dA$$
$$= Cos^2\theta \int_A y^2 dA + Sin^2\theta \int_A x^2 dA - 2Sin\theta.Cos\theta \int_A xydA$$
$$= I_x Cos^2\theta + I_y Sin^2\theta - 2I_{xy} Sin\theta.Cos\theta$$

بنابراین معادله زیر نتیجه می شود.

$$I_{x'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta - I_{xy}\sin 2\theta \qquad (۷-۲۴)$$

و به همین ترتیب می توان $I_{y'}$ به فرم زیر حاصل می شود.

$$I_{y'} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\theta + I_{xy}\sin 2\theta \qquad (۷-۲۵)$$

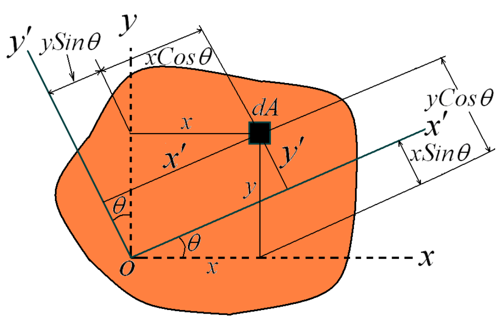
حال $I_{x'y'}$ مطابق روش ذکر شده محاسبه می شود.

$$I_{x'y'} = \int_A x'y' dA = \int_A \left(yCos\theta - xSin\theta\right)\left(xCos\theta + ySin\theta\right) dA$$
$$= Cos^2\theta \int_A xydA - Sin^2\theta \int_A xydA + Sin\theta.Cos\theta \int_A \left(y^2 - x^2\right) dA$$
$$= I_{xy}\left(Cos^2\theta - Sin^2\theta\right) + \left(I_x - I_y\right) Sin\theta.Cos\theta$$

بنابراین معادله زیر نتیجه می شود.

$$I_{x'y'}=\frac{I_x-I_y}{2}\sin 2\theta+I_{xy}\cos 2\theta \tag{۷-۲۶}$$

برای بدست آوردن زاویه θ که به ازای آن مقادیر حداکثر و حداقل ممان حاصل می شوند. کافی است مشتق $I_{x'}$ یا $I_{y'}$ مساوی صفر قرار داده شوند.



شکل ۷-۷

$$\tan 2\theta=-\frac{2I_{xy}}{I_x-I_y}=q \tag{۷-۲۷}$$

از معادله فوق دو مقدار برای θ بدست می آید، که $\frac{\pi}{2}$ با هم اختلاف دارند. یکی از این مقادیر، ممان اینرسی حداقل و مقدار دیگر ممان اینرسی حداکثر می باشد. این دو محور متعامد به محورهای اینرسی اصلی مرسومند. (رابطه‌های ۷-۲۸)

$$\theta_m=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\tan^{-1}q \quad ، \quad \theta_m=\frac{1}{2}\tan^{-1}q \tag{۷-۲۸}$$

مقادیر ممان های اینرسی از جایگذاری مقدار 2θ در معادله قبلی بدست می آید.($I_{x'y'}=0$)

$$I_{\max}=\frac{I_x+I_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+I_{xy}^2} \tag{۷-۲۹}$$

$$I_{\min}=\frac{I_x+I_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{I_x-I_y}{2}\right)^2+I_{xy}^2} \tag{۷-۳۰}$$

محورهای تقارن همواره محور های اصلی می باشند. البته نمی توان نتیجه گیری کرد که هر محور اصلی باید محور تقارن باشد. بین ممان اینرسی های متعامد دو محور مختصات، رابطـه زیر برقرار است.

$$I_{x'} + I_{y'} = I_x + I_y \quad (۷-۳۱)$$