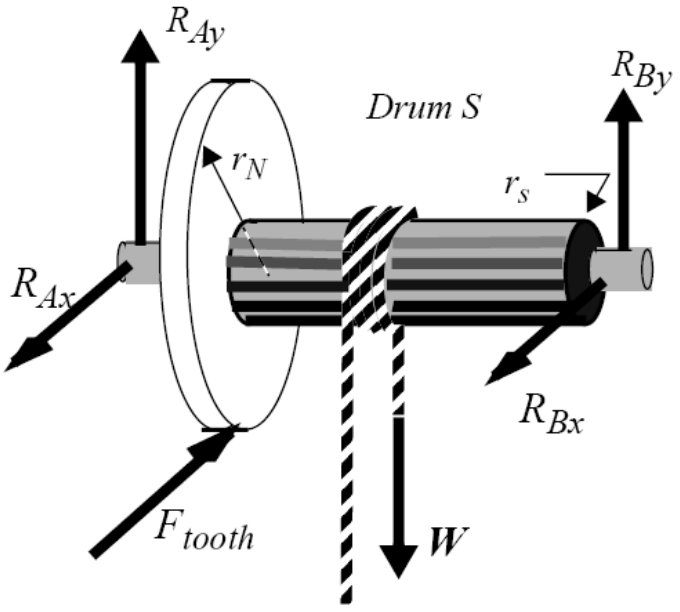
فصل دوم

تعادل



۲-۱- تعادل:

اصلی‌ترین بحث استاتیک، مبحث تعادل است. هنگامی که یک جسم در تعادل باشد، برآیند تمامی نیروهای اعمالی بر آن صفر است. بنابراین نیروی برآیند R و کوپل برآیند M، هر دو صفر و معادلات تعادل به فرم زیر است.

$$R = \sum F = 0 \quad ، \quad M = \sum M = 0 \qquad (۲-۱)$$

این معادلات شرط لازم و کافی برای وجود تعادل است.

جهت اعمال نیروها نیاز به رسم دیاگرام آزاد جسم است که جهت رسم آن نکات زیر بایستی مورد نظر قرار گیرد.

۱- انتخاب یک عضو مشخص با حدود مشخص برای تجزیه و تحلیل

۲- اعمال تمامی نیروها در اتصالات جدا شده که شامل تمام نیروهای معلوم و مجهول است. (در دیاگرام آزاد نیروهای مجهول با جهت و مقدار مشخص اعمال شده که پس از حل مسئله، علامت و مقدار آن مشخص می شود، در صورتی که علامت منفی شود، جهت اعمالی نادرست انتخاب شده است)

۳- انتخاب محورهای مختصات بر روی دیاگرام آزاد

۲-۲- تعادل در حالت دو بعدی:

برای تعادل در حالت دو بعدی باید سه معادله زیر برقرار باشد.

$$\sum F_x = 0 \quad ، \quad \sum F_y = 0 \quad ، \quad \sum M_z = 0 \qquad (۲-۲)$$

هر تکیه‌گاه در هر امتدادی که قیدی در مقابل حرکت ایجاد می‌کند، یک واکنش تکیه‌گاهی در روی دیاگرام آزاد در همان امتداد لازم دارد.

۲- ۳- اجسام استاتیکی معین و نامعین:

هر جسم و یا مجموعه‌ای از اجسام متصل به هم، برای تعادل به تعداد حداقل واکنش تکیه‌گاهی نیازمند است که اگر تعداد واکنش‌های تکیه‌گاهی از حداقل کمتر باشد، تعادل اجسام امکان پذیر نبوده و جسم ناپایدار است.

اگر تعداد واکنش‌های تکیه‌گاهی مساوی تعداد حداقل لازم باشد، شرط لازم برای پایداری وجود داشته و تعیین مجهولات واکنشی از طریق معادلات تعادل امکان پذیر است. به این حالت معین استاتیکی می گویند.

در صورتی که تعداد نیروهای واکنشی موجود بیشتر از تعداد حداقل لازم باشد، تعداد مجهولات تکیه‌گاهی بیشتر از تعداد معادلات استاتیکی خواهد شد و در نتیجه امکان تعیین تمام مجهولات به‌وسیله معادلات تعادل وجود نخواهد داشت. به این حالت نامعین استاتیکی گفته می‌شود.

وجود سه مولفه تکیه‌گاهی و یا بیشتر، شرط لازم برای پایداری است، ولی کافی نیست و حالت خاصی وجود دارد که با وجود سه مولفه تکیه‌گاهی و یا بیشتر، پایداری وجود ندارد. به چنین حالاتی ناپایداری هندسی گویند. در مسائل صفحه‌ای و در سه معادله تعادل استاتیکی تعداد حداقل نیروی واکنشی لازم برای تعادل اجسام صلب صفحه‌ای سه می‌باشد.

با توجه به معادلات تعادل در صفحه، معادله گشتاور را می‌توان نسبت به هر نقطه دلخواه در روی صفحه نوشت لیکن نوشتن معادله تعادل گشتاور نسبت به نقاط مختلف معادلات مستقل جدید ایجاد نمی کند و تنها در صورتی می توان از معادله گشتاور مربوط به نقطه دوم و یا سوم استفاده کرد که یک یا دو معادله تعادل نیرو کنار گذاشته شود. به هر حال هر یک از ترکیبات زیر می تواند به عنوان سه معادله مستقل تعادل منظور باشد.

$$\sum M_A = 0 \quad ، \quad \sum M_B = 0 \quad ، \quad \sum M_C = 0 \qquad (۲-۳)$$

$$\sum M_A = 0 \quad ، \quad \sum M_B = 0 \quad ، \quad \sum F_y = 0 \qquad (۲-۴)$$

$$\sum M_A = 0 \quad ، \quad \sum F_x = 0 \quad ، \quad \sum F_y = 0 \qquad (۲-۵)$$

۲-۴- تعادل در فضای سه بعدی:

تعادل در حالت دو بعدی با بسط دادن برای تعادل در سه بعد سازگار خواهد بود و در این تعادل یک جسم صلب، برآیند نیروها و برآیند گشتاورهای موثر بر جسم صلب باید مساوی صفر شود.

$$\sum F = 0 \;\Rightarrow\; \sum F_x = 0 \;,\; \sum F_y = 0 \;,\; \sum F_z = 0 \qquad (۲-۶)$$

$$\sum M = 0 \;\Rightarrow\; \sum M_x = 0 \;,\; \sum M_y = 0 \;,\; \sum M_z = 0 \qquad (۲-۷)$$

در معادلات فوق ۶ مجهول واکنش تکیه‌گاهی قابل محاسبه است. اگر بیش از ۶ مجهول وجود داشته باشد، سیستم نامعین استاتیکی می باشد و اگر تعداد مساوی ۶ باشد ، سیستم معین استاتیکی خواهد بود، بالاخره اگر تعداد مولفه های مجهول تکیه گاهی کمتر از ۶ باشد جسم ناپایدار استاتیکی است.

تذکر: نیروها و گشتاورهای اعمالی واکنشی در دیاگرام آزاد بر این اساس گذاشته می شود که در مقابل کدامیک از شش درجه آزادی ممکنه در مقابل حرکت ممانعت ایجاد می‌کند.

۵-۲- انواع بارگذاری:

۱- بارگذاری در سه بعد که نیاز به ۶ معادله تعادل می باشد. (شکل۲-۱)

$$\sum F_x = 0 \quad ، \quad \sum F_y = 0 \quad ، \quad \sum F_z = 0 \qquad (۲-۸)$$

$$\sum M_x = 0 \quad , \quad \sum M_y = 0 \quad , \quad \sum M_z = 0 \qquad (۲-۹)$$

۲- بارگذاری با نیروهای موازی در فضا که نیاز به ۳ معادله تعادل دارد. (شکل۲-۲)

$$\sum M_x = 0 \quad , \quad \sum M_y = 0 \quad ، \quad \sum F_z = 0 \qquad (۲-۱۰)$$

۳- بارگذاری در حالت سه بعدی با نیرو های متقارب در یک نقطه که نیاز به ۳ معادله تعادل دارد. (شکل۲-۳)

$$\sum F_x = 0 \quad , \quad \sum F_y = 0 \quad , \quad \sum F_z = 0 \qquad (۲-۱۱)$$

۴- بارگذاری در حالت دو بعدی که نیاز به سه معادله تعادل دارد و دست کم یکی از آنها معادله گشتاور است. (شکل۲-۴)

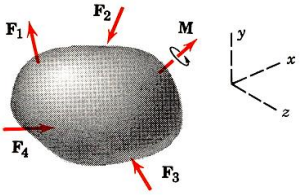
$$\sum M_x = 0 \quad ، \quad \sum F_y = 0 \quad ، \quad \sum F_z = 0 \qquad (۲-۱۲)$$

۵- بارگذاری با نیروهای موازی در صفحه که نیاز به ۲ معادله تعادل دارد و دست کم یکی از آنها معادله گشتاور است. (شکل۲-۵)

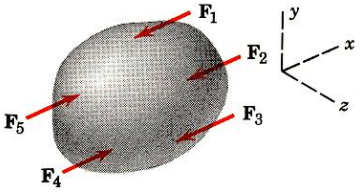
$$\sum M_x = 0 \quad ، \quad \sum F_z = 0 \qquad (۲-۱۳)$$

۶- بارگذاری در حالت یک بعدی که نیاز به یک معادله تعادل دارد. (شکل۲-۶)

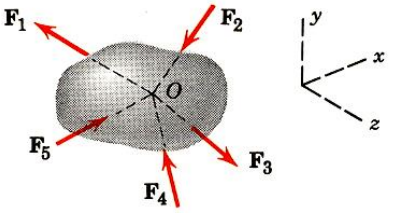
$$\sum F_x = 0 \qquad (۲-۱۴)$$



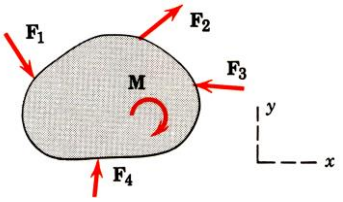
شکل ۲-۱



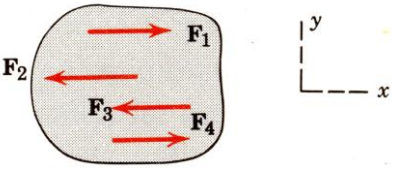
شکل ۲-۲



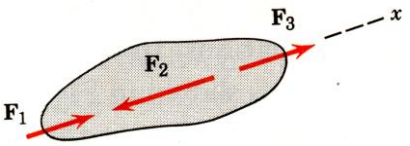
شکل ۲-۳



شکل ۲-۴



شکل ۲-۵



شکل ۲-۶

۲-۶- تکیه‌گاهها:

در عمل اجسام باربر به نحوی بر اجسام دیگر متکی هستند و تمام این اجسام که نیروهایی را حمل کرده به تکیه‌گاههای خود منتقل می کنند. همواره در حال تعادلند. بنابراین دانستن انواع تکیه‌گاهها و آشنایی با خصوصیات استاتیکی آنها را به منظور تحلیل اجسام از نظر باربری تعادل و پایداری ضروری است. تکیه‌گاهها با توجه به اهمیت به دو دسته زیر تقسیم می شوند.

۱-۶-۲- انواع تکیه‌گاهها برای اجسام دو بعدی: منظور از اجسام دو بعدی، اجسامی است که نیروهای خارجی موثر بر همه آنها در یک صفحه باشند.

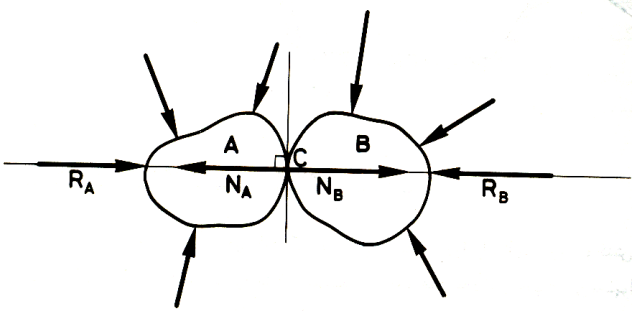
۱-۱-۶-۲- تکیه‌گاه ساده:

هرگاه دو جسم صلب خالی از هر گونه اتصال بر یکدیگر متکی باشند و از خارج نیروهایی بر این دو جسم اثر کنند، نقطه یا سطح دو جسم نسبت به یکدیگر تکیه‌گاه ساده نامیده می شود. هر تکیه‌گاه ساده، یک نیروی واکنش، با راستای مشخص شده تولید می کند. این گونه تکیه‌گاهها را اغلب تکیه‌گاه یک مجهولی نیز می نامند.

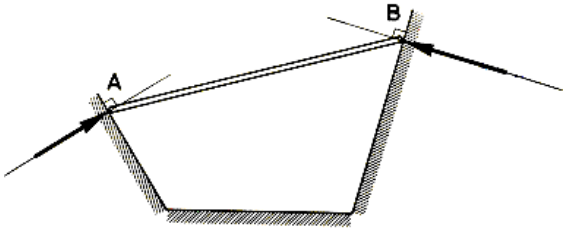
در شکل(۲-۷)، N_A را واکنش جسم A و N_B را واکنش جسم B می نامند. در این نوع تکیه‌گاهها همواره واکنش‌ها عمود بر فصل مشترک دو جسم هستند و مقدار آنها در زمان تعادل دستگاه برابر بر آیند نیرو های خارجی موثر است. یعنی:

$$|N_A| = |R_A| = |N_B| = |R_B|$$

چون نیروهایی که از خارج به دستگاه عمل می کنند، طوری هستند که تعادل دستگاه همواره باید برقرار باشد. بنابراین می‌توان گفت، برآیند نیروهای موثر بر جسم A برابر، مخالف جهت و منطبق بر راستای برآیند نیروهای موثر بر جسم B می باشد. نمونه‌ای دیگر در شکل (۲-۸) نشان داده شده است.



شکل ۲-۷

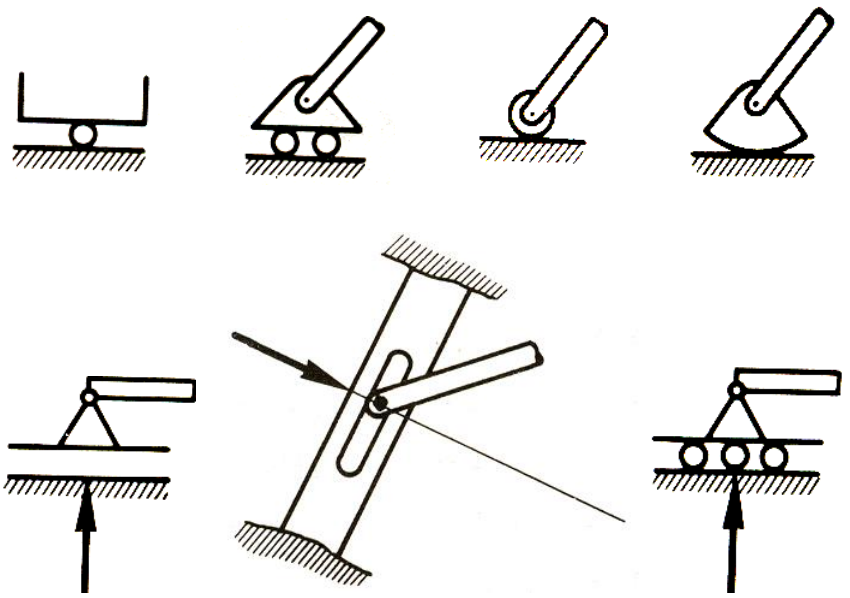


شکل ۲-۸

۲-۱-۶-۲-تکیه‌گاه متحرک یا غلتکی:

این تکیه‌گاه نیز تکیه‌گاه یک مجهولی است زیرا راستای نیروی واکنش تولید شده در این گونه تکیه‌گاهها همواره قابل تشخیص است و فقط مقدار و جهت آن مجهول می باشد. در شکل (۲-۹) چند نمونه تکیه‌گاه متحرک نشان داده شده است.

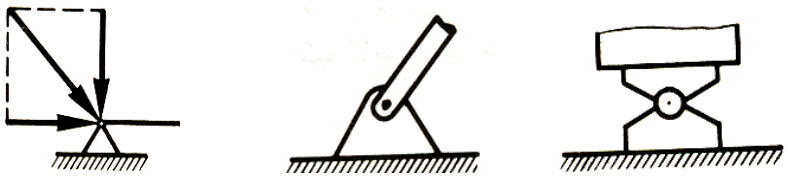
جسمی که بر این تکیه‌گاه متکی است در یک جهت (مثلاً افقی) می تواند حرکت کند و در امتداد عمود بر جهت حرکت راه حرکت جسم بسته است و بنابراین راستای نیروی واکنش در این تکیه‌گاه همواره عمود بر امتداد حرکت است.



شکل ۲-۹

۳-۱-۶-۲-تکیه‌گاه مفصلی(تکیه‌گاه لولایی):

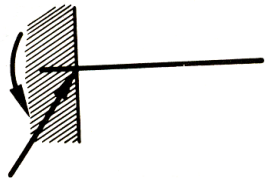
در اینگونه تکیه‌گاهها هیچ حرکتی امکان‌پذیر نیست و بنابراین در ابتدا نمی‌توان امتداد راستای نیروی واکنش را تشخیص داد، ولی پس از بدست آوردن مولفه‌های واکنش در دو امتداد دلخواه، بطور معمول دو امتداد عمود بر هم، راستای واکنش را نیز می‌توان بدست آورد. شکل(۲-۱۰) دو نوع از تکیه‌گاه مفصلی را نشان می دهد. چون برای محاسبه نیروی واکنش این تکیه‌گاه به محاسبه مولفه‌های آن نیاز است لذا آن را تکیه‌گاه دو مجهولی می‌نامند. در این تکیه‌گاه جسم متکی به هیچ وجه نمی‌تواند حرکت کند ولی چون می‌تواند گرد تکیه‌گاه گردش نماید، آن را تکیه‌گاه مفصلی یا لولایی نیز می نامند.



شکل ۲-۱۰

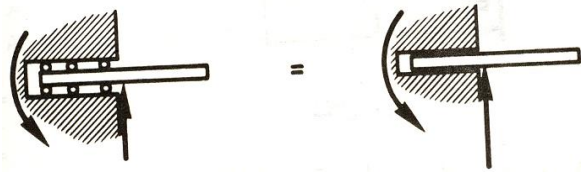
۴-۱-۶-۲- تکیه‌گاه گیردار:

تکیه‌گاه گیردار، تکیه‌گاه کاملی است که در آن نه فقط حرکت بلکه گردش نیز امکان پذیر نیست. تکیه‌گاه تیر بالکنی که از دیوار بیرون آمده است. در واقع نوع تکیه‌گاه گیردار می باشد و چون تعداد واکنش‌ها در این تکیه‌گاهها سه است. این تکیه‌گاه سه مجهولی نیز نامیده می شوند. (شکل ۲-۱۱)



شکل ۲-۱۱

۱- تکیه‌گاه گیردار دو مجهولی است. حرکت افقی در امتداد محور تیر امکان‌پذیر است و تنها واکنش‌های تولید شده یک نیرو عمود بر محور تیر و گشتاور گیردار است. علامت اختصاری آن مطابق شکل(۲-۱۲) است.



شکل ۲-۱۲

۲- تکیه‌گاه‌هایی که توسط میله‌های پاندولی ساخته شده‌اند. منظور از میله های پاندولی، عضو باربری است که معمولاً محور مستقیم (لازم نیست همیشه محور آن مستقیم باشد.) دارد. دو انتهای آن مفصل(لولا) است و وزن آن ناچیز و غیر قابل صرفنظر کردن است. خاصیت مهم آن این است که در هیچ شرایط نیرویی عمود بر محور خود(خط واصل دو مفصل انتهایی) را تحمل نمی‌کند. لذا با این مشخصات میله های پاندولی فقط در امتداد

محور خود(خط واصل)و مفصل انتهایی می‌توانند نیرو را تحمل و منتقل کنند. میله پاندولی شبیه تکیه گاه متحرک(تکیه‌گاه یک مجهولی) است. (شکل۲-۱۳)

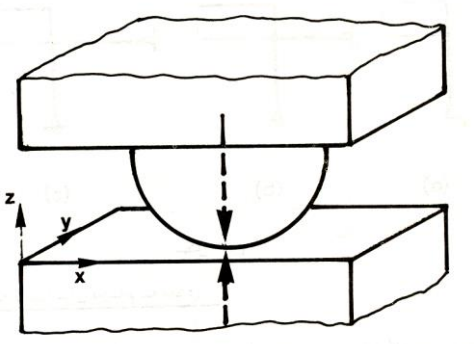
شکل ۲-۱۳

۲-۶-۲- انواع تکیه‌گاهها برای اجسام سه بعدی:

تکیه‌گاههای اجسام فضایی نیز شباهت کلی و اصولی با تکیه‌گاههای اجسام دو بعدی دارند و اینجا فقط به ذکر انواع تکیه‌گاههای مهم فضایی و مختصری از آنها اکتفا می شود.

۱-۲-۶-۲- تکیه گاه فضایی متحرک یک مجهولی:

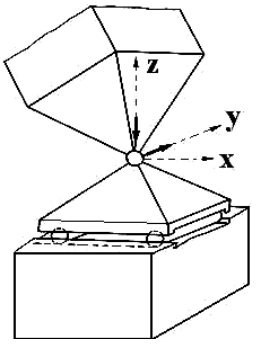
شکل(۲-۱۴) یک تکیه‌گاه از این نوع را نشان می‌دهد. چنانچه پیداست در این تکیه‌گاه، حرکت در امتداد محورهای y, x امکان پذیر است و تنها نیروی واکنش تولید شده در امتداد محور z می باشد. بنابراین تکیه‌گاه تک مجهولی است.



شکل ۲-۱۴

۲-۲-۶-۲- تکیه‌گاه متحرک فضایی دو مجهولی:

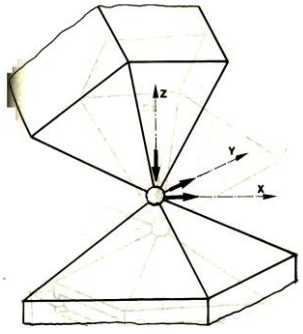
شکل(۲-۱۵) نمونه‌ای از تکیه‌گاه متحرک فضایی دو مجهولی را نشان می دهد. واکنش‌های دو نیرویی A_y, A_Z هستند. زیرا جسم در امتداد محور x می تواند حرکت کند



شکل ۲-۱۵

۲-۲-۶-۳- تکیه‌گاه کروی (تکیه‌گاه مفصلی):

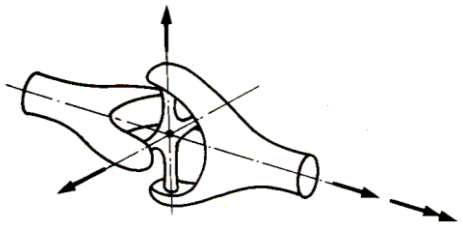
شکل زیر تکیه‌گاه کروی را نشان می دهد. در این تکیه‌گاه مطابق شکل(۲-۱۶) سه نیروی واکنش تولید می شود. پس تکیه‌گاهی است سه مجهولی(A_x, A_y, A_Z)



شکل ۲-۱۶

۲-۲-۶-۴- تکیه‌گاه چهار مجهولی:

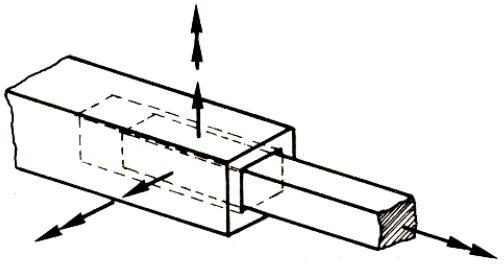
شکل (۲-۱۷) چهار شاخه میل‌گاردان اتومبیل را نشان می دهد. در این تکیه‌گاه چهارنیروی واکنشی می‌تواند پدید آید، سه نیروی و یک گشتاور.



شکل ۲-۱۷

۵-۲-۶-۲- تکیه‌گاه پنج مجهولی:

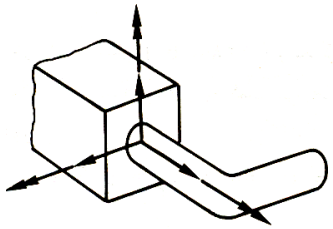
شکل(۲-۱۸) تیری را که از داخل مجرایی با مقطع مشابه می تواند حرکت کند، نشان می-دهد و دیده می شود که در این تکیه‌گاه پنج نیروی واکنش(دو نیرو و سه گشتاور) وجود دارد.



شکل ۲-۱۸

۶-۲-۶-۲- تکیه‌گاه شش مجهولی (تکیه‌گاه گیردار فضایی):

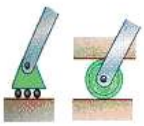
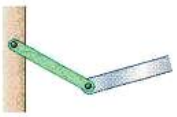
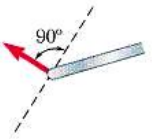
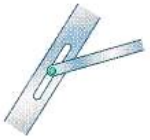
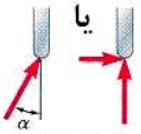
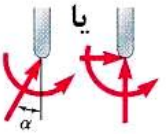
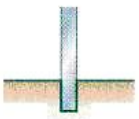
شکل(۲-۱۹) این تکیه‌گاه را نشان می‌دهد. این تکیه‌گاه شش واکنش دارد.(سه نیرو و سه گشتاور) ریشه درخت نمونه‌ای نسبتاً قویی از این نوع تکیه‌گاه می‌باشد.



شکل ۲-۱۹

تذکر: به طور خلاصه شکل تکیه‌گاهها به همراه عکس‌العمل‌ها در حالت دو و سه بعد در جدول‌های (۲-۱) و (۲-۲) آمده است.

جدول ۲-۱

تعداد مجهولات	عکس العمل	تکیه گاه یا اتصال
یک	نیرو با خط اثر معلوم	سطح بدون اصطکاک غلتانک  غلتک ها
یک	نیرو با خط اثر معلوم	 لینک کوتاه کابل کوتاه
یک	 نیرو با خط اثر معلوم	 پین بدون اصطکاک داخل شیار طوقه بر روی میله بدون اصطکاک
دو	 نیرو باخط اثر نامشخص	سطح صاف پین یا مفصل بدون اصطکاک
سه	 نیرو و کوپل	 تکیه گاه ثابت

جدول ۲-۲

F
نیرو با خط اثر معلوم
یک مجهول
کابل
F
نیرو با خط اثر معلوم
یک مجهول
سطح بدون اصطکاک
گوی
F_y
F_z
دو مولفه نیرو
چرخ بر روی ریل
غلتک بر روی سطح صاف
F_y
F_z
F_x
سه مولفه نیرو
مفصل ساچمه ای
سطح صاف
M_y
F_y
M_x
M_z
F_z
F_x
سه مولفه نیرو و سه کوپل
اتصال ثابت
F_y
M_x
F_x
F_z
سه مولفه نیرو و یک کوپل
قفل کاردان یا مفصل چرخنده
(M_y)
F_y
(M_z)
F_z
دو مولفه نیرو و دو کوپل
مفصل و یاتاقان هدایت کننده تنها بار شعاعی
(M_y)
F_y
(M_z)
F_z
F_x
سه مولفه نیرو و دو کوپل
مفصل و یاتاقان هدایت کننده بار شعاعی و بار محوری
پین و سگدست

۲-۷- آزاد کردن جسم از تکیه‌گاهها:

برای محاسبه واکنش‌های اجسام صلب، باید کلیه نیروهای خارجی موثر بر جسم (اعم از نیروهای معلوم و یا مجهول واکنش‌ها) را در نظر گرفت تا موقع نوشتن معادلات استاتیکی اشتباه رخ ندهد. اکنون با توجه به خصوصیات استاتیکی تکیه‌گاه لازم است جسم را در موقع محاسبه واکنش‌های مجهول از تکیه‌گاههای آن آزاد کرده به جای تکیه‌گاهها، نیروها و گشتاورهای واکنش را با جهت‌های انتخابی انعکاس داد. دیاگرام آزاد برای بعضی از اجسام ساده در جدول (۲-۳) نشان داده شده است.

تذکر: رعایت نکات زیر در حل مسائل تعادل می‌تواند کمک شایانی به دانشجو نماید.

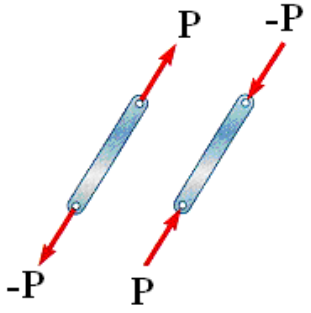
۱- اگر خطوط اثر تمام نیروهای عمل کننده بر روی یک ذره در یک صفحه مشترک قرار داشته باشند. دو معادله تعادل اسکالر مستقل در دسترس می باشد.

۲- اگر خطوط اثر تمام نیروهای عمل کننده بر روی یک جسم توسعه یافته، همگی موازی و در یک صفحه مشترک قرار داشته باشند. دو معادله تعادل اسکالر مستقل در دسترس است.

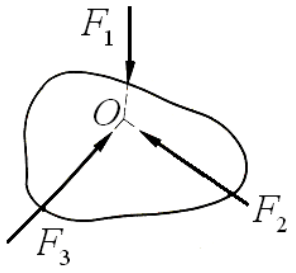
۳- اگر خطوط اثر تمام نیروهای عمل‌کننده بر روی یک جسم توسعه یافته همگی در صفحه مشترک قرار داشته باشند، سه معادله تعادل منتها مستقل در دسترس می باشد.

۲-۸- عضوهای دو نیرویی و سه نیرویی:

عضو دو نیرویی، عضویی است که دو نیروی مساوی و مختلف‌الجهت برآن عضو وارد می شود. (شکل۲-۲۰) عضو سه نیرویی نیز به عضویی گفته می‌شود که سه نیروی همرس بر آن وارد شود، مثلث نیرویی حاصل از این این سه نیرو مثلث تعادل نام داشته که توسط این سه نیرو ارضاء شده و به راحتی با استفاده از قاعده سینوس‌ها قابل محاسبه می‌باشد. (شکل۲-۲۱)

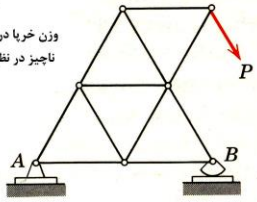
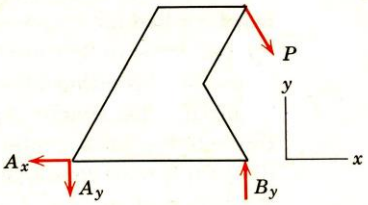
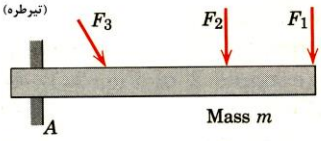
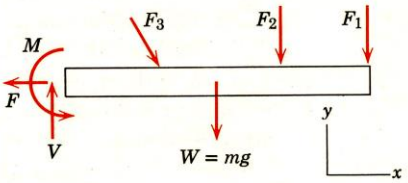
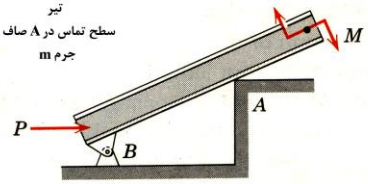
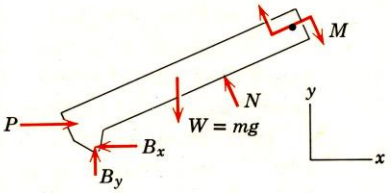


شکل ۲-۲۰



شکل ۲-۲۱

جدول ۲-۳

دیاگرام های آزاد جسم	
سیستم مکانیکی	دیاگرام آزاد جسم ایزوله شده
خرپای صفحه ای وزن خرپا در مقایسه با نیروی اعمال شده ناچیز در نظر گرفته می شود 	
تیر یک سر گیردار (تیرطره) 	
تیر سطح تماس در A صاف جرم m 	
تحلیل سیستم اجسام صلب به هم پیوسته به عنوان یک واحد تنها وزن مکانیزم ناچیز است