آنالیز برداری

بردارها

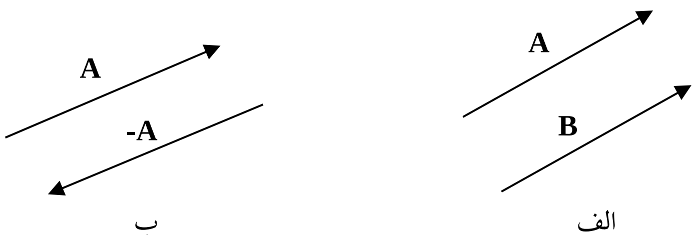
جبر برداری به عنوان یک ابزار قوی در بیان و استفاده از قوانین علم مکانیک می‌باشد. هنگامی که قوانین مکانیک به وسیله‌ی بردار نمایش داده می‌شوند، مستقل از محورهای مختصات خواهند بود. بردار متغیری است که دارای دو مشخصه‌ی مقدار و امتداد (جهت) می‌باشد. این مشخصه‌ها مستقل از هرگونه دستگاه مختصات هستند. اگر متغیری تنها دارای مقدار (بدون امتداد یا جهت) باشد، اسکالر نام دارد. سرعت و نیرو مثال‌هایی از کمیت‌های برداری هستند. از طرف دیگر کمیت‌های دیگر مانند تندی (speed) و حجم یک جسم کمیت‌های اسکالر هستند. در نوشته‌های چاپی معمولاً بردار با حروف سیاه مثل **A,V** و مقادیر آنها با حروف نازک مثل A,V نوشته می‌شوند. در نوشته‌های دستی بردار به صورت $\vec{V}$ و $\vec{A}$ و مقادیر آنها به شکل V , A نشان داده می‌شوند.

جبر برداری

عملیاتی مانند جمع، تفریق و ضرب برداری مشابه همان عملیات در جبر اعداد حقیقی هستند. تعاریف زیر به عنوان اصول اساسی برداری به حساب می‌آیند.

۱- دو بردار **A,B** مساویند (هم‌سنگ هستند) اگر دارای اندازه و جهت یکسان باشند، بدون اینکه نقاط اولیه‌ی آنها در نظر گرفته شوند(شکل ۳-۱-الف).

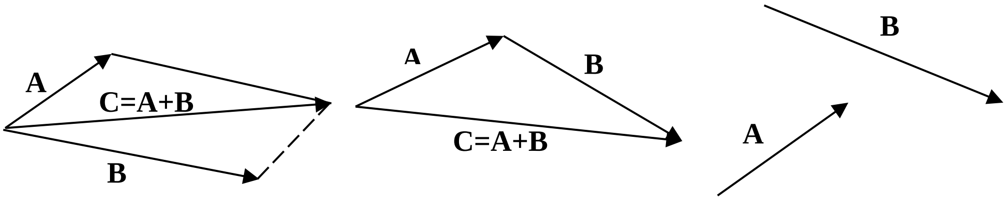
۲- برداری که دارای جهت مخالف بردار **A** اما از لحاظ طولی یکسان باشد، با **A**− نشان داده می‌شود (شکل ۱-۳- ب).



شکل ۳-۱- الف) دو بردار هم‌سنگ و ب) دو بردار هم اندازه با جهت مخالف

۳- مجموع یا برآیند بردارهای **B,A** برداری مانند **c** می‌باشد به طوری‌که اگر مطابق شکل ۳-۲-ب ابتدا بردار مساوی **A** را در نظر گرفته، سپس از انتهای بردار **A** بردار مساوی **B** ترسیم نمایید، برداری که ابتدای

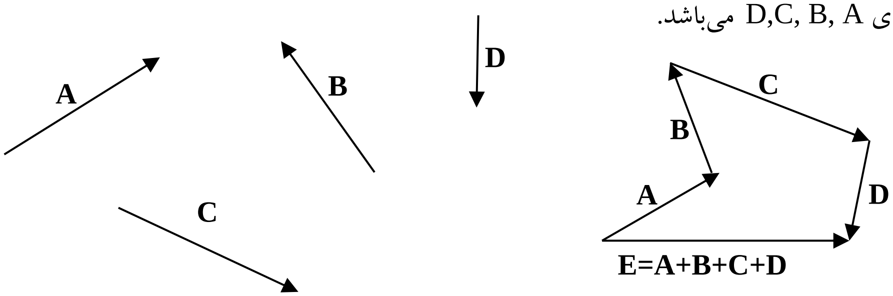
بردار **A** را به انتهای بردار **B** وصل می‌کند همان بردار برآیند **C** می‌باشد. این بردار برآیند معادل بردار برآیند شکل ۳-۲- ج می‌باشد، یعنی بردار قطر متوازی الاضلاعی که توسط دو بردار ساخته می‌شود.



الف)　　　　　　ب)　　　　　　ج)

شکل ۳-۲- دو بردار و جمع برداری آنها به همراه قاعده‌ی متوازی‌الاضلاع

گسترش مجموع بردارهای بیشتر از دو بردار عیناً انجام می‌شود، برای مثال مطابق شکل ۳-۳ بردار E برآیند بردارهای D,C, B, A می‌باشد.



شکل ۳-۳- جمع بردارهای بیش از دو بردار

۴- اختلاف بردارهای **A,B** به شکل **A-B** نشان داده می‌شود، به طوری‌که بردار **C** هنگامی که با بردار **B** جمع می‌شود، بردار **A** نتیجه می‌گردد. همچنین **A-B** را به صورت **A+(-B)** تعریف می‌کنند، اگر **A=B** باشد، آنگاه **A-B** به عنوان بردار پوچ یا بردار صفر تعریف می‌شود **(O)**، این بردار اندازه‌ی صفر و بدون جهت مشخص است.

۵- ضرب بردار **A** در اسکالر p به فرم $p\mathbf{A}$ تعریف می‌شود. یا $(\mathbf{A}p)$ به طوری که اندازه‌ی بردار حاصل در $|p|$ ضرب می‌شود، اگر مقدار p منفی باشد، بردار حاصل در خلاف جهت بردار **A** می‌باشد. اگر p=0 آنگاه $p\mathbf{A}$ =0 و بردار حاصل بردار صفر می‌باشد.

قوانین جبر بردارها

اگر **C,B,A** بردار و q,p اسکالر باشد، آنگاه:

(۳-۱) $\mathbf{A}+\mathbf{B}=\mathbf{B}+\mathbf{A}$ قانون جابجایی برای جمع دو بردار

(۳-۲) $\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})=(\mathbf{A}+\mathbf{B})+\mathbf{C}$ قانون شرکت‌پذیری برای جمع سه بردار

(۳-۳) $p(q\mathbf{A})=q(p\mathbf{A})$ قانون شرکت‌پذیری ضرب دو اسکالر نسبت به یک بردار ضرب

(۳-۴) $(p+q)\mathbf{A}=p\mathbf{A}+q\mathbf{A}$ قانون توزیع‌پذیری دو اسکالر نسبت به یک بردار

(۳-۵) $p(\mathbf{A}+\mathbf{B})=p\mathbf{A}+p\mathbf{B}$ قانون توزیع‌پذیری یک اسکالر نسبت به دو بردار

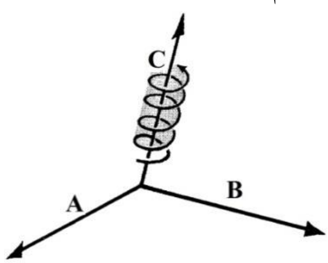
بردارهای یکه: بردارهای دارای طول واحد، بردارهای یکه (واحد) نام دارند. اگر **A** بردار با طول A≥۰ باشد، آنگاه $a = \frac{A}{A}\left(\frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \vec{a}\right)$ بردار یکه با همان جهت بردار **A** می‌باشد و $\mathbf{A}=A\mathbf{a}$ یا $\vec{A} = A\vec{a}$

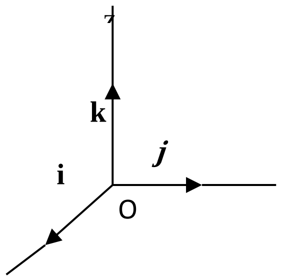
بردارهای یکه‌ی مکعب مستطیل (کارتزین)

بردارهای یکه‌ی k,j,i دردستگاه مختصات کارتزین برهم عمود بوده و دارای اندازه‌ی واحد هستند و به ترتیب در جهت محورهای z,y,x هستند. (مطابق شکل ۳-۴) از قانون دست راست برای سیستم دستگاه مختصات کارتزین استفاده می‌شود.

در حالت کلی، اگر دو بردار **B,A** مطابق شکل۳-۵ در نظر گرفته شوند، اگر چهار انگشت در جهت بردار **A** و بردار **B** عمود بر کف دست به سمت بیرون باشد، بردار **C** در جهت انگشت شصت خواهد بود و دوران بردار **A** در جهت مثلثاتی (کمترین زاویه با **B**) می‌باشد. (زاویه‌ی **A** با **B** کمتر از ۱۸۰^{o} است.) سیستم راستگرد نیز به صورت زیر تعیین می‌شود.

سیستم راستگرد





شکل ۳-۵- برآیند دو بردار با استفاده از قانون دست راست

شکل ۳-۴- بردارهای یکه در سه بعد

مولفه‌های یک بردار

از این قسمت به بعد، جهت اجتناب از هر گونه اشتباه تایپی برای دانشجویان عزیز، بردار به صورت یک مولفه‌ی پیکان‌دار نشان داده می‌شود. هر بردار $\vec{A}$ در سه بعد را می‌توان نسبت به مرکز سیستم کارتزین یعنی o نشان داد. اگر (A_1,A_2,A_3) مختصات دکارتی نقطه‌ی خروجی بردار $\vec{A}$ با نقاط اولیه‌ی O باشد، آنگاه $A_x\,,\,A_y\,,A_z$ مولفه‌های دکارتی‌یا مولفه‌های ساده‌ی بردار $\vec{A}$ در جهت‌های $x,\ y,z$ هستند. مجموع یا برآیند بردارهای $A_x\vec{i}\ ,\ A_y\vec{j}\,,A_z\vec{k}$ برابر بردار $\vec{A}$ می‌باشد به طوری که

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$$

و اندازه‌ی آن برابر است با:

$$A=\left|\vec{A}\right|=\sqrt{\left(A_x\right)^2+\left(A_y\right)^2+\left(A_z\right)^2}$$

به خصوص بردار وضعیت با بردار شعاعی $\vec{r}$ از o به نقطه‌ی (x,y,z) به فرم زیر است:

$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$ و دارای اندازه‌ی $r=\left|\vec{r}\right|=\sqrt{\left(r_x\right)^2+\left(r_y\right)^2+\left(r_z\right)^2}$ می‌باشد (شکل ۳-۶).

از حاصل‌ضرب داخلی می‌توان جهت تعیین تصویر یک بردار روی امتداد مشخص استفاده نمود (شکل ۳-۷) . برای مثال تصویر بردار $\vec{A}$ روی محور x به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{A}.\vec{i}=ACos\theta \tag{۳-۶}$$

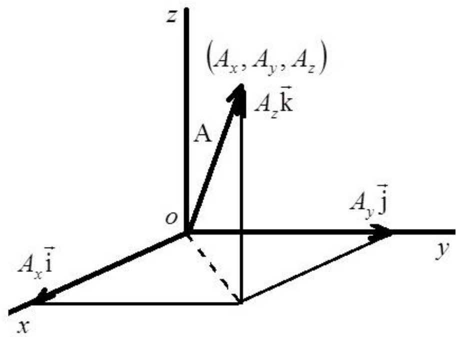
به طور مشابه تصویر بردار $\vec{A}$ روی برداری مانند $\vec{B}$ به شکل $\mathrm{A.e_B}=ACos\beta$ می‌گردد.

با استفاده از تعریف بردار یکه،

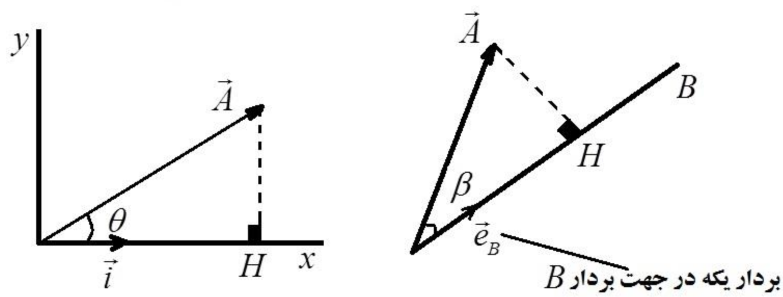
$$\vec{e}_\mathrm{B}=\frac{\vec{B}}{|\vec{B}|}=\frac{\text{بردار } \vec{B}}{\text{اندازه بردار } \vec{B}} \tag{۳-۷}$$

در نتیجه تصویر بردار $\vec{A}$ بر روی امتداد $\vec{B}$ به شکل $\frac{(\vec{\mathrm{A}}.\vec{\mathrm{B}})}{\vec{\mathrm{B}}}$ می‌باشد. همچنین از ضرب داخلی جهت تعریف کسینوس‌های هادی یک بردار استفاده می‌گردد. فرض کنید $\vec{k}\,,\vec{j}\,,\vec{i}$ بردارهای یکه در جهت‌های y,xz, و $A_z\,,A_y\,,A_x$ مولفه‌های اسکالر بردار $\vec{A}$ باشند، یعنی $\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}$ و اگر طرفین رابطه‌ی اخیر در $\vec{i}$ ضرب شود، آنگاه:

$$\vec{\mathrm{A}}.\vec{\imath}=A_x(\vec{\imath}.\vec{\imath})+A_y(\vec{\jmath}.\vec{\imath})+A_z(\vec{k}.\vec{\imath})=A_x \tag{۳-۸}$$



شکل ۳-۶- بردار و تصویر سه مولفه‌ی آن در مختصات دکارتی



شکل ۳-۷- تصویر یک بردار در یک امتداد مشخص

زیرا $\vec{i}.\vec{i}=1\,,\ \vec{i}.\vec{j}=\vec{j}.\vec{k}=0$ بنابراین مولفه‌ی اسکالر A_x از ضرب داخلی بردارهای $\vec{A}.\vec{i}$ حاصل می گردد، بنابراین:

$$\vec{A}.\vec{i}=A_x=ACos\theta_x\ ,\ \vec{A}.\vec{j}=A_y=ACos\theta_y\ ,\ \vec{A}.\vec{k}=A_z=ACos\theta_z \qquad (۳-۹)$$

پس از قرار دادن در بردار $\vec{A}$ می‌توان نوشت:

$$\vec{A}=Acos\theta_x\vec{\imath}+cos\theta_y\vec{\jmath}+cos\theta_z\vec{k} \qquad (۳-۱۰)$$

کسینوس‌های موجود در رابطه‌ی اخیر، کسینوس‌های هادی هستند و چون اندازه‌ی بردار یکه مساوی واحد است، پس:

$$\cos^2\theta_x+\cos^2\theta_y+\cos^2\theta_z=1 \qquad (۳-۱۱)$$

همچنین از مقایسه‌ی مولفه‌های بردار $\vec{A}$ می‌توان نوشت:

$$\mathrm{Cos}\theta_x = \frac{A_x}{|\vec{A}|} \;, \mathrm{Cos}\theta_y = \frac{A_y}{|\vec{A}|} \;| \;, \mathrm{Cos}\theta_z = \frac{A_z}{|\vec{A}|} \qquad (۳-۱۲)$$

ضرب نقطه یا اسکالر

ضرب اسکالر یا نقطه‌ای دو بردار $\vec{A}$ و $\vec{B}$ به فرم $\vec{A}.\vec{B}$ تعریف می گردد، برابراست با حاصل‌ضرب اندازه‌ی دو بردار $\vec{B}, \vec{A}$ در کسینوس زاویه‌ی بین آنها یعنی:

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|cos\theta = ABcos\theta \;, 0 \leq \theta \leq \pi$$

(۳-۱۳)

همچنین حاصل ضرب این نوع ضرب اسکالر است نه بردار، قوانین زیر برای ضرب اسکالر معتبر است.

$\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A}$ قانون جابجایی

$\vec{A}.(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$ قانون توزیع پذیری

$p.(\vec{A}.\vec{B}) = (p\vec{A}).\vec{B} = \vec{A}.(p\vec{B}) = (\vec{A}.\vec{B})p$ یک اسکالر است p

$$\vec{i}.\vec{i} = \vec{j}.\vec{j} = \vec{k}.\vec{k} = 1 \,,\; \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0$$

$$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k} \,, \vec{B} = B_x\vec{\imath} + B_y\vec{\jmath} + B_z\vec{k}$$

$$\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$$

$$\vec{A}.\vec{A} = |\vec{A}|^2 = {A_x}^2 + {A_y}^2 + {A_z}^2$$

$$\vec{B}.\vec{B} = |\vec{B}|^2 = {B_x}^2 + {B_y}^2 + {B_z}^2$$

اگر $\overrightarrow{A.B}$ مساوی صفر و $\vec{A}, \vec{B}$ بردارهای صفر نباشند، آنگاه بردارهای $\vec{A}, \vec{B}$ بر هم عمود هستند.

ضرب خارجی یا برداری

ضرب خارجی یا برداری $\vec{A}\vec{B}$, به شکل $\vec{C} = \vec{A}\times\vec{B}$ تعریف می گردد که در آن $\vec{C}$ نتیجه‌ی حاصل‌ضرب دو بردار است. حاصل این نوع ضرب بردار می‌باشد، یعنی $\vec{C}$ بردار است. اندازه‌ی $\vec{A}\times\vec{B}$ به صورت حاصلضرب اندازه‌ی دو بردار $\vec{A}, \vec{B}$ بر ضرب در سینوس زاویه‌ی بین آنها می‌باشد. جهت بردار $\vec{A}\times\vec{B}$ عمود بر صفحه دو بردار $\overrightarrow{A, B}$ می‌باشد، چنانچه $\overrightarrow{A, B}$, $\vec{C}$ از قانون دست راست پیروی می کنند. بنابراین:

$$\vec{A}\times\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|sin\theta \times \vec{u} \quad = ABsin\theta \;\; \vec{u} \,, 0 \leq \theta \leq \pi \qquad (۳-۱۴)$$

که در آن u بردار یکه‌ی نشان دهنده‌ی جهت $\vec{A} \times \vec{B}$ می باشد. اگر $\vec{A}$ موازی $\vec{B}$ باشد، آنگاه $\sin\theta=0$ پس ضرب خارجی مساوی صفر است. قوانین زیر برای ضرب خارجی دو بردار معتبراست:

$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B} \times \vec{A}$ قانون جابجایی برای ضرب خارجی معتبر نیست

$\vec{A}\times(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C}$ قانون توزیع پذیری

$$p\,(\vec{A}\times\vec{B}) = (p\vec{A}) \times \vec{B}=A\times (p\vec{B}) = (\vec{A}\times\vec{B})\, p$$

که در آن p یک اسکالر است.

$$\vec{i} \times\vec{i} = \vec{j}\times\vec{j} =\vec{k}\times\vec{k} =0\ ,\ \vec{i}\times\vec{j} =\vec{k}\,,\ \vec{j}\times\vec{k} =\vec{i}\ ,\ \vec{k}\times\vec{i} =\vec{j}$$

اگر $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\ ,\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}$ آنگاه:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad (۳-۱۵)$$

$\left| \vec{A} \times \vec{B} \right|$ مساوی مساحت متوازی الاضلاعی است که با دو بردار ساخته می‌شود.

اگر $\vec{A} \times \vec{B}=0$ و $\vec{A}\vec{B}$, بردارهای مخالف صفر باشند، آنگاه دو بردار $\vec{A}\vec{B}$, موازیند.

حاصل‌ضرب سه گانه

حاصلضرب سه گانه‌ی اسکالر به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right).\vec{C} = \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \qquad (۳-۱۶)$$

که درآن $\vec{A} = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\ ,\vec{B} = B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}, \vec{C} = C_x\vec{i} + C_y\vec{j} + C_z\vec{k},$

این حاصل‌ضرب سه‌گانه مساوی حجم متوازی السطوحی است که با سه بردار ساخته می‌شود، و هنگامی که سیستم راست‌گرد نباشد، حجم منفی می‌گردد. همچنین می‌توان نشان داد:

$$\vec{A}.\left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B}.\left(\vec{C} \times \vec{A}\right) = \vec{C}.\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \qquad (۳-۱۷)$$

حاصل‌ضرب سه‌گانه (مختلط) برداری به فرم زیر نیز تعریف می‌گردد:

$$\vec{A}.\left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{A}.\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}.\vec{B}\right)\vec{C} \qquad (۳-۱۸)$$

از آنجایی که رابطه‌ی آخری برای ضرب مختلط برقرار است، می‌توان نشان داد:

$$\vec{A} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) \neq \left(\vec{A}.\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A} - \vec{B}\right)\vec{C} \qquad (۱۹-۳)$$

مشتقات بردارها

اگر برای هر مقدار در نظر گرفته شده به وسیله‌ی متغیر اسکالر u بردار متناظر $\vec{A}(u)$ وجود داشته باشد، آنگاه $\vec{A}(u)$ تابع برداری نسبت به u نامیده می‌شود. مشتق $\vec{A}(u)$ به فرم زیر تعریف می گردد:

$$\frac{d\vec{A}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\vec{A}(u+\Delta u) - \vec{A}(u)}{\Delta u} \qquad (۳-۲۰)$$

مشتق این تابع برداری در صورت وجود حد مهیا می گردد، اگر:

$$\vec{A}(u) = A_x(u)\vec{\imath} + A_y(u)\vec{\jmath} + A_z(u)\vec{k} \quad , \qquad \frac{d\vec{A}}{du} = \frac{dA_x}{du}\vec{\imath} + \frac{dA_y}{du}\vec{\jmath} + \frac{dA_z}{du}\vec{k}$$

به طور مشابه می‌توان مشتقات مراتب بالاتر را تعریف نمود. برای مثال مشتق مرتبه دوم $\vec{A}(u)$ در صورت وجود به فرم زیرتعریف می‌شود:

$$\frac{d^2\vec{A}}{du^2} = \frac{d^2A_x}{du^2}\vec{\imath} + \frac{d^2A_y}{du^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2A_z}{du^2}\vec{k} \qquad (۲۱-۳)$$

برای بردارها نیز مشابه حساب دیفرانسیل انتگرال، مشتق حاصل‌ضرب را می‌توان تعریف نمود. اگر $\emptyset(u)$ تابع اسکالر و $\vec{A}(u)$ و $\vec{B}(u)$ دو تابع برداری باشند، آنگاه:

$$\frac{d}{du}(\emptyset\vec{A}) = \emptyset\frac{d\vec{A}}{du} + \frac{d\emptyset}{du}\vec{A} \qquad (۲۲-۳)$$

$$\frac{d}{du}(\vec{A}.\vec{B}) = \vec{A}.\frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du}\vec{B} \qquad \text{مشتق ضرب داخلی دو تابع} \qquad (۲۳-۳)$$

$$\frac{d}{du}(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B} \qquad \text{مشتق ضرب خارجی دو تابع} \qquad (۲۴-۳)$$

انتگرال توابع برداری

فرض کنید $\vec{A}(u) = A_x(u)\vec{\imath} + A_y(u)\vec{\jmath} + A_z(u)\vec{k}$ تابع برداری از u باشد، آنگاه انتگرال نامعین از $\vec{A}(u)$ به فرم زیر تعریف می گردد:

$$\int \vec{A}(u)du = \vec{\imath}\int A_x(u)du + \vec{\jmath}\int A_y(u)du + \vec{k}\int A_z(u)du \qquad (۲۵-۳)$$

اگر تابع برداری $\vec{B}(u)$ وجود داشته باشد به طوری که $\vec{A}(u) = \frac{d}{du}\{\vec{B}(u)\}$ آنگاه:

$$\int \vec{A}(u)du = \int \frac{d}{du}\{\vec{B}(u)\}du = \vec{B}(u) + C \qquad (۲۶-۳)$$

که درآن C ثابت برداری دلخواه مستقل از u می‌باشد. انتگرال معین از $u=\alpha$ تا $u=\beta$ مشابه حساب و دیفرانسیل توابع حقیقی می‌باشد، یعنی:

$$\int_{\alpha}^{B} \vec{A}(u)\,du = \int_{\alpha}^{B} \frac{d}{du}\{\vec{B}(u)\}du = \left[\vec{B}(u) + C\right]_{\alpha}^{\beta} = \vec{B}(\beta) - \vec{B}(\alpha) \qquad (۳\text{–}۲۷)$$

سرعت

فرض کنید که ذره‌ای در راستای مسیر C نشان داده شده (شکل ۳–۸) حرکت می‌کند. اگر بردار موقعیت در زمان t برابر $\vec{r} = \vec{r}(t)$ باشد، در حالی‌که بردار موقعیت نقطه‌ی Q در زمان $t+\Delta t$ به فرم $\vec{r} + \Delta\vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t)$ می‌باشد، آنگاه سرعت ذره در نقطه‌ی P عبارت است از:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \qquad (۳\text{–}۲۸)$$

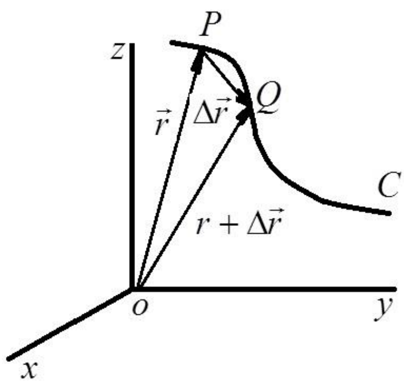
$$z(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \qquad (۳\text{–}۲۹)$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{x}}{dt}\vec{i} + \frac{d\vec{y}}{dt}\vec{j} + \frac{d\vec{z}}{dt}\vec{k} \qquad (۳\text{–}۳۰)$$

اندازه‌ی سرعت تندی نام دارد و به فرم زیر تعیین می‌گردد:

$$v = |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2} = \frac{ds}{dt} \qquad (۳\text{–}۳۱)$$

S طول قوسی است که در راستای C از نقطه‌ی اولیه تا نقطه‌ی P اندازه‌گیری شود.



شکل ۳–۸– مسیر ذره در دستگاه مختصات دکارتی

شتاب

اگر $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ سرعت ذره باشد، شتاب به فرم زیر تعریف می‌شود:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \tag{۳۲-۳}$$

بر حسب $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$ شتاب و اندازه‌ی آن به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{\imath} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{\jmath} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

$$a = |\vec{a}| = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2} \tag{۳۳-۳}$$

شتاب مماسی و قائم

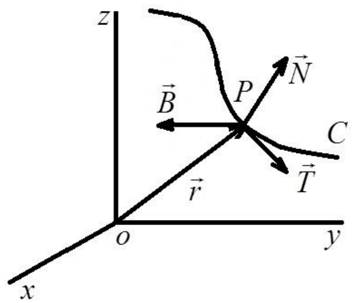
فرض کنید ذره P با بردار موقعیت $\vec{r} = \vec{r}(t)$ در راستای منحنی C مطابق شکل ۳-۹ حرکت می‌کند. برای ذره‌ی نامبرده، سیستم مختصات دستگاه دکارتی در نظر بگیرید. بردار یکه‌ی مماسی را $\vec{T}$، بردار نرمال یکه را $\vec{N}$ و بردار دو قائم $\vec{B}$ را بر روی C فرض کنید که در آن

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} \;, \vec{N} = \frac{d\vec{T}}{ds} \;, \vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} \tag{۳۴-۳}$$

S طول قوسی از نقطه‌ی اولیه تا نقطه‌ی P و B شعاع انحنای C در P می‌باشد. عکس شعاع انحناء، انحناء نام دارد و $X = \frac{1}{R}$ می‌توان نشان داد که شتاب در راستای C برابر است با:

$$\vec{a} = \frac{dx}{dt}\vec{\mathrm{T}} + \frac{v^2}{R}\vec{\mathrm{N}} \tag{۳۵-۳}$$

جمله‌های اول و دوم سمت راست رابطه‌ی بالا مولفه‌های مماسی و قائم (شتاب مرکزی) شتاب هستند.



شکل۳-۹- مسیر ذره به همراه بردارهای یکه‌ی مماس، بردار نرمال یکه و بردار دو قائم بر روی آن

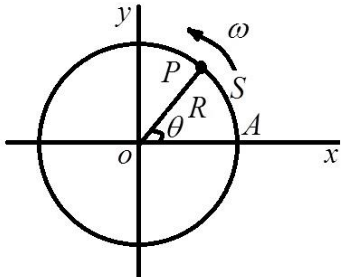
حرکت دایره‌ای

فرض کنید ذره‌ی P بر روی مسیر C به شعاع R حرکت می‌کند. اگر s طول قوسی اندازه‌گیری شده در راستای C از A تا P و θ زاویه‌ی متناظر آن در مبدا O باشد (شکل ۳-۱۰)، آنگاه $s=R\theta$ بنابراین اندازه‌های مماسی سرعت و شتاب به فرم زیر تعیین می‌شوند:

$$v = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} = R\omega \qquad \text{سرعت خطی} \tag{۳-۳۶}$$

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} = R\alpha \tag{۳-۳۷}$$

که $\omega = \frac{d\theta}{dt}$ و $\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ به ترتیب سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای هستند. بنابراین شتاب نرمال $\frac{V^2}{R} = \omega^2 R$ می‌باشد.



شکل۳-۱۰- حرکت ذره بر روی مسیر دایره‌ای

نوتاسیون مشتقات زمانی

بعضی اوقات برای سادگی از اپراتور دیفرانسیلی صرفنظر کرده و از نشانه‌ی نقطه (دات) بالای متغیر استفاده می‌کنند و برای مشتق دوم از دو نقطه استفاده می‌گردد، بنابراین:

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{v}}{dt} \quad \text{و} \quad \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ , \quad \dot{\vec{v}} = \frac{d\vec{v}}{dt} \tag{۳-۳۸}$$

گرادیان، دیورژانس و کرل

اگر برای هر نقطه‌ی (x,y,z) در سیستم مختصات دکارتی متناظر بردار $\vec{A}$ بنویسید $\vec{A} = \vec{A}(x,y,z)$ بدین معنی است که $\vec{A}$ یک تابع برداری از متغیرهای x,y,z می‌باشد. $\vec{A}(x,y,z)$ یک میدان برداری است. به طور مشابه تابع اسکالر $\emptyset(x,y,z)$ یک میدان اسکالر است. اپراتور دیفرانسیل برداری دل را به فرم زیر تعریف نموده و کمیت‌های بسیار مهم زیر از آن نتیجه می‌شود:

$$\vec{V} = \frac{d}{dt}\vec{\iota} + \frac{d}{dt}\vec{\jmath} + \frac{d}{dt}\vec{k} \qquad (۳-۳۹)$$

الف) گرادیان

$$\vec{\nabla}\Phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\iota} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)\Phi = \frac{d\Phi}{dx}\vec{\iota} + \frac{d\Phi}{dy}\vec{\jmath} + \frac{d\Phi}{dz}\vec{k} \qquad (۳-۴۰)$$

که حاصل آن یک بردار است و به فرم $grad\ \Phi$ نیز نوشته می‌شود.

ب) دیورژانس: حاصل‌ضرب داخلی اپراتور دل در بردار $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ می‌باشد، یعنی:

$$\vec{\nabla}.\overrightarrow{\mathrm{A}} = div\overrightarrow{\mathrm{A}} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{\iota} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).\left(A_x\vec{\iota} + A_y\vec{\iota} + A_z\vec{\iota}\right) \qquad (۳-۴۱)$$

$$div\overrightarrow{\mathrm{A}} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \qquad (۳-۴۲)$$

حاصل‌ضرب داخلی (دیورژانس) یک اسکالر است.

ج) کرل: حاصل‌ضرب خارجی اپراتور دل و بردار دلخواه $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ می‌باشد.

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = curl\vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\vec{\mathrm{i}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\vec{\mathrm{j}} + \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\vec{\mathrm{k}}\right)\times\left(A_x\vec{\iota} + A_y\vec{\iota} + A_z\vec{\iota}\right) =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{\mathrm{i}} & \vec{\mathrm{k}} & \vec{\mathrm{k}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{\iota} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{\jmath} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k}$$

(۳-۴۳)

نتیجه‌ی کرل (چرخش)، یک بردار است. دو نتیجه‌ی بسیار مهم را بین ضرب‌های داخلی و خارجی اپراتور و بردار $\vec{A}$ و اسکالر Φ به شکل زیر می‌توان نتیجه گرفت:

$$diVcurl\vec{A} = \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = 0 \qquad (۳-۴۴)$$

$$curlgrad\emptyset = \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\emptyset\right) = 0 \qquad (۳-۴۵)$$

محاسبه‌ی انحناء

با در نظرگرفتن $\vec{r}(t) = x(t)\vec{\iota} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}$ به عنوان بردار موقعیت ذره‌ی p، شتاب آن به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$\ddot{\vec{r}}(t) = \vec{a}(t) = \frac{ds}{dt}\vec{T} + k\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\vec{N} \qquad (۳-۴۶)$$

با در نظر گرفتن k , $\vec{N}, \vec{T}$ به ترتیب بردار یکه‌ی مماس، بردار قائم اصلی و انحنا هستند. طبق تعریف

$$k=\left|\frac{d\vec{r}}{ds^2}\right|=\left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| \qquad (۳-۴۷)$$

سرعت متحرک ذره برابر است با:

$$\dot{\vec{r}}(t)=\vec{v}(t)=|\vec{v}(t)|\vec{T}=\left|\vec{\dot{r}}(t)\right|\vec{T} \qquad (۳-۴۸)$$

حاصل‌ضرب خارجی $\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)$ تعیین می‌شود.

$$\vec{v}(t)\times a(t)=k(\frac{ds}{dt})^2\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|\vec{B} \quad ,\left|\vec{B}\right|=1 \text{ و } \vec{\dot{r}}(t)=\frac{ds}{dt}$$

$$|\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)|=k(\frac{ds}{dt})^3 \ \rightarrow k=\frac{|\vec{v}(t)\times\vec{a}(t)|}{(\frac{ds}{dt})^3}=\frac{\left|\dot{\vec{r}}(t)\right|\times\left|\vec{\ddot{r}}(t)\right|}{\left|\vec{\dot{r}}(t)\right|^3}$$

استخراج رابطه‌ی (۳-۴۶) جهت رفع ابهام ضروری به نظر می‌رسد. با توجه به شکل ۳-۱۱، بردار شتاب به مجموع دو بردار $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ تجزیه می گردد. $\vec{a}(t)=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$

حال از قاعده‌ی زنجیری استفاده می‌شود:

$$\vec{a}(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)=\frac{d}{ds}\left(\frac{d\vec{r}}{ds}.\frac{ds}{dt}\right).\frac{ds}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}(\frac{ds}{dt})^2+\frac{dt}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}$$
$$=\frac{d^2s}{dt^2}.\vec{T}+(\frac{ds}{dt})^2.\left(\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right)$$

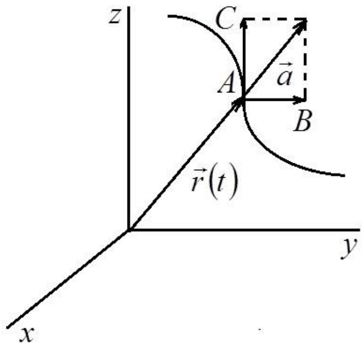
حال از دو طرف رابطه‌ی زیر نسبت به s مشتق گرفته می‌شود:

$$\vec{T}.\vec{T}=\frac{d\vec{r}}{ds}.\frac{d\vec{r}}{ds}=1 \qquad , \qquad \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}.\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{d^2r}{ds^2}.\vec{T}=0$$

بنابراین بردار $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ بر بردار مماس $\vec{T}$ عمود است، پس اگر مطابق شکل ۳-۱۱ از نقطه‌ی A رسم شود، روی صفحه‌ی قائم خواهد بود. بردار یکه‌ی $\vec{N}$ را به صورت $\vec{T}=\frac{\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}}{\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|}$ تعریف نموده و آن را بردار قائم اصلی بر جسم در نقطه $r(t)=A$ می‌نامند. بنابراین با جایگذاری $\vec{N}$ در رابطه‌ی شتاب می‌توان نوشت:

$$\vec{a}(t)=\frac{d^2s}{dt^2}\vec{T}+(\frac{ds}{dt})^2\left|\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right|\vec{N} \qquad (۳-۴۹)$$

بنابراین بردار $\vec{a}(t)$ به صورت مجموع دو بردار تجزیه می گردد.



شکل۳-۱۱- بردار شتاب و تجزیه‌ی آن به دو مولفه بر روی مسیر در دستگاه مختصات دکارتی

مختصات قطبی در فضا

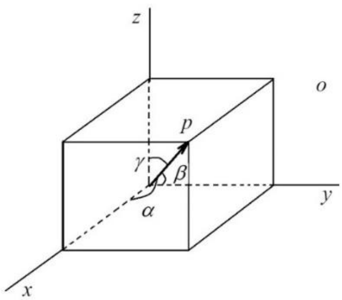
مختصات قطبی نقطه‌ی p در فضا مطابق شکل ۳-۱۲ عبارتند از (r,α,β,γ) که در آن r فاصله‌ی op ، γ,β,α نیز زوایای هادی op (زاویه‌هایی که op با محورهای z,y,x می‌سازد) هستند. روابطی که مختصات قطبی و قائم (دکارتی) نقطه p را به هم ارتباط می‌دهند، عبارتند از:

$$x = rcos\alpha \quad ,y = cos\beta \quad ,z = rcos\gamma \tag{۳-۵۰}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{۳-۵۱}$$

$$cos\alpha = \frac{x}{r} \quad ,cos\beta = \frac{y}{r} \quad ,cos\gamma = \frac{z}{r} \tag{۳-۵۲}$$

چون $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$ چهار مختصات قطبی مستقل از هم نیستند، برای مثال اگر α وβ به ترتیب مساوی ۴۵ و۶۰ درجه باشند، آنگاه $cos\gamma = \frac{1}{4}$ چون $\gamma =$ یا $\gamma = 120°$ $60°$ پس $\gamma \leq 180°$



شکل ۳-۱۲- دستگاه مختصات قطبی در فضا

مختصات استوانه‌ای

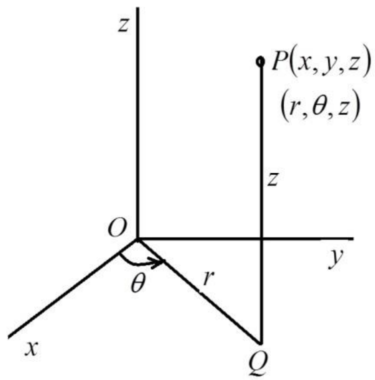
در دستگاه مختصات استوانه‌ای، نقطه‌ی دلخواه $P(x,y,z)$ با مختصات (r,θ,z) مشخص می‌شود که در اینجا (r,θ) مختصات قطبی نقطه‌ی Q (حالت دو بعدی) یعنی تصویر نقطه‌ی P روی صفحه‌ی xy است.
این مختصات به صورت (r,θ,z) نوشته می‌شود (شکل ۳-۱۳).
رابطه‌ی بین مختصات استوانه‌ای و مختصات قائم چنین است:

$$x = rcos\alpha \quad ,y = rsin\theta \quad ,z = z \tag{۵۳-۳}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad , \quad \theta = tan^{-1}\frac{y}{x} \tag{۵۴-۳}$$

قابل ذکر است که مقدار زاویه‌ی θ محدود نیست، بنابراین r مانند مختصات قطبی می‌تواند مقادیر منفی را نیز اختیار کند. المان حجم در مختصات استوانه‌ای به فرم زیر تعیین می‌گردد:

$$dV = dxdydz = (dxdy)dz = dAdz = (rdrd\theta)dz \tag{۳-۵۵}$$



شکل۳-۱۳- مختصات نقطه‌ی دلخواه در دستگاه مختصات استوانه‌ای

مختصات کروی

اگر $P(x,y,z)$ نقطه‌ای دلخواه در فضا و Q تصویر آن روی صفحه‌ی xy باشد، فاصله‌ی OP را مانند مختصات قبلی با r و زاویه‌ی zOP را با نماد φ نشان می‌دهند. زاویه‌ی φ به صورت زاویه‌ای مثبت و φ بین صفر و ۱۸۰ درجه در نظرگرفته می‌شود (شکل۳-۱۴). زاویه‌ی xOQ با نماد θ نشان داده می‌شود. نمادهای r,θ,φ به مختصات کروی نقطه‌ی P موسومند که به صورت $P(r,\theta,\varphi)$ نمایش داده می‌شود

که در آن r شعاع حامل، θ زاویه با محور طول و زاویه‌ی φ متمم عرض نقطه‌یP می‌باشد و زاویه‌ی θ می‌تواند هر مقدار دلخواه را اختیار کند. از مثلث قائم الزاویه‌ی OPQ می‌توان نوشت:

$$OQ = rsin\varphi \quad ,QP = rcos\varphi \tag{۵۶-۳}$$

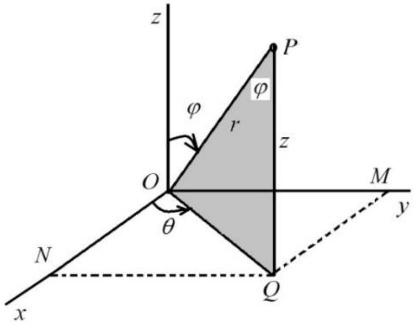
با توجه به مثلث قائم الزاویه‌ی ONQ: $ON = OQCos\theta$, $NQ = OQSin\theta$ بنابراین:

$$x = ON = rsin\varphi\ cos\theta, y = NQ = OM = rsin\varphi\ .\ sin\theta\ \ , z = QP = rcos\varphi \tag{۵۷-۳}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ , \theta = tan^{-1}\frac{y}{x}\ , \varphi = cos^{-1}\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = cos^{-1}\frac{z}{r}$$

در اکثر مسائل مربوط به محاسبه‌ی مساحت سطوح یا محاسبه‌ی حجم زیر یک سطح، مطابق روش‌های گفته شده در حساب دیفرانسیل و انتگرال، عمل محاسبه با استفاده از مختصات استوانه‌ای و کروی بسیار ساده انجام می‌شود، خصوصاً هنگامی که سطح مرزی، سطحی دوار است. المان حجم نیز در این دستگاه به فرم زیر تعیین می‌شود:

$$dV = dxdydz = (rdxrd\theta)(rsin\Phi)d\Phi = r^2 sin\varphi\ .\ drd\theta d\varphi \tag{۵۸-۳}$$



شکل۳-۱۴- مختصات نقطه‌ی دلخواه در دستگاه مختصات استوانه‌ای

لاپلاسین

حاصل‌ضرب داخلی دو بردار دل را لاپلاسین می‌نامند.

$$\nabla^2 = \vec{\nabla}.\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right).\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

بنابراین لاپلاسین سه بعدی تابعی مانند u در دستگاه دکارتی به فرم زیر نوشته می‌شود.

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \tag{۵۹-۳}$$

با استفاده از روابط حاکم بین مختصات استوانه‌ای و کروی با مختصات دکارتی (کارتزین) و بکارگیری مشتقات جزئی زنجیری، می‌توان لاپلاسین را برای این سیستم‌های مختصات به فرم زیر نوشت:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{p}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + \frac{d^2 u}{dz^2}$$
(۶۰-۳)

مختصات استوانه‌ای

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{du}{d\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\cdot\frac{d^2 u}{d\varphi^2} \qquad (۶۱\text{-}۳)$$

مختصات کروی

انتگرال منحنی الخط

انتگرال منحنی الخط نسبت به طول قوس (انتگرال منحنی الخط نوع اول)

فرض کنید تابع $f(x,y)$ در هر نقطه از قوس AB از منحنی هموار C به معادله‌ی $y=g(x)$, $a\leq x\leq b$ تعریف شده و پیوسته باشد، قوس AB با نقاط دلخواه $A=p_0, p_1, p_2, .., p_n=B$ به n قوس جزئی تقسیم می‌شود (شکل ۳-۱۶). فرض کنید Δs_m طول قوس A_m , A_{m-1} روی قوس جزئی mام اختیار و مقدار تابع $f(x_m,y_m)$ در طول Δs_m ضرب شده و مجموع $\sum_{m=1}^{\infty} f(x_m,y_m)\Delta s_m$ تشکیل گردد. اگر حد مجموع فوق وقتی که بیشترین مقدار Δs_m به سمت صفر میل می‌کند، موجود و این حد مستقل از نحوه‌ی تقسیم بندی و انتخاب نقطه‌ی (x_m , y_m) روی mامین قوس جزئی باشد، این حد را انتگرال منحنی الخط تابع $f(x,y)$ روی منحنی C از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B می‌نامند و آن را با نماد $\int_{AB} f(x,y)ds$ یا $\int_C f(x,y)ds$ نشان داده و با استفاده از رابطه‌ی زیر تعیین می‌گردد.

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_a^b f(x,g(x))\sqrt{1+g'^2(x)}\,dx \qquad (۶۲\text{-}۳)$$

اگر منحنی C به وسیله‌ی معادلات $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(t_1\leq t\leq t_2)$ مشخص شده باشد، آنگاه :

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{t_1}^{t_2} f\big(x(t),y(t)\big)\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,dt \qquad (۶۳\text{-}۳)$$

انتگرال منحنی‌الخط تابع $f(x,y,z)$ را می‌توان روی یک منحنی فضایی C تعیین نمود. انتگرال منحنی الخط تابع $f(x,y,z)$ را می‌توان با استفاده از معادلات پارامتری داده شده به فرم زیر محاسبه نمود.

$$x = x(t)\,, y = y(t)\,,\ \ z = z(t)\,, (t_1 \le t \le t_2)$$

$$\int_C\ f(x,y,z)ds = \int_{t_1}^{t_2} f\big(x(t),y(t),z(t)\big)\sqrt{\left[x'^2(t)\right]+\left[y'^2(t)\right]+\left[z'^2(t)\right]}\,\mathrm{dt}$$

(۶۴-۳)

اگر $\delta = f(x,y,z)$ چگالی میله‌ی باریک به شکل منحنی C باشد آنگاه $\int_C \delta ds$ برابر با جرم میله است.

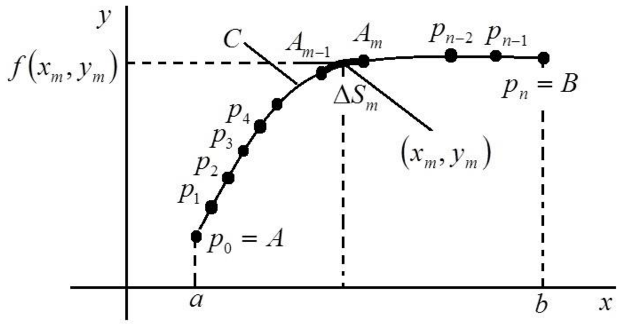
از خواص این نوع انتگرال می‌توان به موارد زیر اشاره نمود.

$$\int_{AB} f(x,y)ds = \int_{BA} f(x,y)ds \tag{۶۵-۳}$$

$$\int_C [f_1(x,y) \pm f_2(x,y)]\, ds = \int_C f_1(x,y)dS \pm \int_C f_2(x,y)ds \tag{۶۶-۳}$$

$$\int_C f(x,y)ds = \int_{C_1} f(x,y)ds + \int_{C_2} f(x,y)ds \tag{۶۷-۳}$$

منحنی به دو منحنی $C2$, $C1$ تقسیم می‌گردد.



شکل ۳-۱۶- منحنی هموار و نقاط تقسیم بر روی آن

انتگرال منحنی الخط نسبت به مختصات (انتگرال منحنی الخط نوع دوم)

فرض کنید توابع $P(x,y)$, $Q(x,y)$ در هر نقطه از قوس AB همواره C به معادله‌ی $y = g(x)$ و $a \le x \le b$ پیوسته باشد و Δxm و Δym تصاویر قوسی جزئی mام روی محورهای ox, oy باشند، نقطه‌ی دلخواه $(x_m.x_y)$ روی قوس جزئی mام انتخاب و مجموع زیر تشکیل می‌شود (شکل ۳-۱۷).

$$\sum_{m=1}^{n} p\,(x_m, y_m)\Delta x_m + Q(x_m, y_m)\Delta y_m \tag{۶۸-۳}$$

اگر حد مجموع فوق وقتی , $max\Delta x_m \to 0$ و $max\Delta y_m \to 0$ موجود و مستقل از نحوه‌ی تقسیم بندی و انتخاب نقطه (x_m,y_m) روی mامین قوس جزئی باشد، این حد را انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم می‌نامند. این نوع انتگرال با نماد زیر نشان داده می‌شود:

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{۳-۶۹}$$

انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم، کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = p(x,y)\vec{\imath} + Q(x,y)\vec{\jmath}$ روی مسیر AB می‌باشد (تعبیر مکانیکی). از خواص اساسی این نوع انتگرال به موارد زیر می‌توان اشاره نمود.

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = -\int_{BA} P(x,y)dx + Q(x,y)dy \tag{۳-۷۰}$$

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} P(x,y)dx + \int_{AB} Q(x,y)dy \tag{۳-۷۱}$$

انتگرال منحنی‌الخط نوع دوم را می‌توان از رابطه‌ی زیر تعیین نمود.

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b \left[P\big(x,g(x)\big) + g'(x)Q(x,g(x))\right] dx \tag{۳-۷۲}$$

اگر منحنی C دارای معادلات پارامتری ۳-۷۳ باشد، آنگاه:

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), t_1 \le t \le t_2 \tag{۳-۷۳}$$

$$\int_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_1}^{t_2} P\big(x(t), y(t).x'(t) + Q\big(x(t), y(t).x'(t)\big)\big)dt \tag{۳-۷۴}$$

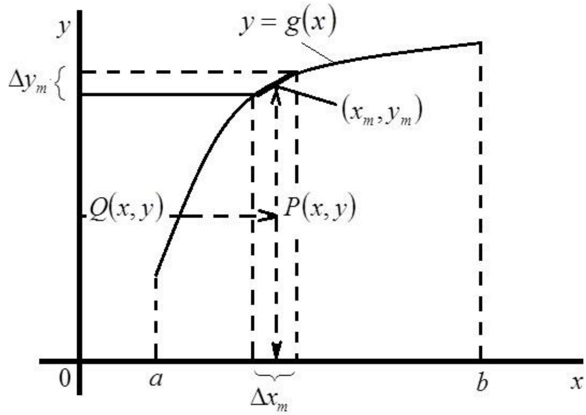
توجه مهم:

کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F} = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ روی منحنی فضایی با معادلات پارامتری ذکر شده باشد، به فرم زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\int P(x,y,z)\,dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz = \\ \int_{t_1}^{t_2} \Big[P\Big(x(t), y(t), z(t))x'(t)\Big) + Q\big(x(t), y(t), z(t)\big).y'(t) \\ + R\big(x(t), y(t), z(t)\big).z'(t)\Big]\,dt\end{aligned}$$

اگر منحنی C به فرم $C: \vec{R}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath} + z(t)\vec{k}\ , t_1 \le t \le t_2$ مشخص شده باشد، در این صورت $d\vec{R} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\imath} + dz\vec{\imath}$

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{R} = \int_C \mathrm{P}(x, y, z)\mathrm{dx} + \mathrm{Q}(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz \quad (۷۵-۳)$$



شکل ۳-۱۷- منحنی هموار به همراه تابع دو متغیره جهت محاسبه‌ی انتگرال منحنی‌الخط

تعریف: میدان برداری $\vec{F}(x, y) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j}$ را پایستار (نگهدار، کامل، کنسرواتیو) گویند، هرگاه: $\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}$ و میدان برداری:

$$\vec{F}(x, y, z) = p(x, y, z)\vec{i} + Q(x, y, z)\vec{j} + R(x, y, z)\vec{k}$$

را نگهدار گویند، هرگاه رابطه‌های زیر برقرار باشد.

$$\frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial z} = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x}, \quad \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial z}$$

قضیه: اگر میدان برداری $\vec{F}$ نگهدار باشد، آنگاه انتگرال منحنی‌الخط روی هرمسیر بسته‌ی C برابر صفر است.

قضیه: اگر میدان برداری $\vec{F}$ نگهدار باشد، آنگاه انتگرال منحنی الخط مستقل از مسیر است.

قضیه‌ی گرین: فرض کنید R یک ناحیه منظم در صفحه‌ی xy باشد که به منحنی بسته به طور قطعه‌ای هموار C محدود است و O دارای جهت نسبت مثلثاتی است. اگر توابع $P(x,y)$ و $Q(x,y)$ پیوسته و دارای مشتق نسبی مرتبه اول پیوسته در ناحیه‌ی شامل R باشد، آنگاه:

$$\oint_C P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy = \iint_R \left[\frac{\partial Q(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial P(x,y,z)}{\partial y}\right]dydx \quad (۷۶-۳)$$

قضیه: اگر R یک ناحیه‌ی منظم در صفحه‌ی xy و محصور به منحنی بسته و به طور قطعه‌ای هموار C باشد و C دارای جهت مثبت مثلثاتی باشد، آنگاه:

$$\text{مساحت ناحیه } R = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$$

توجه: اگر C منحنی بسته $r=f(\theta)$ باشد، آنگاه $\text{مساحت ناحیه‌ی R} = \frac{1}{2}\oint_C r^2 d\theta$

جرم سیم: اگر منحنی C به صورت یک سیم نازک فرض شود که چگالی آن در هر نقطه توسط تابع اسکالر $f(x,y,z)$ نشان داده شود، جرم سیم با استفاده از انتگرال منحنی الخط $M = \int_C f(x,y,z)\,ds$ بر حسب طول قوس بیان می‌گردد.

مختصات مرکز ثقل M

اگر مختصات مرکز ثقل سیم به فرم $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ نشان داده شود، آنگاه طول، عرض و ارتفاع مرکز ثقل به شکل زیر تعیین می‌شود:

$$\bar{x} = \frac{1}{M}\int_C xf(x,y,z)\,ds\,,\ \bar{y} = \frac{1}{M}\int_C yf(x,y,z)\,ds\ ,\ \bar{z} = \frac{1}{M}\int_C zf(x,y,z)\,ds \quad (۷۷-۳)$$

ممان اینرسی سیم: اگر فاصله‌ی عمودی نقطه $A(x,y,z)$ از سیم C تا محور l برابر $d(x,y,z)$ باشد آنگاه ممان اینرسی سیستم C نسبت به محور l که با I_l نشان داده می‌شود و از رابطه‌ی زیر تعیین می‌گردد:

$$I_l = \int_C d^2(x,y,z) f(x,y,z) ds \quad (۷۸-۳)$$

که در آن $f(x,y,z)$ چگالی در نقطه‌ی (x,y,z) می باشد، اگر ممان اینرسی سیستم نسبت به محور x,y,z با $I_x, I_y\ ,\ I_z$ باشند، آنگاه:

$$I_x = \int_C \left(y^2+z^2\right) f(x,y,z)\,ds \quad (۷۹-۳)$$

$$I_y = \int_C \left(x^2+z^2\right) f(x,y,z)\,ds \quad (۸۰-۳)$$

$$I_z = \int_C \left(y^2+x^2\right) f(x,y,z)\,ds \quad (۸۱-۳)$$

قضیه: فرض می‌شود که تابع اسکالر f در مجموعه‌ی باز S به طور پیوسته مشتق پذیر بوده و $\vec{\nabla} f$ گرادیان این تابع باشد و $\vec{A}$ و $\vec{X}$ دو نقطه از مجموعه‌ی S باشند، به قسمتی که بتوان آنها را توسط منحنی قطعه قطعه

هموار که داخل s قرار دارد به هم وصل نمود. اگر این منحنی را C نامیده و معادله آن $\vec{R}$ باشد که در فاصله‌ی $[a,b]$ تعریف شده و $\vec{R}(a) = \vec{A}$ و $\vec{R}(b) = \vec{X}$ باشد، $\int_C \vec{\nabla} f . d\vec{R} = f(\vec{X}) - f(\vec{A})$

این رابطه شبیه رابطه‌ی اساسی انتگرال می‌باشد، یعنی: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$

قضیه: اگر g,f توابع اسکالری با مشتقات جزئی پیوسته مرتبه اول در میدان باز s در صفحه‌ی xy باشند و R میدانی در s باشد که نقاط مرزی آن یک منحنی بسته‌ی ساده C باشد، آنگاه:

$$\oint_C f \frac{\partial g}{\partial n} ds = \iint_R \nabla^2 g dxdy \tag{۸۲-۳}$$

$$\oint_C f \frac{\partial g}{\partial n} ds = \iint_R \left(f\nabla^2 g + \nabla f . \nabla g \right) dxdy \tag{۸۳-۳}$$

$$\oint_C \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) ds = \iint_R \left(f\nabla^2 g + g\nabla^2 f \right) dxdy \tag{۸۴-۳}$$

اگر g,f در میدان R ها رمونیک باشند، یعنی $\nabla^2 f = \nabla^2 g = 0$ آنگاه:

$$\oint_C f \frac{\partial g}{\partial n} ds = \iint_C g \frac{\partial f}{\partial n} ds \tag{۸۵-۳}$$

قضیه واگرایی و رابطه‌ی استوکس

قضیه واگرایی یا دیورژانس: اگر $\vec{F}(x,y,z)$ و $\vec{\nabla}.\vec{F}$ در رویه منظم بسته‌ی s و نقاط داخلی آن V پیوسته و $\vec{n}$ بردار یکانی قائم خارجی بر s در هر نقطه از آن باشد، آنگاه:

$$\iint_s \vec{F}.\vec{n} ds = \iiint_V \vec{\nabla}.\vec{F} dV = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dV \tag{۸۶-۳}$$

که در آن: $\vec{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\vec{i} + Q(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$

رابطه‌ی استروگرادوسکی: اگر R,Q,P, $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ توابعی پیوسته باشند، آنگاه قضیه‌ی دیورژانس به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} &\iint_s \vec{F}.\vec{n} ds = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dxdydz = \\ &\iint_s \left(Pdydz + Qdxdz + Rdxdy \right) = \iiint_V \left(PCos\alpha + QCos\beta + RCos\gamma \right) ds \end{aligned} \tag{۸۷-۳}$$

که در آن: $\vec{n} = Cos\alpha\vec{i} + Cos\beta\vec{j} + Cos\gamma\vec{k}$

نکات مهم

۱- اگر در هر نقطه از رویه‌ی بسته‌ی s بردار $\vec{F}(x,y,z)$ بر سطح s عمود باشد، $\iiint_V \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)dV = 0$

۲- اگر s رویه‌ای بسته باشد، $\iint_s \vec{n}\left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right)ds = 0$

۳- اگر $|V|$ حجم فضای محصور شده رویه‌ی بسته s باشد، با استفاده از قضیه دیورژانس می‌توان نشان داد:

$$\iint_s \vec{F}.\vec{n}ds = 3|V|\ ,\ \iint_s \vec{\nabla}r^2.\vec{n}ds = 6|V|,\ \iint_s r^n\vec{F}.\vec{n}ds = (n+3)\iiint_V r^n dV\ ,\ (n\neq -3)$$

که در آن $\vec{n}$ بردار واحد نرمال خارجی رویه‌ی s و

$$\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad , r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

رابطه‌ی استوکس: هرگاه توابع $P = P(x,y,z)\ ,Q = Q(x,y,z), R = R(x,y,z)$ و مشتقات نسبی مرتبه اول آنها بر سطح s پیوسته باشد و C منحنی بسته‌ای باشد که سطح s را در بردارد، آنگاه:

$$\oint_C (Pdx + Qdy + Rdz) =$$

$$\iint_s \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)Cos\alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)Cos\beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)Cos\gamma \right] ds \qquad (۸۸-۳)$$

که در آن $cos\alpha\ , cos\beta, cos\gamma$ کسینوس‌های هادی بردار قائم بر سطح s هستند. انتگرال منحنی‌الخط $\vec{F}$ روی منحنی بسته‌ی C عبارت است از:

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{R} = \oint_C (Pdx + Qdy + Rdz) \qquad (۸۹-۳)$$

همچنین اگر توابع R,Q,P و مشتقات نسبی مرحله اول آنها بر سطح رویه منظم s که به وسیله منحنی بسته C محصور شده پیوسته باشند و $\vec{n}\ , C: \vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ بردار یکانی قائم خارجی بر s باشد،

$$\oint_C \vec{F}.d\vec{R} = \iint_s \left(\vec{\nabla}\times\vec{F}\right).\vec{n}ds = \iint_s Curl\vec{F}.\vec{n}ds \qquad (۹۰-۳)$$

یادآوری: شرط لازم و کافی برای آنکه $A_1dx + A_2dy + A_3dz = d\Phi$ یک دیفرانسیل کامل باشد آن است که $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \vec{0}$ که در آن $\vec{A} = A_1\vec{I} + A_2\vec{J} + A_3\vec{K}$

مسائل حل شده

مثال ۱ : نشان دهید $\vec{A}.\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$

حل: فرض کنید $\vec{a}$ بردار یکه در جهت $\vec{A}$ باشد، آنگاه تصویر $\vec{C}$ روی $\vec{A}$ بعلاوه‌ی تصویر $\vec{B}$ روی $\vec{A}$ مساوی تصویر بردار $(\vec{B}+\vec{C})$ روی $\vec{A}$ می‌باشد.

$$\left(\vec{B}+\vec{C}\right).\vec{a}=\vec{B}.\vec{a}+\vec{C}.\vec{a}$$

با ضرب طرفین در $\left|\vec{A}\right|$:

$$\left(\vec{B}+\vec{C}\right).\left|\vec{A}\right|\vec{a}=\vec{B}.\left|\vec{A}\right|.\vec{a}+\vec{C}.\left|\vec{A}\right|\vec{a}$$

و همچنین $\left|\vec{A}\right|\vec{a}=\vec{A}$ بنابراین:

$$\left(\vec{B}+\vec{C}\right).\vec{A}=\vec{B}.\vec{A}+\vec{C}.\vec{A}$$

حال با استفاده از قانون جابجایی برای ضرب داخلی (نقطه‌ای):

$$\left(\vec{B}.\vec{A}=\vec{A}.\vec{B}\,,\vec{C}.\vec{A}=\vec{A}.\vec{C}\ \right)\quad \text{و}\quad \vec{A}.\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\vec{C}$$

مثال۲: اگر $\vec{B}$ و $\vec{A}$ توابع برداری دیفرانسیل پذیر بر حسب u باشند، آنگاه:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{du}}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)=\vec{A}.\frac{d\vec{B}}{du}+\frac{d\vec{A}}{du}.\vec{B}$$

حل: روش اول

$$\frac{d}{du}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\left(\vec{A}+\Delta\vec{A}\right)\left(\vec{B}+\Delta\vec{B}\right)-\vec{A}.\vec{B}}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\vec{A}.\vec{B}+\vec{A}.\Delta\vec{B}+\Delta\vec{A}.\vec{B}+\Delta\vec{A}.\Delta\vec{B}-\vec{A}.\vec{B}}{\Delta u}$$

$$\lim_{\Delta u\to 0}\left(\vec{A}\frac{\Delta\vec{B}}{\Delta u}+\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta u}.\vec{B}+\frac{\Delta\vec{A}}{\Delta u}.\Delta\vec{B}\right)=\vec{A}.\frac{d\vec{B}}{uu}+\frac{d\vec{A}}{du}.\vec{B}$$

روش دوم: فرض کنید

$$\vec{A}=A_x\vec{\imath}+A_y\vec{\jmath}+A_z\vec{k}\ \ ,\quad \vec{B}=B_x\vec{\imath}+B_y\vec{\jmath}+\vec{\imath}+B_z\vec{k}$$

$$\frac{d}{du}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)=\frac{d}{du}\left(A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z\right)=$$

$$(A_x\frac{dB_x}{du}+A_y\frac{dB_y}{du}+A_z\frac{dB_z}{du})+(\frac{dA_x}{du}B_x+\frac{dA_y}{du}B_y+\frac{dA_z}{du}B_z)$$

$$=\vec{A}.\frac{d\vec{B}}{du}+\frac{d\vec{A}}{du}.B$$

مثال ۳: اگر $\vec{T}$ بردار مماس واحد یکه منحنی فضایی C باشد. نشان دهید که $\frac{d\vec{T}}{ds}$ بر $\vec{\mathrm{T}}$ عمود است.

حل: از آنجایی که $\vec{T}$ بردار یکه است بنابراین : $\vec{T}.\vec{T} = 1$ با دیفرانسیل‌گیری از طرفین نسبت به s:

$$\vec{T}.\frac{d\vec{T}}{ds} + \frac{d\vec{T}}{ds}.T = 0 \to 2\vec{T}.\frac{d\vec{T}}{ds} = 0 \ \to \vec{T}.\frac{d\vec{T}}{ds} = 0$$

این دو بردار بر هم عمود هستند (زیرا ضرب داخلی آنها صفر است).

مثال ٤: نشان دهید که شتاب $\vec{a}$ ذره‌ای که در مسیر منحنی فضایی با سرعت v حرکت می‌کند از رابطه‌ی $\vec{a} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$ حاصل می‌شود که در آن T بردار مماس یکه‌ی منحنی فضایی و N نرمال اصلی یکه و R شعاع انحنا می‌باشد.

حل: اندازه‌ی $\vec{v}$ ضرب و بردار مماس یکه‌ی $\vec{T}$ مساوی سرعت v یعنی $\vec{\mathrm{v}} = v\vec{T}$ با دیفرانسیل‌گیری از طرفین:

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{\mathrm{v}}}{\mathrm{dt}} = \frac{d}{dt}\left(v\vec{T}\right) = \frac{dv}{dt}\vec{T} + v\frac{d\vec{T}}{dt}\ ,\ \ \frac{d\vec{T}}{dt} = \frac{d\vec{T}}{ds}.\frac{ds}{dt} = k\vec{N}\frac{ds}{dt} = kv\vec{N} = \frac{v}{R}\vec{N}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n = \frac{d\mathrm{v}}{dt}.\vec{T} + v\left(\frac{v}{R}\vec{N}\right) = \frac{d\mathrm{v}}{dt}.\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N}$$

رابطه‌ی اخیر نشان می‌دهد که مولفه‌های شتاب $\frac{dv}{dt}$ در جهت مماس بر مسیر و $\frac{V^2}{R}$ در جهت عمود بر مسیر می‌باشد و شتاب $\frac{V^2}{R}$ اغلب شتاب مرکزی (گریز از مرکز) نام دارد.

مثال ۵: ذره‌ای حرکت می‌کند به طوری که بردار وضعیت آن $\vec{r} = Cos\omega t\vec{\imath} + Sin\omega t\vec{\jmath}$ که در آن سرعت زاویه‌ای ω ثابت است. نشان دهید که سرعت V ذره عمود بر r می‌باشد، شتاب $\vec{a}$ به طرف مبدا و اندازه‌ی آن متناسب با فاصله از مبدا می‌باشد و همچنین حاصل $\vec{r} \times \vec{v}$ برابر برداری ثابت است.

$$\dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -\omega Sin\omega t + \omega Cos\omega t\vec{\jmath}$$

$$\vec{r}.\vec{v} = [Cos\omega t\vec{\imath} + Sin\omega t\vec{\imath}][-\omega Sin\omega t\vec{\imath} + \omega Cos\omega t\vec{\imath}] =$$

$$Cos\omega t(-\omega Sin\omega t) + (Sin\omega t)(\omega Cos\omega t) = 0 \ \to \vec{r}.\vec{v} = 0 \to$$

بردار $\vec{v}$ بر بردار $\vec{r}$ عمود است، یعنی بردار سرعت بر بردار جابجایی عمود است.

$$\frac{d^2\vec{r}}{d^2t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\omega^2 Cos\omega t\vec{\imath} - \omega^2 Sin\omega t\vec{\jmath} = -\omega^2[Cos\omega t\vec{\imath} + Sin\omega t\vec{\jmath}] = -\omega^2\vec{\mathrm{r}}$$

بنابراین شتاب در جهت مخالف بردار وضعیت می‌باشد، یعنی به طرف مبدا است و اندازه‌ی آن با $|\vec{\mathrm{r}}|$ (فاصله از مبدا) متناسب است.

$$\vec{r} \times \vec{v} = (Cos\omega t\vec{\imath} + Sin\omega t\vec{\jmath}) \times [-\omega Sin\omega t\vec{\imath} + \omega Cos\omega t\vec{\jmath}] =$$

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ Cos\omega t & Sin\omega t & 0 \\ -Sin\omega t & \omega Cos\omega t & 0 \end{vmatrix} = \omega(Cos^2\omega t + Sin^2\omega t)\vec{k} = \omega\vec{k}$$

چون ω ثابت است، بنابراین $\vec{r} \times \vec{v}$ برداری ثابت است.

مثال ٦: اگر $\vec{A} = (3x^2 - 6yz)\vec{i} + (2y + 3xz)\vec{j} + (1 - 4xyz^2)\vec{k}$ باشد، $\int_C \vec{A}.d\vec{r}$ را از $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ در راستای مسیر C زیر حساب کنید.

الف) $x = t, y = t^2, z = t^3$ ب) خطوط مستقیم از $(0,0,0)$ به $(0,0,1)$ و سپس به $(1,1,1)$

ج) خط مستقیم اتصال دهنده‌ی نقاط $(0,0,0)$ و $(1,1,1)$

حل:

$$\int_C \vec{A}.dr = \int_C\{(3x^2 - 6yz)\vec{i} + (2y + 3xz)\vec{j} + (1 - 4xyz^2)\vec{k}\}.\{dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\} = \int_C (3x^2 - 6yz)dx + (2y + 3xz)dy + (1 - 4xyz^2)dz$$

الف)

$$\begin{cases} x = t \quad 0 \le x \le 1 \Rightarrow dx = dt \\ y = t^2 \Rightarrow dy = 2tdt \quad , \quad z = t^3 \Rightarrow dz = 3t^2dt \end{cases}$$

در انتگرال به جای x,y,z از هم ارزهای آنها یعنی t^3,t^2,t استفاده می‌شود.

$$I = \int_0^1 [3t^2 - 6t^5]dt + [2t^2 - 3t^4]2tdt + [1 - 4t^9]3t^2dt$$

$$I = \int_0^1 [3t^2 - 6t^5 + 4t^3 + 6t^5 + 3t^2 - 12t^{11}]\,dt = [2t^3 + t^4 - t^{12}] = 2$$

روش دیگر: در راستای C

$$\vec{A} = (3t^2 - 6t^5)\vec{i} + (2t^2 + 3t^4)\vec{j} + (1 - 4t^9)\vec{k}$$

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = t\vec{i} + t^2\vec{j} + t^3\vec{k} \rightarrow d\vec{r} = \left(\vec{i} + 2t\vec{j} + 3t\vec{k}\right)dt$$

پس: $\int_C \vec{A}.d\vec{r} = \int_0^1 (3t^2 - 6t^5)dt + (4t^3 - 6t^5)dt + (3t^2 - 12t^{11})\,dt = 2$

ب) ابتدا خط مستقیم از $(0,0,0)$ به $(0,0,1)$ درنظر گرفته می‌شود که $x=y=0$ بنابراین $dx=dy=0$ در حالی که z از صفر تا یک تغییر می کند، بنابراین:

$$I_1 = \int_{z=0}^1 \{3 \times (0)^2 - 6 \times 0 \times z\} \times 0 + \{2 \times 0 + 3 \times 0 \times z\} \times 0 + \{1 - 4 \times 0 \times 0 \times z^2\}dz = \int_{z=0}^1 dz = 1$$

سپس خط مستقیم از $(0,0,1)$ تا $(0,1,1)$ لحاظ می‌شود، پس:

$x = 0 \quad , z = 1 \ \rightarrow \quad dx = 0$ و $dz = 0$

$$I_2 = \int_{y=0}^{1} \{3\times(0)^2 - 6\times y\times 1\}\times 0 + \{2y + 3\times 0\times 1\}dy + \{1 - 4\times 0\times y\times 1^2\}\times 0 = \int_{y=0}^{1} 2ydy = [y^2] = 1$$

حال مسیر نهایی یعنی خط مستقیم از $(0,1,1)$ تا $(1,1,1)$ مد نظر قرار می‌گیرد، بنابراین:

$y = 1\,, z = 1 \ \rightarrow dy = dz = 0$

در حالی که x از صفر تا یک تغییر می‌کند، پس:

$$I_3 = \int_{x=0}^{1} \{3x^2 - 6\times 1\times 1\}dx + \{2\times 1 + 3\times\}\times 0 + \{1 - 4x\times(1)\times(1)^2\}\times 0 = \int_{z=0}^{1} (3x^2 - 6)dx = [x^2 - 6x] = 5$$

بنابراین با جمع حاصل انتگرال بر روی هر سه مسیر:

$$I = I_1 + I_2 + I_3 = 1 + 1 + (-5) = -3$$

ج) در این قسمت به تنهایی خط اتصال $(0,0,0)$ تا $(1,1,1)$ در نظر گرفته می‌شود:

$x = y = z = t \quad \Rightarrow \quad dx = dy = dz = dt$

بنابراین از جایگذاری:

$$\int_C A.dr = \int_C (3x^2 - 6yz)dx + (2y + 3xz)dy + (1 - 4xyz^2)dz$$
$$\int_{t=0}^{1} (3t^2 - 6t^2)dt + (2t + 3t^2)dt + (1 - 4t^4)dt = \int_{t=0}^{1} (2t + 1 - 4t^4)dt$$
$$= [t^2 + t - \frac{4}{5}t^5\Big|_0^1 = \frac{6}{5}$$

مشاهده می‌شود که در این حالت مقدار انتگرال به مسیر وابسته است.

مثال۷: نشان دهید برای هر بردار دلخواه $\vec{A}$ می‌توان نوشت:

$\vec{A} = (\vec{A}.\vec{\imath})\vec{\imath} + (\vec{A}.\vec{\jmath})\vec{\jmath} + (\vec{A}.\vec{k})\vec{k}$ و $\vec{A} = A(\mathrm{Cos}\alpha\vec{\imath} + \mathrm{Cos}\beta\vec{\jmath} + Cos\gamma\vec{k})$

که در آن α و β و γ زوایایی هستند که بردار $\vec{A}$ با بردارهای یکه $\vec{\imath}$ و $\vec{\jmath}$ و $\vec{k}$ می‌سازد و همچنین کسینوسهای هادی $\mathrm{Cos}\gamma, \mathrm{Cos}\beta, \mathrm{Cos}\alpha$ مربوط به بردار $\vec{A}$ هستند.

حل: فرض کنید $\vec{A} = A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath} + A_3\vec{k}$ پس:

$$\vec{A}.\vec{\imath} = (A_1\vec{\imath} + A_2\vec{\jmath} + A_3\vec{k})\vec{\imath} = A_1(\vec{\imath}.\vec{\imath}) + A_2(\vec{\jmath}.\vec{\imath}) + A_3(\vec{k}.\vec{\imath})$$

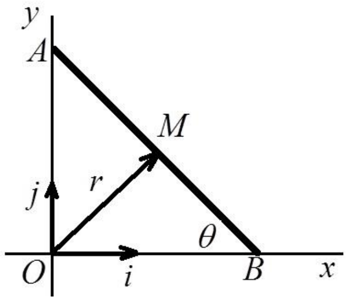
و $\vec{\jmath}.\vec{\imath} = \vec{k}.\vec{\imath} = 0$ بنابراین: $\vec{A}.\vec{k} = A_3 \quad , \quad \vec{A}.\vec{\jmath} = A_2 \quad , \quad \vec{A}.\vec{\imath} = A_1$ در نتیجه:

طرف راست رابطه اول $= A_1\vec{\imath} + A_2 j + A_3\vec{k} = \vec{A}$

$$\vec{A}.\vec{\imath} = |\vec{A}||\vec{\imath}|cos\alpha = Acos\alpha \ , \vec{A}.\vec{\jmath} = |\vec{A}||\vec{\jmath}|cos\beta = Acos\beta,$$

$$\vec{A}.\vec{k} = |\vec{A}||\vec{k}|cos\gamma = Acos\gamma$$
$$\vec{A} = (\vec{A}.\vec{\imath})\vec{\imath} + (\vec{A}.\vec{\jmath})\vec{\jmath} + (\vec{A}.\vec{k})\vec{k} = Acos\alpha\vec{\imath} + Acos\beta\vec{\jmath} + Acos\gamma\vec{k}$$
$$\vec{A} = A(cos\alpha\vec{\imath} + cos\beta\vec{\jmath} + cos\gamma\vec{k})$$

مثال ۸: نردبان AB به طول a در مقابل دیوار عمودی OA مطابق شکل ۳-۱۸ قرار گرفته است. قسمت پائین نردبان یعنی B با سرعت ثابت v_0 کشیده می‌شود. الف) نشان دهید که نقطه‌ی وسط نردبان دارای حرکت بر روی مسیر دایره‌ای به شعاع $0.5a$ و مرکز O می‌باشد. ب) بردار سرعت و اندازه‌ی آن را برای نقطه‌ی وسط نردبان که مسافت $b<a$ از دیوار را طی کند، تعیین کنید.



شکل۳-۱۸- نردبان AB که به دیوار تکیه‌داده شده است

حل: فرض کنید بردار موقعیت $\vec{r}$ نقطه‌ی میانی M از AB به صورت $\vec{r}$ در نظرگرفته شود. اگر زاویه‌ی $OAB=\theta$ لحاظ گردد، آنگاه:

$$\overrightarrow{OB} = acos\theta\vec{\imath} \text{ و } \overrightarrow{OA} = asin\theta\vec{\jmath} \quad , \quad \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA} = acos\theta\vec{\imath} - asin\theta\vec{\jmath}$$
$$\vec{r} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = asin\theta\vec{\jmath} + \frac{1}{2}(acos\theta\vec{\imath}) = \frac{1}{2}(acos\theta\vec{\imath} + asin\theta\vec{\jmath})$$

بنابراین: $|\vec{r}| = \frac{a}{2}$ که یک دایره به شعاع $\frac{a}{2}$ و مرکز O می‌باشد.

ب) سرعت نقطه‌ی میانی M برابر است با:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}a(Cos\theta\vec{\imath} + Sin\theta\vec{\jmath})\right\} = \frac{1}{2}a\{-Sin\theta\vec{\imath} + Cos\theta\vec{\jmath}\}.\dot{\theta}$$

که در آن $\dot{\theta}$ برابر است با $\frac{d\theta}{dt}$ پس سرعت قسمت پائینی نردبان یعنی B به فرم زیر می‌باشد:

$$\vec{v}.\vec{i} = \frac{d}{dt}(\overrightarrow{OB}).\frac{d}{dt}(aCos\theta\vec{i}) = -a\dot{\theta}Sin\theta\vec{i}$$

پس از متحد قرار دادن طرفین

$$-v_0 = aSin\theta.\dot{\theta} \quad \Rightarrow \quad v_0 = a.\dot{\theta}Sin\theta$$

چون نردبان فاصله‌ی b را از دیوار دارد، بنابراین:

$$Sin\theta = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} \quad , \quad \dot{\theta} = \frac{-v_0}{aSin\theta} = \frac{-v_0}{a\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}} \qquad \to \dot{\theta} = \frac{-v_0}{\sqrt{a^2-b^2}}$$

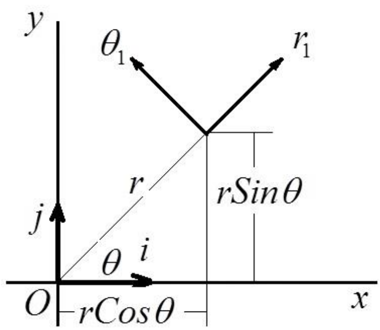
با جایگذاری $\dot{\theta}$ در رابطه‌ی اول:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = +\frac{1}{2}a\left\{-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\vec{\imath} + \frac{b}{a}\vec{\jmath}\right\}\left[\frac{-v_0}{\sqrt{a^2-b^2}}\right] = \frac{v_0}{2}\left(\vec{\imath} - \frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}\vec{\jmath}\right)$$

$$\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{-v_0 a}{2\sqrt{a^2-b^2}} = \frac{v_0}{2}\sqrt{\frac{a^2}{a^2-b^2}} = \frac{-v_0 a}{2\sqrt{a^2-b^2}} \qquad \text{اندازه سرعت}$$

مثال ۹: مطابق شکل ۳-۱۹ نشان دهید: الف) $\dot{\vec{r_1}} = \dot{\theta}\vec{\theta}_1$ ب) $\dot{\vec{\theta}}_1 = -\dot{\theta}\vec{r_1}$

حل: ابتدا موقعیت بردارهای $\vec{r_1}$, $\vec{\theta}_1$ در سیستم مختصات مطابق شکل استخراج می‌شوند:



شکل۳-۱۹- مختصات کارتزین و مختصات شعاعی و مماسی

$$\vec{r_1} = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|} \quad , \quad \vec{\theta_1} = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right|} \quad , \quad \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = rCos\theta\vec{\imath} + rSin\theta\vec{\jmath}$$

$$\begin{cases}\vec{r_1} = Cos\theta\vec{\imath} + Sin\theta\vec{\jmath}\\ \vec{\theta_1} = -Sin\theta\vec{\imath} + Cos\theta\vec{\jmath}\end{cases} , \quad \begin{cases}\vec{\imath} = Cos\theta\vec{r_1} - Sin\theta\vec{\theta_1}\\ \vec{\jmath} = Sin\theta\vec{r_1} + Cos\theta\vec{\theta_1}\end{cases}$$

$$\dot{\vec{r_1}} = \frac{d\vec{r_1}}{dt} = \frac{d\vec{r_1}}{dr}.\frac{dr}{dt} + \frac{d\vec{r_1}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = 0\times\dot{r} + (-Sin\theta\vec{\imath} + Cos\theta\vec{\jmath})\dot{\theta} = \dot{\theta}\vec{\theta_1}$$

$$\dot{\overrightarrow{\theta_1}} = \frac{d\overrightarrow{\theta_1}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{\theta_1}}{dr}\frac{dr}{dt} + \frac{d\overrightarrow{\theta_1}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = 0 \times \dot{r} + (-Cos\theta\vec{\imath} + Sin\theta\vec{\jmath}).(\dot{\theta}) = -\dot{\theta}\overrightarrow{r_1}$$

مثال۱۰: نشان دهید در مختصات قطبی سرعت و شتاب از روابط زیر حاصل می‌شوند.

الف) $\vec{v} = \dot{r}\vec{r}_1 + r\dot{\theta}\overrightarrow{\theta_1}$ ب) $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{r}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{\theta_1}$

حل: $\vec{r} = r\vec{r}_1 \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\vec{r}_1 + r\frac{d\vec{r}_1}{dt} = r\dot{\vec{r}}_1 + \dot{r}\vec{r}_1 = \dot{r}\vec{r}_1 + r\dot{\theta}\overrightarrow{\theta_1}$

در مثال قبل نشان داده شد ب) از قسمت قبل و مثال ۹: $\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\theta}\overrightarrow{\theta_1}$ الف

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\dot{r}\vec{r}_1 + r\dot{\theta}\overrightarrow{\theta_1}\right) = \ddot{r}\vec{r}_1 + \dot{r}\dot{\vec{r}}_1 + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{\theta_1} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{\theta_1} + r\dot{\theta}\dot{\overrightarrow{\theta_1}}$$
$$\ddot{r}\vec{r}_1 + \dot{r}(\dot{\theta}\overrightarrow{\theta_1}) + r\ddot{\theta}\overrightarrow{\theta_1} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{\theta_1} + (r\dot{\theta})(-\dot{\theta}\vec{r}_1)$$
$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{r}_1 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\overrightarrow{\theta_1}$$

مثال۱۱: نشان دهید که شعاع انحنای منحنی با معادله $r = f(\theta)$ در دستگاه مختصات قطبی از رابطه $R = \frac{\left(r^2+r'^2\right)^{1.5}}{(r^2+2r'^2-rr'')}$ حاصل می‌شود که در آن $r=f(\theta)$, $r' = f'(\theta)$

حل: با استفاده از رابطه‌ی بین مختصات هر نقطه در دستگاه‌های مختصات کارتزین و قطبی:

$$x = rCos\theta\ , y = rSin\theta \ \rightarrow\ \vec{R}(\theta) = (rCos\theta)\vec{\imath} + (rSin\theta)\vec{\jmath} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$$

بردار سرعت $\vec{v}(\theta) = \frac{d\vec{R}(\theta)}{dt} = (r'Cos\theta - rSin\theta)\vec{\imath} + (r'Sin\theta - rCos\theta)\vec{\jmath}$

بردارشتاب $\vec{a}(\theta) = \frac{d\vec{v}\theta}{dt} = [r''Cos\theta - r'Sin\theta - r'Sin\theta - rCos\theta]\vec{\imath} +$

$$[r''Sin\theta + r'Cos\theta - r'Cos\theta - rSin\theta]\vec{\jmath}$$

$$\vec{a}(\theta) = [(r''Cos\theta - 2r'Sin\theta - rCos\theta)]\vec{\imath} + [r''Sin\theta - 2r'Cos\theta - rSin\theta]\vec{\jmath}$$

$$\vec{v} \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ r'Cos\theta - rSin\theta & r'Sin\theta - rCos\theta & 0 \\ r''Cos\theta - 2r'Sin\theta - rCos\theta & r''Sin\theta - 2r'Cos\theta - rSin\theta & 0 \end{vmatrix} =$$

$[(r'Cos\theta - rSin\theta)(r"Sin\theta + 2r'Cos\theta - rSin\theta) - (r'Sin\theta +$

$rCos\theta)(r"Cos\theta - 2r'Sin\theta - rCos\theta)]\vec{k}$

$\vec{v} \times \vec{a} = (r'r"Sin\theta.Cos\theta+2r'r'Cos^2\theta\text{-}rr'Sin\theta.Cos\theta\text{-}rr"Sin^2\theta$

$- 2rr'Sin\theta.Cos\theta$

$+r^2Sin^2\theta - r'r"Sin\theta.Cos\theta+2r'^2Sin^2\theta+r'rSin\theta.Cos\theta\text{-}rr"Cos^2\theta +$

$2rr'Sin\theta.Cos\theta + r^2cos^2\theta)\vec{k}$

$\vec{v} \times \vec{a} = \left[r^2Sin^2\theta + r^2Cos^2\theta - rr"(Sin^2\theta + Cos^2\theta)2r'^2(Sin^2\theta +\right.$

$\left.Cos^2\theta)\right]\vec{k}$

$\vec{v} \times \vec{a} = (r^2 + 2r'^2 + rr")^2 \rightarrow |\vec{v} \times \vec{a}| = \left|r^2 + 2r'^2 + rr"\right|$

$|\vec{v}| = \sqrt{(r'Cos\theta\text{-}rSin\theta)^2 + (r'Sin\theta\text{-}rCos\theta)^2} =$

$\sqrt{r'^2Cos^2\theta + r'^2Sin^2\theta + r'^2Sin^2\theta + r^2Cos^2\theta}$

$|\vec{v}| = \sqrt{r^2 + r'^2}$, $\left(\text{انحنا}\right) k = \frac{|\vec{v}\times\vec{a}|}{|v|^3} = \frac{\left|r^2+r'^2-rr"\right|}{(r^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}$

شعاعی انحناء $R = \frac{1}{k} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{\left|r^2 + r'^2 - rr"\right|}$

مثال۱۲: برای منحنی C با بردار موقعیت $\vec{R}(t) = Cosat\vec{i} + Sinat\vec{j} + at\vec{k}$ رابطه‌ای بین z, k ، $\frac{d\vec{N}}{ds}$ استخراج کنید. جهت حل مساله از روابط زیر می‌توان استفاده کرد.

انحناء $k = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\vec{T}}{ds}\right| \left|\frac{dt}{ds}\right|$, $\left|\frac{d\vec{N}}{ds}\right| = \left|\frac{d\vec{N}}{dt}\right| \left|\frac{dt}{ds}\right|$

میزان تاب $\tau = \left|\frac{d\vec{B}}{ds}\right| = \left|\frac{d\vec{B}}{ds}\right| \left|\frac{dt}{ds}\right|$

حل:

بردار سرعت $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{R}(t)}{dt} = \vec{R}'(t) = (-aSinat)\vec{i} + (aCosat)\vec{j} + a\vec{k}$

$\left|\vec{V}\right| = \sqrt{a^2Sin^2at + a^2Cos^2at + a^2} = a\sqrt{2}$

$$\vec{T}(t)=\frac{\vec{V}(t)}{|\vec{V}(t)|}=\frac{(-aSinat\vec{\imath}+aCosat\vec{\jmath}+a\vec{k})}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-Sinat\vec{\imath}+Cosat\vec{\jmath}+\vec{k})$$

$$\overrightarrow{T'}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-aCosat\vec{\imath}-aSinat\vec{\jmath}+0)=-\frac{a}{\sqrt{2}}(Cosat\vec{\imath}+Sinat\vec{\jmath})$$

$$\left|\overrightarrow{T'}(t)\right|=\frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{Cos^2at+Sin^2at}=\frac{a}{\sqrt{2}}\rightarrow\left|\overrightarrow{T'}(t)\right|=\frac{a}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{N}(t)=\frac{\overrightarrow{T'}(t)}{\left|\overrightarrow{T'}(t)\right|}=\frac{-\frac{a}{\sqrt{2}}(Cosat\vec{\imath}+Sinat\vec{\jmath})}{\frac{a}{\sqrt{2}}}=-Cosat\vec{\imath}-Sinat\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{N'}(t)=aSinat\vec{\imath}-aCosat\vec{\jmath}\ \text{و}\ \left|\overrightarrow{N'}(t)\right|=\sqrt{a^2Sin^2at+a^2Cos^2at}=a$$

$$\vec{B}=\vec{T}(t)\times\vec{N}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{vmatrix}\vec{\imath}&\vec{\jmath}&\vec{k}\\-aSinat&Cosat&a\\-Cosat&-aSinat&0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}aSinat\vec{\imath}-\frac{1}{\sqrt{2}}aCoaat\vec{\jmath}+\vec{k}$$

$$\vec{B}(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}aSinat\vec{\imath}-\frac{a}{\sqrt{2}}aCosat\vec{\jmath}+\vec{k}\ \ ,\ \overrightarrow{B'}(t)=\frac{a^2}{\sqrt{2}}Cosat\vec{\imath}-\frac{a^2}{\sqrt{2}}Sinat\vec{\jmath}$$

$$\overrightarrow{B'}(t)=\frac{a^2}{\sqrt{2}}(Cosat\vec{\imath}+Sinat\vec{\jmath})\ ,\frac{dt}{ds}=\frac{1}{\frac{ds}{dt}}=\frac{1}{|v(t)|}=\frac{1}{a\sqrt{2}}$$

$$k=\left|\frac{d\vec{T}}{dt}\right|.\left|\frac{dt}{ds}\right|=\frac{a}{\sqrt{2}}\frac{1}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$$\tau=\left|\frac{d\vec{B}}{dt}\right|.\left|\frac{dt}{ds}\right|=\frac{a^2}{\sqrt{2}}\frac{1}{a\sqrt{2}}=\frac{a}{2}\quad,\qquad\left|\frac{d\vec{N}}{ds}\right|=\left|\frac{d\vec{N}}{dt}\right|\left|\frac{dt}{ds}\right|=a\times\frac{1}{a\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$$

$$\begin{cases}k=\dfrac{1}{2} & \tau=ak\\ \tau=\dfrac{a}{2}=\left|\dfrac{d\vec{N}}{ds}\right|=\dfrac{1}{2}\ ,k=\left|\dfrac{d\vec{N}}{ds}\right|^2=\left|\dfrac{dN}{ds}\right|^2=\dfrac{\tau}{a}\end{cases}\rightarrow\sqrt{a^2k^2+\tau^2}=a\left|\frac{d\vec{N}}{ds}\right|$$

مثال۱۳: معادلات پارامتری مکان هندسی مرکز انحنای منحنی به معادلات زیر را تعیین کنید.

$$\begin{cases}y=a(1-Cos\alpha)\\x=a(\alpha-Sin\alpha)\end{cases}$$

حل: با توجه به روابط مربوط به مرکز انحناء

$$x - x_0 = \frac{y'}{y"}(1 + y'^2) \quad , y - y_0 = -\frac{1}{y"}(1 + y'^2)$$

پس از قرار دادن مشتقات مرتبه اول و دوم یعنی y',y'' و همچنین y,x در روابط مربوط به مرکز انحناء، سرانجام معادلات پارامتری حاصل می‌شود.

$$\begin{cases} x = a(\alpha - Sin\alpha) \ , \quad \frac{dx}{d\alpha} = a(1 - Cos\alpha) \\ y = a(1 - Cos\alpha) \quad , \frac{dy}{d\alpha} = a(Sin\alpha) \end{cases}$$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dx}{\frac{dx}{d\alpha}} = \frac{aSin\alpha}{a(1 - Cos\alpha)} = \frac{Sin\alpha}{1 - Cos\alpha} \quad \rightarrow y' = \frac{Sin\alpha}{1 - Cos\alpha}$$

$$y" = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} = \left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{Sin\alpha}{1 - Cos\alpha}\right) = \frac{d\left(\frac{Sin\alpha}{1 - Cos\alpha}\right)}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} =$$

$$\frac{\mathrm{Cos\alpha} - 1}{(1 - \mathrm{Cos\alpha})^2} \times \frac{1}{1 - \mathrm{Cos\alpha}} \ \Rightarrow \ y" = \frac{-1}{(1 - \mathrm{Cos\alpha})^2}$$

$$x - x = \frac{y'}{y"}\left(1 + y'^2\right) \Rightarrow a(\alpha - Sin\alpha) - x_0 = \frac{\frac{Sin\alpha}{1 - \mathrm{Cos\alpha}}}{\frac{-1}{a(1 - \mathrm{Cos\alpha})^2}}(1 + \frac{\mathrm{Sin}^2\alpha}{(1 - \mathrm{Cos\alpha})^2})$$

$$a(\alpha - Sin\alpha) - x_0 = -2aSin\alpha \quad \Rightarrow x_0 = a(\alpha + Sin\alpha)$$

به همین شکل y_0 نیز حاصل می‌شود:

$$y - y_0 = \frac{1}{y"}\left(1 + y'^2\right) \Rightarrow a(1 - Cos\alpha) - y_0 = a(1 - \mathrm{Cos\alpha})^2(1 + \frac{\mathrm{Sin}^2\alpha}{(1 - \mathrm{Cos\alpha})^2})$$

$$a(1 - \mathrm{Cos\alpha})^2\left[\frac{2(1 - \mathrm{Cos\alpha})}{(1 - \mathrm{Cos\alpha})^2}\right] = 2a(1 - \mathrm{Cos\alpha}) \ \Rightarrow \ y_0 = a(\mathrm{cos\alpha} - 1)$$

مثال۱٤: برای منحنی C با معادلات $x = \int_0^\theta \mathrm{Cos}\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt \ , \ y = \int_0^\theta \mathrm{Sin}\left(\frac{\pi}{2}t^2\right)dt$ انحنای منحنی را به صورت تابعی از طول قوس s حساب کنید که در آن s از مبداء مختصات سنجیده می‌شود.

قاعده لایب نیتز $\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)dt = v'(x)f(\left(v(x)\right) - u'(x).f(u(x))$

حل: با استفاده از قاعده لایب نیتز جهت گرفتن مشتق از انتگرال معین با کرانه‌های متغیر:

$$x' = \frac{dx}{d\theta} = 1 \times Cos\frac{\pi}{2}\theta^2 - 0 \times Cos\frac{\pi}{2}\theta^2 \times 0^2 = Cos\frac{\pi}{2}\theta^2 \rightarrow x' = Cos\frac{\pi}{2}\theta^2$$

$$x" = -\frac{\pi}{2} \times 2\theta Sin\frac{\pi}{2}\theta^2 \quad \rightarrow x" = -\pi\theta Sin\frac{\pi}{2}\theta^2$$

$$y' = \frac{dy}{d\theta} = 1 \times Sin\frac{\pi}{2}\theta^2 - 0 \times Sin\frac{\pi}{2}\theta^2 \times 0^2 = sin\frac{\pi}{2}\theta^2 \rightarrow y" = \frac{\pi}{2}2\theta \times Cos\frac{\pi}{2}\theta^2 = \pi Cos\frac{\pi}{2}\theta^2$$

بردار سرعت $\vec{v} = \mathrm{x}'\vec{\mathrm{i}} + \mathrm{y}'\vec{\mathrm{j}}\,, |\vec{v}| = \sqrt{\mathrm{x}'^2 + \mathrm{y}'^2} \rightarrow |\vec{v}| = \sqrt{\mathrm{Cos}^2 \frac{\pi}{2}\theta^2 + \mathrm{Sin}^2 \frac{\pi}{2}\theta^2}$

انحنا $k = \left|\frac{x\prime y" - y\prime x"}{|\vec{v}|^3}\right| = \left(Cos\frac{\pi}{2}\theta^2\right)\left(\pi\theta Cos\frac{\pi}{2}\theta^2\right) - \left(Sin\frac{\pi}{2}\theta^2\right)\left(\pi\theta Sin\frac{\pi}{2}\theta^2\right)$

$= \pi\theta\left[\mathrm{Cos}^2\frac{\pi}{2}\theta^2 + \mathrm{Sin}^2\frac{\pi}{2}\theta^2\right] = \pi\theta \quad \rightarrow \mathrm{k} = \pi\theta$

$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2 + (\frac{dy}{d\theta})^2}d\theta = \sqrt{\mathrm{x}'^2 + \mathrm{y}'^2}d\theta$

$ds = \sqrt{Cos^2\frac{\pi}{2}\theta^2 + Sin^2\frac{\pi}{2}\theta^2} = d\theta \ , ds = d\theta \quad \rightarrow s = \theta \rightarrow k = \rightarrow s = \pi s$

مثال۱۵: منحنی C مانند معادلات پارامتری داده شده است،

$z = be^{at} \ , y = e^{at}Cosbt \ , \ x = e^{at}Sinbt$

در لحظه‌ی $t=0$ بردارهای B,N,T و انحنای منحنی را بیابید. (b,a اعداد ثابتی هستند.)

حل: ابتدا معادله‌ی موقعیت منحنی نوشته می‌شود.

$\vec{R}(t) = (e^{at}Sinbt)\vec{\imath} + (e^{at}Cosbt\,)\vec{\jmath} + be^{at}\vec{k}$

$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{R}(t)}{dt} = -[ae^{at}Sinbt + bCosbt]\vec{\imath} + [ae^{at}Sinbt + bCosbt]\vec{\jmath} + abe^{at}\vec{k}$

$\vec{v}(t) = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k} \quad ,|\vec{v}(t)| = \sqrt{(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2}$

$|\vec{v}(t)| =$

$\sqrt{(e^{at})^2(aSinbt + bCosbt)^2 + (e^{at})^2 + (aCosbt - bSinbt)^2 + (ab)^2(e^{at})^2}$

$e^{at}\sqrt{(aSinbt + bCosbt)^2 + (aCosbt - bSinbt)^2 + a^2b^2}$

$e^{at}\sqrt{a^2(Sin^2bt + Cos^2bt) + b^2(Sin^2bt + Cos^2bt) + a^2b^2}$

$|\vec{v}(t)| = e^{at}\sqrt{a^2 + b^2 + a^2b^2}| \qquad , \qquad \vec{v}(0)| = \sqrt{a^2 + b^2 + a^2b^2}$

$\vec{T}(0) = \frac{\vec{v}(0)}{|\vec{v}(0)|} \quad ,\vec{v}(0) = b\vec{\imath} + a\vec{\jmath} + ab\vec{k}$

$\vec{T}(0) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+a^2b^2}}\vec{\imath} + \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+a^2b^2}}\vec{\jmath} + \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2+a^2b^2}}\vec{k}$

$\overrightarrow{T'}(t) = \left[\frac{\vec{v}(t)}{|\vec{v}(t)|}\right]' = \frac{d}{dt}\left[\frac{e^{at}aSinbt + bCosbt)\vec{\imath} + e^{at}(aCosbt - bSinbt)\vec{\jmath} + abe^{at}\vec{k}}{e^{at}\sqrt{a^2+b^2+a^2b^2}}\right]$

$$\overrightarrow{T'}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+a^2b^2}}[abCosbt - b^2Sinbt)\vec{i} + (-b^2Cosbt - abSinbt)\vec{j}]$$

$$T'(0) - \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+a^2b^2}}[ab\vec{i} - b^2\vec{j}] = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+a^2b^2}}[a\vec{i} - b\vec{j}]$$

$$|T'(0)| = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+a^2b^2}} \to |T'(0)| = b\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+a^2b^2}}$$

$$\vec{N}(0) = \frac{\vec{T'}(0)}{|T'(0)|} = \frac{\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+a^2b^2}}(a\vec{i}-b\vec{j})}{\frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+a^2b^2}}} \to \vec{N}(0) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{i} - \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{j}$$

$$\vec{B}(0) = \vec{T}(0)\times\vec{N}(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+a^2\ b^2}} & \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+a^2\ b^2}} & \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2+a^2\ b^2}} \\ \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+a^2\ b^2}} \times \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b & a & ab \\ a & -b & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{\left(a^2+b^2+a^2\ b^2\right)\left(a^2+b^2\right)}} \times$$

$$\left(ab^2\vec{i} + a^2b\vec{j} - \left(a^2+b^2\right)\vec{k}\right)$$

$$\vec{a}(t) = \{e^{at}(abCosbt - b^2Sinbt) + ae^{at}(aSinbt + bCosbt)\}\vec{i} +$$
$$\{e^{at}(a^2bSinbt - b^2Cosbt) + ae^{at}(aCosbt - bSinbt)\}\vec{j} + a^2be^{at}\vec{k}$$

$$\vec{a}(0) = (ab+ab)\vec{i} + \left(a^2 - b^2\right)\vec{j} + a^2b\vec{k} = 2ab\vec{i} + \left(a^2 - b^2\right)\vec{j} + a^2b\vec{k}$$

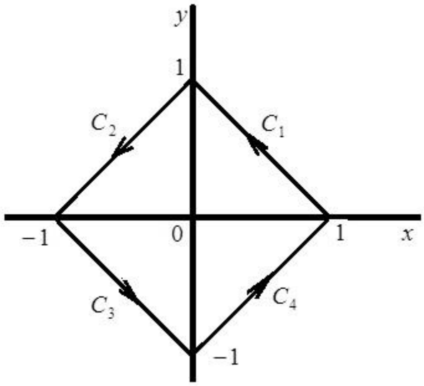
بردار شتاب در لحظه‌ی $t = 0$ ، همچنین بردار سرعت در لحظه‌ی اولیه با قرار دادن $t=0$ در بردار سرعت حاصل می‌شود. $\vec{v}(0) = b\vec{i} + a\vec{j} + ab\vec{k}$

$$\vec{v}(0)\times\vec{a}(0) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ b & a & ab \\ 2ab & a^2-b^2 & a^2b \end{vmatrix} = ab^3\vec{i} + a^2b^2\vec{j} - b\left(a^3 - b^2 - 2a^2\right)\vec{k}$$

$$k(0)=\frac{|\vec{v}(0)\times\vec{a}(0)|}{|\vec{v}(0)^3|}=\frac{\sqrt{a^2b^6+a^4b^4-b^2\left(a^3-b^2-2a^2\right)^2}}{\left(\sqrt{b^2+a^2+a^2b^2}\right)^3}=$$
$$\frac{b}{b^2+a^2+a^2b^2}\sqrt{\frac{a^2b^4+a^4b^2-\left(a^3-b^2-2a^2\right)^2}{b^2+a^2+a^2b^2}}$$

مثال ١٦: اگر C مرز (پیرامون) مربع با راس‌های $(\pm 1,0)$ و $(0,\pm 1)$ در جهت مثلثاتی باشد،حاصل انتگرال $\int_C \frac{dx+dy}{|x|+|y|}$ را بیابید (شکل ۳-۲۰).

حل: ابتدا معادلات هر چهار مسیر را نوشته و $|x|,|y|$ در آنها تعیین می‌شود.



شکل۳-۲۰-مربع واقع در چهار ناحیه‌ی مختصات به طور کاملاً متقارن

$C_1: x+y=1\ ,\ |x|=x\ ,|y|=y\ \ ,y=1-x\quad \to dy=-dx$
$I_1=\int_0^1\frac{dx-dy}{x+y}=\int_0^1\frac{dx-dx}{1}=0$
$C_2: y=x+1\quad \to dy=dx\quad ,\quad |x|=-x$
$$I_2=\int_0^{-1}\frac{dx+dx}{-x+x+1}=-2\int_{-1}^{0}dx=-2$$
$C_3: y=1-x\quad \to dy=-dx\ ,|x|=-x\quad ,|y|=-y$
$$I_3=\int_0^1\frac{dx+dy}{-x-y+1}=0$$
$C_4: y=y=x-1\quad \to dy=dx\quad ,|x|=x\quad ,|y|=-y$

$$I_4 = \int_0^1 \frac{dx + dx}{x - y} = \int_0^1 \frac{2dx}{+1} = 2$$
$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0 + (-2) + 0 + 2 \quad \to I = 0$$

مثال ۱۷- انتگرال زیر را روی سطح بسته‌ای حساب کنید که ناحیه R محدود به رویه‌ی $z = 4 - x^2 - y^2$ و صفحه‌ی $z = 0$ را احاطه کرده باشد.

$$\iint_s \ (1 + tan^2 x + y^2)dxdz + ((3x^2 - 5yz + 5z)dxdy + (e^z + 3xy)dydz$$

حل: با استفاده از دستور گاوس- استور گرادسکی:

$$\iint_s \ Mdydz + Ndxdzpdxdy = \iint_R \ (\frac{\partial M}{\partial x} + \frac{\partial N}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z})dzdydx =$$
$$\iiint_R \ \vec{\nabla}.\vec{F}dzdydx = \iiint_R \ div\vec{F}.dV$$

لذا می‌توان میدان $\vec{F}$ را به صورت زیر نوشت و از قضیه دیورژانس استفاده کرد.

$$\vec{F} = (e^z + 3xy)\vec{i} + (1 + tan^2x + y^2)\vec{j} + (3x^2 - 5yz + 5z)\vec{k} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k}$$
$$div\vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = (3y + 2y - 5y + 5) = 5$$
$$\text{حاصل انتگرال} = I = \iiint_R \ 5dzdydx = 5\iint_D \ \left[\int_0^{4-x^2-y^2} dz\right]dydx$$
$$5\iint_D \ (4 - x^2 - y^2)dydx$$

برای یافتن میدان انتگرال‌گیری D:

$$4 - x^2 - y^2 = 0 \ \to \ x^2 + y^2 = 4 \quad \text{و} \ -2 \le \rho \le 2$$

از دستگاه مختصات قطبی استفاده می‌شود:

$I = 5\iint_D \ (4 - x^2 - y^2)dydx$ و $dA = \rho d\rho d\theta$ در دستگاه قطبی

$$5\int_0^{2\pi}\int_0^2 \left(4 - \rho^2\right)\rho d\rho d\theta = 5\int_0^{2\pi}\left(2\rho^2 - \frac{\rho^2}{4}\right)_0^2 d\theta = 5\times4\times2\pi = 40\pi$$

مثال۱۸: اگر $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ باشد، نشان دهید که حجم فضای محصور توسط رویه‌ی بسته‌ی s از رابطه‌ی $|V| = \frac{1}{3}\iint_S rCos\theta ds$ حاصل می‌شود که در آن r فاصله نقطه‌ی $p(x,y,z)$ در داخل رویه‌ی s تا مبداء مختصات و θ زاویه‌ی بین $\overrightarrow{OD}$ و $\vec{n}$ (بردار یکه قائم خارجی رویه s) در نقطه‌ی p است.

حل:

$$\iiint_V div\vec{u}dV = \iint_S \vec{u}.\vec{n}ds$$
$$O(0,0,0)\ \ ,P(x,y,z)\quad \rightarrow\ \overrightarrow{op} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\quad ,o\vec{p} = \vec{u}$$
$$div\vec{u} = \vec{\nabla}.\vec{u} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 1 + 1 + 1 = 3$$
$$\vec{u}.\vec{n} = \overrightarrow{op}.\vec{n} = \|\overrightarrow{op}\|.\|\vec{n}\|Cos\theta = \|\overrightarrow{op}\|Cos\theta = rCos\theta$$

چون $\vec{n}$ بردار نرمال یکه است پس:

$$\left\|\overrightarrow{op}\right\| = r \qquad , \qquad \left\|\vec{n}\right\| = 1$$

$$\iiint_V div\vec{u}\,dv = \iiint_V 3dv = 3|v| = \iint_S Cos\theta ds \quad \rightarrow |v| = \frac{1}{3}\iint_S rCos\theta ds$$

مثال۱۹: نشان دهید که حجم فضای محصور توسط رویه بسته‌ی s از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود.

$|V| = \frac{1}{3}\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ که در آن $\vec{F} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و $\vec{n}$ بردار یکه نرمال خارجی رویه s است.

حل: از قضیه‌ی دیورژانس استفاده می‌شود:

$$\frac{1}{3}\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds = \frac{1}{3}\iiint_V (\vec{\nabla}.\vec{F})dV \quad , \quad \frac{1}{3}\iiint_V \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z})dV = \frac{1}{3}\iiint_V 3dV$$

$\iiint_V dV = V$ حجم محصور

مثال۲۰: مقدار انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ را بیابید در صورتی که در آن $F = (x,y,z) = (x,y,z)$ و s سطح بیضی‌گون $\frac{X^2}{a^2} + \frac{b^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, $\vec{n}$ بردار یکه خارجی عمود بر s است.

حل: از قضیه‌ی دیورژانس استفاده می‌گردد.

$$\iint_s \vec{F}.\vec{n}ds = \iint_n (\vec{\nabla}.\vec{F})dV =$$

$\iiint_R \left(\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\right)dV=\iiint_R 3dV=3($حجم بیضی‌گون$)$

حال برای محاسبه‌ی حجم بیضی‌گون از تغییر متغیرهای زیر استفاده می‌شود:

$$\frac{x}{a}=u\Rightarrow x=au \quad , \quad \frac{y}{b}=v\Rightarrow y=bv \quad , \quad \frac{z}{c}=w\Rightarrow z=cw$$

$$J=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{vmatrix}=abc$$

با این تغییر متغیر بیضی‌گون به کره‌ای باشعاع واحد تبدیل می‌گردد:

$$V=\iiint_{R'} abc\times dudvdw=abc\iiint dudvdw \quad , \quad abc=\frac{4}{3}\pi\times 1^3\pi abc$$

$$\text{حجم بیضی گون داده شده}=\frac{4}{3}\pi abc \quad , \quad \text{حاصل انتگرال}=3\times\frac{4}{3}\pi abc=4\pi abc$$

مثال ۲۱: اگر میدان اسکالر Φ مخالف صفر و خواص $(div\Phi\vec{\nabla}\Phi)=10\Phi$ و $\left|\vec{\nabla}\Phi\right|^2=4\Phi$ برقرار باشد،آنگاه مقدار $\iint\frac{\partial\Phi}{\partial \text{n}}ds$ به طوری که s به مرکز مبدا مختصات و n بردار یکه‌ی خارجی آن باشد را بیابید.

حل:

$$10\Phi=div(\Phi\vec{\nabla}\Phi)=\vec{\nabla}\Phi.\vec{\nabla}\Phi+\Phi.div(\vec{\nabla}\Phi)=\left|\vec{\nabla}\Phi\right|^2+\Phi div(\vec{\nabla}\Phi)$$

$$4\Phi+\Phi div(\vec{\nabla}\Phi)\ \rightarrow div(\vec{\nabla}\Phi)=s$$

از طرفی $\frac{\partial\Phi}{\partial \text{n}}$ نام دیگری از مشتق جهت تابع Φ در امتداد n است پس

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=\vec{\nabla}\Phi.\vec{n}$$

$$\iint_s \frac{\partial\Phi}{\partial \text{n}}\text{ds}=\iint_s (\vec{\nabla}\Phi.\vec{n})ds=\iiint_R div(\vec{\nabla}\Phi)dV=\iiint_R 6dV=$$

$$6\left(\text{حجم کره واحد}\right)=6\left(\frac{4}{3}\times\pi\times(1)^3\right)=6\times\frac{4\pi}{3}=8\pi$$

مثال ۲۲: $u(x,y,z)$ که متحد با صفر نیست، دارای مشتقات جزئی پیوسته تا مرتبه دوم است و مقدارش بر روی سطح کره به مرکز مبداء و شعاع $\rho=a\succ 0$ (a ثابت) صفر می‌باشد. اگر قضیه‌ی دیورژانس را برای میدان برداری $u\vec{\nabla}u$ در داخل و بر روی سطح کره بکار ببرید، آنگاه مقدار انتگرال زیر را بیابید.

$$\iiint\limits_{p\prec a} u\nabla^2 u dxdydz$$

حل: چون مقدار u بر روی سطح کره به مرکز مبدا مختصات و شعاع $p=a>0$ صفر می‌شود، پس u را می توان به فرم زیر در نظرگرفت.

$$u(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2 \ ,\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 2+2+2 = 6$$

$$\iiint_{\rho < a} 6(x^2+y^2+z^2-a^2)dxdydz = 6\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}(\rho^2 - a^2).\ \rho^2 sin10.d\rho\, d\varphi d\theta$$

$$6\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{p^5}{5}-\frac{a^2p^3}{3}\right]sin\varphi d\varphi d\theta = 6\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\left[-2\frac{p^5}{15}\right]sin\varphi d\varphi d\theta$$

و $dxdydz =$ المان حجم در مختصات دکارتی

$$\begin{cases} \rho^2 sin\varphi d\varphi d\theta = \text{المان حجم در مختصات کروی} \\ 0 \le \rho \le a \ ,0 \le \theta \le 2\pi \ \ ,0 \le \varphi \le \pi \end{cases}$$

$\{x^2 + y^2 + z^2 = p^2$ (معادله کره به مرکز مبدا و شعاع ρ)

حاصل انتگرال $= +\frac{4a^5}{5}\int_0^{2\pi}[\cos\varphi]\, d\theta = \frac{-8a^5}{5}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{-16}{5}\pi a^5$

مسائل برای حل

۱- قانون کسینوس‌ها را برای مثلث ABC بدست آورید. $c^2 = a^2 + b^2 - 2abCosc$

راهنمایی: اضلاع $\vec{C}, \vec{B}, \vec{A}$ را برای مثلث abc در نظربگیرید به طوری که $\vec{C} = \vec{B} - \vec{A}$ و سپس از رابطه برداری $\vec{C}.\vec{C} = (\vec{A}-\vec{B})(\vec{A}-\vec{B})$ استفاده کنید.

۲- قانون سینوس‌ها را برای مثلث ABC بدست آورید. $\frac{SinA}{a} = \frac{SinB}{b} = \frac{SinC}{c}$

راهنمایی: اضلاع $\vec{C}, \vec{B}, \vec{A}$ را برای مثلث ABC در نظربگیرید به طوری‌که $\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = 0$ و طرفین آن را در بردارهای $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ ضرب خارجی نمائید.

۳- اگر $\vec{A}$ و $\vec{B}$ و $\vec{C}$ سه بردار دلخواه باشند، نشان دهید.

الف) $\vec{A}.(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}.(\vec{C}\times\vec{A}) = \vec{C}.(\vec{A}\times\vec{B})$ ب) $\vec{A}\times(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}.(\vec{A}.\vec{C}) - \vec{C}.(\vec{A}.\vec{B})$

۴- فرض کنید r_3, r_2, r_1 بردارهای وضعیت سه نقطه‌ی p_3, p_2, p_1 باشند، نشان دهید

$(\vec{r}-\vec{r}_1).(\vec{r}-\vec{r}_2)\times(\vec{r}-\vec{r}_3) = 0$ که در آن $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

۵- اگر $\vec{r} = \vec{a}Cos\omega t + \vec{b}Sin\omega t$ که در آن a,b دو بردار ثابت و ω ثابت اسکالر است در نظر گرفته می‌شود. نشان دهید:

$$\frac{d\vec{r}}{dt^2} + \omega^2\vec{r} = 0 \quad ,\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega(\vec{a} \times \vec{b})$$

۶- نشان دهید برای بردارهای دلخواه C , B , A رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$\vec{A}.\left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{A} \times \vec{B}\right).\vec{C}$$

۷- نشان دهید: $\frac{d}{du}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du} + \frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B}$ که درآن $\vec{A},\vec{B}$ توابع برداری دیفرانسیل پذیر نسبت به u هستند.

۸- نشان دهید $\int \vec{A} \times \frac{d^2\vec{A}}{dt^2}dt = \vec{A} \times \frac{d\vec{A}}{dt} + \vec{C}$ که در آن C یک ثابت برداری است.

۹- مردی با یک قایق می‌خواهد از یک طرف رودخانه به طرف مقابل آن حرکت نماید. فرض کنید پهنای رودخانه D و سرعت‌های قایق و جریان آب به ترتیب $v<V, V$ هستند، نشان دهید که مرد قایق ران بایستی تحت زاویه $sin^{-1}\frac{v}{V}$ نسبت به مسیر عمود بر رودخانه حرکت کند، همچنین زمان مورد نیاز برای گذشتن از عرض رودخانه $\frac{D}{\sqrt{V^2-v^2}}$ می باشد.

۱۰- نشان دهید شتاب‌های مماس و نرمال ذره‌ای‌که برروی مسیر بیضوی با بردار موقعیت $\vec{r}$ حرکت می‌کند، $\vec{r} = aCos\omega t\vec{i} + bSin\omega t\vec{j}$ به ترتیب عبارتند از:

$$\frac{\omega^2 ab}{\sqrt{a^2Sin^2\omega t+b^2Cos^2\omega t}} \quad , \frac{\omega^2(a^2-b^2)Sin\omega t.Cos\omega t}{\sqrt{a^2Sin^2\omega t+b^2Cos^2\omega t}}$$

۱۱- ذره ای به جرم m بر روی دایره‌ای به شعاع R با شتاب زاویه‌ای ثابت α حرکت می‌کند. اگر ذره از حالت سکون شروع به حرکت نماید، نشان دهید بعد از گذشت زمان t سرعت زاویه‌ای ω مساوی αt می‌باشد و طول قوس پوشش داده شده نیز $s = \frac{1}{2}R\omega t^2$ است.

۱۲- صحت روابط زیر را نشان دهید.

الف) $\vec{\nabla}(u+v) = \vec{\nabla}u + \vec{\nabla}v$ ب) $\vec{\nabla}.\left(\vec{A}+\vec{B}\right) = \vec{\nabla}.\vec{A} + \vec{\nabla}.\vec{B}$

ج) $\vec{\nabla}\times\left(\vec{A}+\vec{B}\right) = \vec{\nabla}\times\vec{A} + \vec{\nabla}\times\vec{B}$ د) $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = -\nabla^2\vec{A} + \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)$

ذ) $\vec{\nabla}\times\left(u\vec{A}\right) = \vec{\nabla}u\times\vec{A} + u\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)$ ر) $\vec{\nabla}.\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \vec{B}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) - \vec{A}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)$

ز) $\vec{\nabla}\times\left(r^2\vec{r}\right) = 0 \;,\; \vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ژ) $div(curl\vec{A}) = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) = 0$

س) $curl(grad\phi) = 0 \;,\; \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\phi\right) = 0$ ش) $\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)^2 + \left(\vec{A}.\vec{B}\right)^2 = \vec{A}^2.\vec{B}^2$

ص) $\vec{\nabla}(\phi\vec{A})=(\vec{\nabla}\phi).\vec{A}+\phi(\vec{\nabla}.\vec{A})$ ض) $\vec{A}.\frac{d\vec{A}}{dt}=A\frac{dA}{dt}$

ط) $(\vec{A}\times\vec{B})(\vec{C}\times\vec{D})+(\vec{B}\times\vec{C})(\vec{A}\times\vec{D})+(\vec{C}\times\vec{A})(\vec{B}\times\vec{D})=0$

۱۳- اگر $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ سه بردار باشند که همزمان در یک صفحه نباشند و

$$x_1\vec{A}+y_1\vec{B}+z_1\vec{c}=x_2\vec{A}+y_2\vec{B}+z_2\vec{c}$$

نشان دهید لازم است $z_1=z_2 \quad , y_1=y_2 \quad , \quad z_1=z_2$

۱۴- معادله‌ی $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=-g\vec{k}$ را حل کنید که در آن g یک ثابت است، داده‌های مسئله عبارتند از:

در $\frac{d\vec{r}}{dt}=v_0\vec{k}\ ,\vec{r}=0\ ,t=0$ *جواب:* $\vec{r}=\left(v_0+-\frac{1}{2}gt^2\right)\vec{k}$

۱۵- اگر $\Phi=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$ آنگاه برای تمام نقاط جز مبداء $\nabla^2\phi=\vec{\nabla}.(\vec{\nabla}\phi)=0$ برقرار است.

۱۶- اگر $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ سه بردار دلخواه باشند، نامساوی‌های زیر را نتیجه بگیرید.

الف) $|\vec{A}+\vec{B}|\le|\vec{A}|+|\vec{B}|$, ب) $|\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}|\le|\vec{A}|+|\vec{B}|+|\vec{C}|$

۱۷- نشان دهید که اندازه‌ی شتاب یک ذره که بر روی یک منحنی فضایی حرکت می‌کند، عبارت است از: $\sqrt{(\frac{dv}{dt})^2+\frac{v^2}{R^2}}$ که در آن v سرعت مماس و R شعاع انحنا می‌باشد.

۱۸- اگر $\vec{T}$ بردار یکه‌ی منحنی C و $\vec{A}$ میدان برداری باشد، نشان دهید: $\int_c \vec{A}.d\vec{r}=\int_c \vec{A}.\vec{T}ds$ که در آن s پارامتر طول قوس است.

۱۹- نشان دهید که مساحت مثلث ایجاد شده توسط بردارهای $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ از رابطه‌ی زیر تعیین می‌گردد:

$$A=\frac{1}{2}|\vec{A}\times\vec{B}+\vec{B}\times\vec{C}+\vec{C}\times\vec{A}|$$

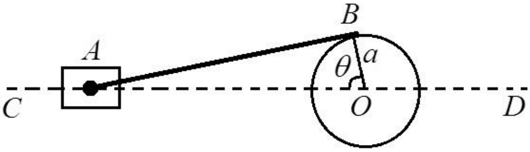
۲۰-نشان دهید که معادله‌ی $\vec{A}\times\vec{X}=\vec{B}$ حاصل می‌شود، درصورتی‌که $\vec{A}.\vec{B}=0\ ,\ \vec{A}\neq 0$ و پاسخ معادله به فرم $\vec{X}=\vec{B}\times\frac{\vec{A}}{A^2}$ می‌باشد. پاسخ عمومی معادله را به فرم $\vec{X}=\vec{B}\times\frac{\vec{A}}{A^2}+\lambda\vec{A}$ بیابید که در آن λ یک اسکالر دلخواه است.

۲۱- نشان دهید جواب معادله‌ی $\vec{A}.\vec{X}=p$ به فرم $\vec{X}=\frac{p\vec{A}}{A^2}+\vec{V}\times\vec{A}$ می‌باشد که در آن $\vec{V}$ یک بردار دلخواه است.

۲۲- اگر $\vec{T},\vec{N}\ ,\vec{B}=\vec{T}\times\vec{N}$ به ترتیب بردارهای مماس یکه، قائم اصلی یکه و قائم دوم یکه برای منحنی فضایی $\vec{r}=\vec{r}(u)$ و همچنین این بردارها دیفرانسیل پذیر در نظر گرفته شوند، آنگاه

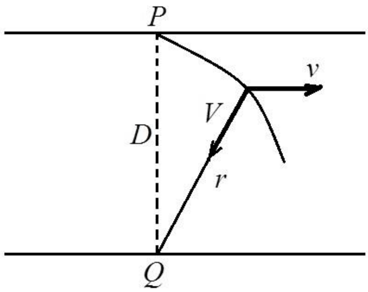
$\frac{d\vec{\mathrm{T}}}{ds} = k\vec{\mathrm{N}} \quad , \frac{d\vec{\mathrm{B}}}{ds} = \tau\vec{\mathrm{N}} \quad , \frac{d\vec{\mathrm{N}}}{ds} = \tau\vec{\mathrm{N}} - k\vec{\mathrm{T}}$ که روابط فرنت- سرت هستند و در آن k انحنا و τ پیچش یا تاب است، همچنین $R = \frac{1}{k}$ شعاع انحنا و $\sigma = \frac{1}{\tau}$ شعاع تاب می‌باشد.

۲۳- در شکل زیر، AB میله‌ی پیستون به طول l می‌باشد، (A لغزنده) اگر A در راستای خط افقی CD حرکت نماید و B نیز با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول دایره‌ای به شعاع a و مرکز O دوران نماید سرعت و شتاب نقطه‌ی A را بیابید.



شکل۲۱- پیستون به همراه لغزنده

۲۴- مطابق ۳-۲۲ قایقی نقطه‌ی p یک طرف رودخانه را ترک می‌کند تا به نقطه‌ی Q در طرف مقابل آن برسد. فرض کنید سرعت قایق V ثابت باشد، فاصله‌ی بین نقاط Q, P یعنی عرض رودخانه D است. اگر r فاصله‌ی دلخواه از Q با قایق و θ و زاویه‌ی بین $\vec{r}$ و PQ باشد و همچنین سرعت جریان آب v باشد، نشان دهید که مسیر قایق از رابطه‌ی مقابل تعیین می‌گردد: $r = \frac{DSec\theta}{(Sec\theta + tan\theta)V/v}$



شکل۳-۲۲- مسیر رودخانه به همراه سرعت‌های جریان آب و رودخانه

۲۵- نشان دهید در مختصات استوانه‌ای بردار وضعیت $\vec{r}$ و همچنین سرعت و شتاب یک نقطه‌ی دلخواه از روابط زیر حاصل می‌شوند.

$$\vec{r} = \rho Cos\varphi\vec{i} + \rho Sin\varphi\vec{j} + z\vec{k} \quad , \quad \vec{v} = \dot{\rho}\vec{\rho}_1 + \rho\dot{\varphi}\vec{\varphi}_1 + \dot{z}\vec{k}$$
$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{\rho}_1 + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{\varphi}_1 + \ddot{z}\vec{k}$$

۲۶- نشان دهید در مختصات کروی (r,θ,φ) بردار وضعیت $\vec{r}$ و سرعت و شتاب یک نقطه‌ی دلخواه از روابط زیر حاصل می‌شوند.

$$\vec{r} = rSin\theta.Cos\emptyset\vec{i} + rSin\theta Sin\emptyset\vec{j} + rCos\theta\vec{k}\ ,\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{r_1} + r\dot{\theta}\overrightarrow{\theta_1} + r\varphi\vec{\varphi}_1$$
$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\varphi^2Sin^2\theta\right)\overrightarrow{r_1} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} - r\dot{\varphi}^2Sin\theta Cos\theta\right)\overrightarrow{\theta_1} +$$
$$(2r\dot{\theta}\dot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}Sin\theta + r\ddot{\varphi}sin\theta)\vec{\varphi}_1$$

۲۷- نشان دهید لاپلاسین $\emptyset = f(r)$ که در آن $f(r) = \frac{f'(r)}{r}\vec{r}$ و $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ $f(r) = \frac{df}{dr}$ به فرم $\nabla^2\emptyset = f''(r) + \frac{2}{r}f'(r)$ است.

۲۸- $grad\emptyset\ ,\ div\vec{A}\ ,\nabla^2\emptyset$ را در مختصات کروی استخراج کنید.

۲۹- نشان دهید لاپلاسین ϕ و گرادیان $\vec{A}$ در سیستم مختصات استوانه‌ای سهموی برابر است با:

$$\nabla^2\emptyset = \frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{\partial^2\vec{\emptyset}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\vec{\emptyset}}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2\emptyset}{\partial z^2}$$
$$div\vec{A} = \frac{1}{u^2+v^2}\left(\frac{\partial}{\partial u}\sqrt{u^2+v^2}.A_1\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\sqrt{u^2+v^2}.A_2\right) + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

راهنمایی:در سیستم مختصات استوانه‌ای سهموی $x = \frac{1}{2}(u^2-v^2)\ ,y = uv\ ,z = z$

۳۰- نشان دهید برای سیستم مختصات منحنی الخط متعامد:

$$\vec{\nabla}\emptyset = \frac{\vec{e}_1}{h_1}\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial u_1} + \frac{\vec{e}_2}{h_2}\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial u_2} + \frac{\vec{e}_3}{h_3}\frac{\partial\vec{\Phi}}{\partial u_3}$$

$\vec{\nabla}\emptyset = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3$ و از این واقعیت استفاده نمائید که $d\vec{\Phi} = \vec{\nabla}\emptyset.d\vec{r}$ و مشابه سیستم های مختصات منحنی الخط و کارتزین می‌باشد.

۳۱- اگر $u(x,y)$ و D همساز باشد، آنگاه نشان دهید (به بخش آنالیز مختلط مراجعه نمائید)

$$u(x,y) = \frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial Lnr}{\partial n} - Lnr\frac{\partial u}{\partial n}\right)ds$$

۳۲- نشان دهید

$$\oint_C\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial r}\\ u & v\end{vmatrix}ds = \iint_D\begin{vmatrix}\nabla^2u & \nabla^2v\\ u & v\end{vmatrix}dxdy$$

علامت $|\ |$ به معنی دترمینان است و ∇^2u لاپلاسین تابع u می‌باشد.

۳۳- فرض کنید که تابع (x,y) یک تابع همساز باشد، یعنی دوبار مشتق پذیر بوده و $u_{xx}+u_{yy}=0$ یعنی $\nabla^2u = 0$ آنگاه نشان دهید. $\iint_C\frac{\partial u}{\partial n}ds = 0$

۳۴- هرگاه x_1, y_1, z_1 نقطه‌ای واقع بر کره $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و x_2, y_2, z_2 نقطه‌ای واقع بر کره‌ی $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$ باشد، آنگاه حاصل انتگرال زیر را تعیین کنید.

$$\int_{(x_1,y_1,z_1)}^{(x_2,y_2,z_2)} \frac{xdx + ydy + zdz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

۳۵-هرگاه u,v توابعی مشتق پذیر باشند، آنگاه به کمک قضیه‌ی گرین نشان دهید:

$$\oint_C u\vec{\nabla} v . nds = \iint_P \left\{u\left(\vec{\nabla}.\vec{\nabla} v\right) + \vec{\nabla} u . \vec{\nabla} v\right\} dxdy$$

۳۶- به کمک قضیه‌ی گرین کار انجام شده توسط نیروی $\vec{F}(x,y) = x(x+y)\vec{i} + xy^2\vec{j}$ در حرکت ذره‌ای از مبدا تا (۰و۱) و از آنجا تا (۱و۰) و برگشت مجدد به مبدا را محاسبه کنید.

۳۷- هرگاه بر ناحیه‌ی D داشته باشید $\vec{\nabla}^2 u = 0$ آنگاه نشان دهید.

$$\iint_D \left\{(\frac{\partial u}{\partial x})^2 + (\frac{\partial u}{\partial y})^2\right\} dxdy = \iint_C \frac{\partial u}{\partial x} ds$$

۳۸- با استفاده از قضیه‌ی گرین، کار انجام شده را برای حرکت شیئی که منحنی مفروض C را یک بار در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌پیماید، تعیین کنید. فرض کنید که منحنی حرکت شی ناشی از میدان نیروی مفروض $\vec{F}(x,y)$ باشد و طول قوس بر حسب متر و نیرو بر حسب نیوتن اندازه‌گیری شود.

الف) C راس مثلثی $(0,0)$, $(2و0)$,(0.2) می‌باشد. $\vec{F}(x,y) = \left(e^{x^2} + y^2\right)\vec{i} + \left(e^{y^2} + x^2\right)\vec{j}$

ب) C مرکب است از نیمه‌ی بالایی بیضی $9x^2 + 4y^2 = 36$ و بازه‌ی $[-2و2]$روی محور xها

$\vec{F}(x,y) = \left(xy + y^2\right)\vec{i} + xy\vec{j}$

۳۹- اگر R ناحیه‌ی تعریف شده با ضابطه‌ی زیر بوده و $g_1(y)$, $g_2(y)$ هموار باشند، نشان دهید:

$$\oint_C N(x,y)dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x} dA \quad , \quad R = \left\{(x,y) \middle| c \le y \le d , g_1(y) \le x \le g_2(y)\right\}$$

۴۰- انتگرال‌های منحنی‌الخط داده شده را با ناحیه‌ی مشخص شده محاسبه نمایید.

الف) $\oint_C \frac{x^2 y}{x^2+1} dx - \tan^{-1} xdy \quad , \quad C: 4x^2 + 25y^2 = 100$

ب) $\oint_C \tan ydx + x\tan^2 ydy \quad , \quad C: x^2 + 4y^2 = 1$

ج) $\oint_C \left(Sin^4 x + e^{2x}\right)dx + \left(Cos^3 y - e^y\right)dy \quad , \quad C: x^6 + y^4 = 10$

د) $\oint_C \sqrt{y}dx + \sqrt{x}dy$ و C منحنی بسته‌ای که با محور xها، خط $x=1$ و منحنی $y = x^2$ معین می‌شود.

۴۱- نشان دهید انتگرال خطی زیر مستقل از مسیر است. سپس مقدار آن را با استفاده از تابع پتانسیل بدست آورید. $\oint_C (2xcosy-3)dx-(x^2siny+z^2)dy-(2yz-2)dz$

$C: A(-1,0,3) \to B(1,\pi,0)$

۴۲- حاصل انتگرال منحنی الخط داده شده را بیابید.

$\oint_C z^2dx+x^2dy+y^2dz \quad C: \vec{R}(t)=aCost\vec{\imath}+aSint\vec{\jmath}+t\vec{k} \quad ,0\le t\le 2\pi$

۴۳- اگر $f(x)$ تابع دیفرانسیل پذیر پیوسته $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ باشد، نشان دهید:

$$\iint\limits_S f(r)\vec{n}ds=\iiint\limits_V \frac{f'(x)}{r}\vec{r}dV$$

۴۴- اگر $\vec{n}$ بردار یکه قائم به سمت خارج برای هر سطح بسته s محدود به ناحیه V باشد، آنگاه نشان دهید:

$$\iiint\limits_V div\vec{n}dV=s$$

۴۵- اگر V ناحیه محدود به سطح بسته s باشد و $\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A}$ آنگاه نشان دهید: $\iint_s \vec{B}.\vec{n}ds=0$

۴۶- اگر C هر مسیر متصل کننده‌ی نقاط دلخواه واقع بر روی کره‌های $x^2+y^2+z^2=a^2$ و $x^2+y^2+z^2=b^2$ باشد، آنگاه نشان دهید اگر $\vec{F}=5r^3\vec{r}$ که در آن $\vec{r}=x\vec{\imath}+y\vec{\jmath}+z\vec{k}$ آنگاه: $\oint_C \vec{F}.d\vec{r}=b^5-a^5$ و $\oint_C \vec{F}.d\vec{r}$ را بیابید که درآن $\vec{F}=f(r)\vec{r}$ و $f(r)$ پیوسته در نظر گرفته می‌شود.

۴۷- انتگرال $\iint_s(\vec{\nabla}\times\vec{A})\vec{n}ds$ را تعیین کنید که $\vec{A}=(x-z)\vec{\imath}+(x^3+yz)\vec{\imath}-3xy^3\vec{k}$ سطح مخروط $z=2-\sqrt{x^2+y^2}$ بالای صفحه‌ی xy می‌باشد.

۴۸- نشان دهید برای هر سطح بسته: $\iint_s(\vec{\nabla}\times\vec{A}).\vec{n}ds=0$

۴۹- اگر $\vec{F}=(3x-2y)\vec{\imath}+(y+2z)\vec{\jmath}-x^2\vec{k}$ حاصل انتگرال $\oint_C \vec{F}.d\vec{r}$ را از نقطه‌ی مبدا مختصات تا $(1,1,1)$ بیابید تا در آن C مسیر شامل:

الف) منحنی $x=t\ ,y=t^2\ ,z=t^3$ (جواب: $\frac{23}{15}$)

ب) خط مستقیم متصل کننده این نقاط (جواب : $\frac{23}{15}$)

پ) خطوط مستقیم از $(0,0,0)$ به $(0,1,0)$ و سپس به $(0,1,1)$ و آنگاه به نقطه $(1,1,1)$ (جواب صفر)

ت) منحنی $z = y^2 \;\; , x = z$ (جواب $\frac{13}{15}$)

۵۰- سطح محدود به هیپوسیکلوئید $x^{\frac{1}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ را بیابید.

راهنمایی: معادلات پارامتری را به فرم $0 \le t \le 2\pi \;\; , x = aCos^3t \;\; , y = aSin^3t$ در نظر بگیرید. (جواب: $\frac{3\pi}{8}a^2$)

۵۱- نشان دهید $\frac{e^{y/x}G}{x}$ که در آن $G = (2x^2 + xy - 2y^2)dx + (3x^2 + 2xy)dy$ یک دیفرانسیل کامل ϕ می‌باشد، نشان دهید: $\Phi = e^{y/x} = (x^2 + 2xy) + C$

۵۲- اگر $y = g(u, v) \;\; , x = f(u, v)$ نگاشت ناحیه‌ی R از صفحه‌ی xy به ناحیه‌ی R' از صفحه‌ی uv باشد و همچنین $\iint_R dxdy = \frac{1}{2}\oint_C xdy - ydx$ نشان دهید: $\iint_R \mathrm{dxdy} = \iint \left|\frac{\partial(\mathrm{x,y})}{\partial(\mathrm{u,v})}\right| \mathrm{dudv}$

راهنمایی: در حل مسئله از قضیه‌ی گرین استفاده کنید.

۵۳- نشان دهید خط مماس برمنحنی فضایی C فصل مشترک دو رویه‌ی $z = x^2 - y^2$ و $3xy - 2z = 0$ در نقطه‌ی $p(2,1,3)$ موازی بردار $2\vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k}$ می‌باشد.

۵۴- اگر g,f دو تابع اسکالر و $\vec{v}$ یک تابع برداری باشد، نشان دهید:

$$1)\ div(f\vec{v}) = f div\vec{v} + \vec{v}.\vec{\nabla}f \qquad 2)\ div\big(f\vec{\nabla}g\big) = f\nabla^2 g + \vec{\nabla}f.\vec{\nabla}g$$
$$3)\ div\big(f\vec{\nabla}g\big) - div\big(g\vec{\nabla}f\big) = f.\vec{\nabla}^2 g - g\nabla^2 f$$

۵۵-اگر $f(x, y, z) = z^2 - xe^{3x-y}$ اندازه‌ی تصویر بردار $\vec{\nabla}f$ در نقطه‌ی $p(1,3,-1)$ بر روی بردار $\vec{A} = -\vec{i} + \vec{j}$ را بیابید.

۵۶- چند نقطه بر روی سطح $xyz=1$ می‌توان یافت که فاصله‌ی آن نقاط تا مبدا حداقل باشد.

۵۷- منحنی فضایی با معادله‌ی برداری $\vec{R} = t\vec{i} + t^2\vec{j} - t^3\vec{k}$ داده شده است. صفحه‌ی شامل مماس و قائم اصلی (صفحه‌ی بوسان) این منحنی در نقطه‌ی (۱-و۱و۱) محور xها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند.

۵۸- مختصات قطبی متحرکی در لحظه‌ی t به صورت $r = e^{2t} + e^{-2t} \;\; , \theta = \frac{3}{2}t$ است. تصویر بردار شتاب بر روی شعاع حاصل را بیابید.

۵۹-اگر $\vec{R}(t)$ یک تابع برداری باشد که در شرط $\left|\vec{R}(t)\right| = m$ صدق نماید، آنگاه $\vec{R}'(t)$ صفحه است یا $\vec{R}'(t)$ بر $\vec{R}(t)$ عمود است.

۶۰- بردار یکه‌ی قائم اصلی یعنی $\vec{N}(t)$ را برای مارپیچ $\vec{R}(t) = Cost\vec{i} + Sint\vec{j} + t\vec{k}$ بیابید.

۶۱- فرض کنید s مرز ناحیه‌ی کران‌دار D و $\vec{n}$ بردار یکه‌ی قائم خارجی s باشد. اگر f روی s پیوسته و در D دارای مشتقات جزئی پیوسته باشد و $\frac{\partial f}{\partial n}$ مشتق جهتی f در سوی n باشد، نشان دهید رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$\iint_s \frac{\partial f}{\partial n} ds = \iiint_D \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right) dV$$

۶۲- نشان دهید اگر $\vec{n}\,, \vec{F} = 4x\vec{i} - 2y\vec{j} + \vec{k}$ بردار قائم خارجی بر سطح بسته و هموار σ باشد، حجم ناحیه‌ی محدود به σ برابر $\frac{1}{2}\iint_\sigma \left(\vec{F}.\vec{n}\right) d\sigma$ می‌باشد.

۶۳- با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس نشان دهید:

$$I = \iint_S xdydz + ydzdx + zdxdy = 81\pi$$

$$s: x^2 + y^2 = 9 \ \ , z = 0 \ \ , z = 3$$

۶۴- با استفاده از قضیه‌ی دیورژانس انتگرال تابع برداری $\vec{F}$ را روی فضایی که به وسیله‌ی رویه‌های زیر محصور شده است، حساب کنید. $\iint_\sigma \left(\vec{F}.\vec{n}\right) d\sigma$

$$2x + 2y + z = 6\,, x = 0 \ \ , y = 0 \ \ , z = 0$$

$$\vec{F} = (2xy + z)\vec{i} + y^2\vec{j} - (x + 3y)\vec{k}$$

۶۵- حاصل انتگرال رویه‌ای $\int_{(0,1)}^{(2,3)} (x + y)dy + (x - y)dx$ را بیابید.

۶۶-حاصل $\oint_C (3x + 4y)dx + (3x + y^2)dy$ را بیابید که $C: 16x^2 + 9y^2 = 144$

۶۷- نشان دهید حاصل انتگرال $\iint_S \vec{F}.\vec{n}ds$ که در آن $\vec{F}(x,y,z) = (\frac{x^3}{a^2}, \frac{y^3}{b^2}, \frac{z^3}{c^2})$ و s سطح بیضی گون $\left(\frac{x^3}{a^2} + \frac{y^3}{b^2} + \frac{z^3}{c^2}\right) = 1$,$\vec{n}$ بردار قائم یکه خارجی رویه s برابر $\frac{12\pi}{5} abc$ می باشند.

۶۸- فرض کنید C منحنی فصل مشترک $x^3 + y^3 + (z - 3)^2 = 9$ و صفحه‌ی $z = x + 3$ باشد که از مبدا در جهت عقربه‌های ساعت دیده می‌شود و $\vec{F} = 2y\vec{i} + z\vec{j} - 3y\vec{k}$

با استفاده از قضیه‌ی استوکس حاصل انتگرال $\oint_c \vec{F}.d\vec{R}$ را حساب کنید.

۶۹- انتگرال زیر را روی سطح بسته‌ای حساب کنید که ناحیه‌ی R محدود به رویه $z = 4 - x^2 - y^2$ و صفحه‌ی $z = 0$ را احاطه کرده باشد.

$$\iint_s (1 + tanx^2 + y^2)dxdz + (3x^2 - 5yz + 5z)dxdy + (e^z + 3xy)dydz$$

۷۰-اگر C پیرامون مثلث با رئوس (۰و۱و۳) و (۰و۳و۱) و (۲و۱و۱) باشد، آنگاه مقدار انتگرال منحنی‌الخط $\oint_C (y+z)dx+(x+z)dy+(x+y)dz$ برابر صفر است.

۷۱- اگر $\vec{n}$ برداریکانی باشد، نشان دهید حاصل عبارت $\vec{n}\times[\vec{n}\times(\vec{n}\times\vec{B})]$ برابر است با:
$(\vec{n}.\vec{B}).\vec{n}$ که در آن $\vec{B}$ یک بردار اختیاری است.

۷۲- اگر بین سه بردار $\vec{A}\,,\vec{B}\,,\vec{C}$ رابطه‌ی $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=0$ برقرار باشد، آنگاه:
$\vec{A}\times\vec{B}=\vec{B}\times\vec{C}=\vec{C}\times\vec{A}$

۷۳- خطی از مبدا مختصات بر رویه‌ای به معادله $xy+z=3$ عمود شده است. نشان دهید مختصات پای قائم $(\sqrt{2},\sqrt{2},1)$ می‌باشد.

مشتق سوئی (جهتی)، گرادیان

مشتق جهتی تابع $z=f(x,y)$ درنقطه‌ی $P_0(x_0,y_0)$ درجهت بردار $\overrightarrow{P_0P}$ به شکل زیر تعریف‌می گردد:

$$\lim_{p\to P_0}\frac{f(p)-f(P_0)}{|\overrightarrow{P_0P}|} \qquad (۹۰-۳)$$

مشتق جهتی تابع f در جهت بردار یکه‌ی $\vec{u}$ که با نماد $f_{\vec{u}}(P_0)$ نشان داده می‌شود را می‌توان از رابطه‌ی زیر تعیین کرد.

$$f_{\vec{u}}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)Cos\alpha+f_y(x_0,y_0)Sin\alpha \qquad (۹۱-۳)$$

که در آن α زاویه بردار $\vec{u}$ با محورxها است. در مورد تابع سه متغیره $f(x,y,z)$ رابطه به شکل زیر است.

$$f'_{\vec{u}}(x_0,y_0,z_0)=f_x(x_0,y_0,z_0)Cos\alpha+f_y(x_0,y_0,z_0)Cos\beta+f_z(x_0,y_0,z_0)Cos\gamma$$

که در آن $cos\beta$ و $cos\alpha$ و $cos\gamma$ کسینوس‌های هادی بردار $\vec{u}$ هستند.

تعریف گرادیان

تابع $w=f(x,y,z)$ در نقطه‌ی $p(x,y,z)$ برداری است به مبدا p که مولفه‌هایش جزئی از تابع w هستند.

$$\overrightarrow{grad}w=\vec{\nabla}w=f_x(x,y,z)\vec{i}+f_y(x,y,z)\vec{j}+f_z(x,y,z)\vec{k} \qquad (۹۲-۳)$$

که در آن:

$f_x=\frac{\partial f}{\partial x}\ ,f_y=\frac{\partial f}{\partial y},f_z=\frac{\partial f}{\partial z}$ عملگر ∇ را دل یا نابلا می‌نامند.

اگر θ زاویه‌ی بین بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{\nabla f}$ در نقطه‌ی p_0 باشد، آنگاه:

(۹۳-۳) $f'_{\vec{u}}(p_0) = |\vec{\nabla} f(p_0)| Cos\theta$ (گرادیان تابع f در جهت بردار $\vec{u}$ و در نقطه p_0)

بنابراین $f'_{\vec{u}}(p_0)$ زمانی حداکثر است که $Cos\theta = 0$ باشد، یعنی $\vec{u}$ در جهت $\vec{\nabla f}$ باشد.

اگر $F(x, y, z)$ و معادله‌ی رویه s، F_z, F_y, F_x در نقطه‌ی $p_0(x_0, y_0, z_0)$ بر s پیوسته بوده و همگی صفر نباشند، آنگاه $\vec{\nabla f}(x_0, y_0, z_0$ بردار قائم بر سطح s در نقطه p_0 می‌باشد.

صفحات مماس و خطوط قائم بر رویه‌ها

با در نظرگرفتن معادله رویه‌ی s به فرم $F(x, y, z)$ و $p_0(x_0, y_0, z_0)$ به عنوان نقطه‌ای واقع بر رویه‌ی $F(x_0, y_0, z_0)$ همچنین C یک منحنی روی s باشدکه از نقطه‌ی p_0 می‌گذرد و دارای معادلات پارامتری $x = f(t)\ , y = g(t)\ , z = h(t)$ باشد. فرض کنید t_0 مقدار پارامتر t در نقطه‌ی p_0 است، معادله برداری آن به شکل زیر است:

$$\vec{R}(t) = f(t)\vec{\imath} + g(t)\vec{\jmath} + h(t)\vec{k} \tag{۹۴-۳}$$

چون منحنی C بر رویه‌ی s قرار دارد، بنابراین:

$$F\big(f(t), g(t), h(t)\big) = 0$$

با قرار دادن $G(t) = F\big(f(t), g(t), h(t)\big)$ اگر F_x, F_y, F_z پیوسته باشند و همگی در p_0 صفر نباشند و همچنین $h'(t_0), g'(t_0), f'(t_0)$ موجود باشند،آنگاه مشتق کلی F نسبت به t در p_0 با استفاده از ضابطه‌ی زیر تعیین می گردد.

$$G'(t_0) = F_x(x_0, y_0, z_0)f'(t_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)g'(t_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)h'(t_0)$$

که به فرم زیر نیز نوشته می‌شود.

$$G'(t_0) = \left[F_x(x_0, y_0, z_0)\vec{\imath} + F_y(x_0, y_0, z_0)\vec{\jmath} + F_z(x_0, y_0, z_0)\vec{k}\right] \times$$
$$\left[f'(t_0)\vec{\imath} + g'(t_0)\vec{\jmath} + h'(t_0)\vec{k}\right] = \vec{\nabla}F(x_0, y_0, z_0).\frac{d}{dt}\vec{R}(t_0)$$

چون به ازای تمام t های مورد نظر $G'(t_0) = 0$ بنابراین $G'(t_0) = 0$ و نتیجه می‌شود:

$$\vec{\nabla}F(x_0, y_0, z_0).\frac{d}{dt}\vec{R}(t_0) = 0$$

جهت $\frac{d}{dt}\vec{R}(t)$ با جهت بردار واحد مماس بر منحنی C در P یکی است.

تعریف۱: اگر $F(x,y,z) = 0$ معادله رویه‌ی S باشد، صفحه‌ی مماس بر S در نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ صفحه‌ای است که از P_0 می‌گذرد و $\vec{\nabla}F(x_0,y_0,z_0)$ بردار قائم آن است. معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر فرم زیر نوشته می‌شود:

$$F_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + F_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + F_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0) \tag{۹۵-۳}$$

تعریف۲: خط قائم بر رویه‌ی S در نقطه‌ای چون P_0 روی S خطی است که از P_0 می‌گذرد و مولفه‌های هر بردار قائم بر S در P_0 مجموعه‌ای از اعداد هادی آن هستند. اگر $F(x,y,z)$ معادله‌ی S باشد، معادلات متقارن خط قائم بر S در $p_0(x_0,y_0,z_0)$ به صورت زیر هستند:

$$\frac{x-x_0}{F_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(x_0,y_0,z_0)} \tag{۹۶-۳}$$

خط قائم در یک نقطه بر رویه‌ی عمود بر صفحه مماس در آنجاست.

تعریف۳: تعیین یک تابع با استفاده از گرادیانش

هدف یافتن تابعی است که گرادیانش معلوم است یعنی:

$$\vec{\nabla}f = f_x(x,y)\vec{i} + f_y(x,y)\vec{j}$$

ابتدا بایستی مشخص نمود که بردار داده شده گرادیان است یا نه، سپس تابع مورد نظر استخراج می‌شود. برای توابع دو متغیره و سه متغیره قضایای زیر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

قضیه‌ی۱: فرض کنید M , N توابعی از دو متغیر x,y باشند که روی قرص بازی چون $B(x_0,y_0)$ در R^2 تعریف شده باشند (حالت دو بعدی، قرص شعاع r) و M_y و N_x روی B پیوسته باشند در این صورت بردار $M(x,y)\vec{i} + N(x,y)\vec{j}$ یک گرادیان روی B است، اگر و تنها اگر به ازای تمام نقاط واقع B

$$M_y(x,y) = N_x(x,y)$$

قضیه‌ی۲: فرض کنید M,N,R توابعی از سه متغیر x,y,z باشند که روی گوی بازی چون $B((x_0,y_0,z_0),r)$ در R^3 (فضای سه بعدی) تعریف شده باشند و M_y , M_z , N_x, N_z , R_x , R_y پیوسته باشند در این صورت بردار $M(x,y,z)\vec{i} + N(x,y,z)\vec{j} + R(x,y,z)\vec{k}$ روی B یک گرادیان است، اگر و تنها اگر $M_y = N_x, M_z = R_x , N_z = R_y$

مسائل حل شده

مثال۱: نشان دهید که معادله‌ی صفحه‌ی مماس بر بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ در نقطه‌ی $p(x_0,y_0,z_0)$ عبارت است از: $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$

حل: بردار نرمال صفحه‌ی مماس بر رویه در نقطه p همان گرادیان تابع در نقطه‌ی p می‌باشد، بنابراین:

$$f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$$

$$\vec{\nabla}f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}=\frac{2x}{a^2}\vec{i}+\frac{2y}{b^2}\vec{j}+\frac{2z}{c^2}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla}f(x_0,y_0,z_0)=\frac{2x_0}{a^2}\vec{i}+\frac{2y_0}{b^2}\vec{j}+\frac{2z_0}{c^2}\vec{k}$$

معادله‌ی صفحه‌ی مماس به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0$$

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=\frac{{x_0}^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}+\frac{{z_0}^2}{c^2}$$

و چون نقطه‌ی $p(x_0,y_0,z_0)$ روی بیضی‌گون قرار دارد، پس $\frac{{x_0}^2}{a^2}+\frac{{y_0}^2}{b^2}+\frac{{z_0}^2}{c^2}=1$ سرانجام با جایگزینی می‌توان نوشت: $\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1$

مثال۲: نشان دهید $\vec{\nabla}f(x,y)=a\vec{i}+b\vec{j}$ اگر و تنها اگر $f(x,y)=ax+by+c$ که در آن c,b,a ثابت هستند.

حل: با توجه به قضیه‌ی بیان شده برای حالت دو متغیره $M(x,y)=a\ ,N(x,y)=b$ شرط گرادیان این است که $M_y=N_x$ با ثابت بودن b,a این رابطه برقرار است، همچنین با در نظر گرفتن

$$f(x,y)=ax+by+c\ ,\vec{\nabla}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}=a\vec{i}+b\vec{j}$$

همچنین C بایستی ثابت باشد که بتوان به بردار قسمت اول رسید. بنابراین c,b,a در مجموع بایستی ثابت باشند.

مثال۳: نشان دهید که بردار داده شده یک گرادیان است یا نه، اگر گرادیان است تابعی بیابید که دارای گرادیان مفروض باشد. $z\tan y\vec{i}+xzSec^2y\vec{j}+x\tan y\vec{k}$

حل: با توجه به بردار داده شده می‌توان نوشت:

$$M=z\tan y\ ,N=xzSec^2y\ ,R=x\tan y$$

$$M_y = z(1+tan^2y) = zSec^2y \quad , \quad N_x = zSec^2y \quad , \quad N_x = zSec^2y$$
$$M_z = tany \quad , \quad R_x = zSec^2y \quad , \quad R_x = M_z$$
$$N_z = xSec^2y \; , \; R_y = x(1+tan^2y) = xSec^2y \quad , \quad M_z = R_y$$

بنابراین بردار داده شده یک گرادیان است. پس تابعی مثل $f(x,y,z)$ وجود دارد به قسمی که

$$\vec{\nabla} f = f_x\vec{\imath} + f_y\vec{\jmath} + f_z\vec{k} = M\vec{\imath} + N\vec{\jmath} + R\vec{k}$$
$$f_x = M = ztany \to f(x,y,z) = \int Mdx + g(y,z) = \int ztanydx + g(y,z)$$
$$f(x,y,z) = [xztany] + g(y,z)$$
$$f_y = xzSec^2y + g'(y,z) = xzSec^2y \to g'(y,z) = 0 \, , g(y,z) = C_1 + h(z)$$
$$f(x,y,z) = xztany + C_1 + h(z)$$
$$f_z = xtany + h'(z) = Rxtany \to h'(z) = 0 \to h(z) = C_2$$
$$f(x,y,z) = xztany + C, C_1 + C_2 = C$$

مثال٤: نشان دهید، دوکره‌ی $(x-b)^2+y^2+z^2=(b-a)^2 , x^2+y^2+z^2=a^2$ در نقطه‌ی $p(a,0,0)$ بر هم مماس هستند.

حل: بایستی نشان داده شود که هر دو کره در این نقطه دارای یک صفحه مماس هستند.

$$f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-a^2$$
$$\vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = 2x\vec{\imath} + 2y\vec{\jmath} + 2z\vec{k} \quad , \quad \vec{\nabla} f_p = 2a\vec{\imath}$$

حال معادله‌ی صفحه مماس نوشته می‌شود.

$$2a(x-a) + 0(y-0) + 0(z-0) = 0 \;\; \to 2a(x-a) = 0 \to x = a$$
$$g(x,y,z) = \; (x-b)^2 + y^2 + z^2 = (b-a)^2$$

حال معادله‌ی صفحه مماس بر کره‌ی دوم تعیین می‌شود.

$$\vec{\nabla} g(x,y,z) = \frac{\partial g}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{k} = 2(x-b)\vec{\imath} + 2y\vec{\jmath} + 2z\vec{k} \, , \vec{\nabla} f_p = 2(b-a)\vec{\imath}$$

پس صفحه مماس به فرم زیر تعیین می‌شود.

$$2(b-a) \times (x-a) + 0 \times (y-0) + 0(z-0) + 0$$
$$2(b-a)(x-a) = 0 \quad \to x = a$$

معادله‌ی صفحه مماس بر کره‌ی g

مثال٥: نشان دهید که هر خط قائم بر کره‌ی $x^2+y^2+z^2=a^2$ از مرکز کره می‌گذرد.

حل: $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-a^2 \quad , \quad \vec{\nabla} f = 2X\vec{\imath} + 2y\vec{\jmath} + 2z\vec{k}$

فرض کنید که خط قائم بر کره در نقطه $p(x_0,y_0,z_0)$ مد نظر است.

$\vec{\nabla} f_p = 2x_0\vec{i} + 2y_0\vec{j} + 2z_0\vec{k}$ شیب خط قائم (بردار نرمال صفحه مماس)

$$\frac{x-x_0}{2x_0} = \frac{y-y_0}{2y_0} = \frac{z-z_0}{2z_0} \quad \rightarrow \frac{x-x_0}{x_0} = \frac{y-y_0}{y_0} = \frac{z-z_0}{z_0}$$

$$\frac{x-x_0}{x_0} = \frac{y-y_0}{y_0} \rightarrow (x-x_0)y_0 = x_0(y-y_0) \rightarrow xy_0 = x_0y_0 = x_0y - x_0y_0$$

$\rightarrow\ xy_0 = x_0y \ \ \rightarrow x = y = 0$ صدق می کند

$$\frac{y-y_0}{y_0} = \frac{z-z_0}{z_0} \rightarrow\ (y-y_0)z_0 = y_0(z-z_0) \rightarrow yz_0 - y_0z_0 = y_0z - y_0z_0$$

$yz_0 = y_0z \ \ \rightarrow y = z = 0$ صدق می کند

در نتیجه مبدا مختصات در معادله‌ی قائم صدق می کند، یعنی خط قائم بر کره از مرکز کره می گذرد.

مثال٦: دما در هر نقطه‌ی (x,y) از یک ورقه مستطیلی شکل واقع در صفحه‌ی xy برابراست با T درجه و $T = 3x^2 + 2xy$ فاصله بر حسب متر اندازه‌گیری می‌شود. الف) تعیین حداکثر آهنگ تغییر دما در نقطه‌ی $p(3,-6)$ روی ورقه، ب) تعیین جهتی که به ازای آن حداکثر آهنگ تغییر در (۶-و۳) روی دهد.

حل: ابتدا گرادیان دما حساب می‌شود.

$$\vec{\nabla} T = \frac{\partial T}{\partial y}\vec{i} + \frac{\partial T}{\partial y}\vec{j} = (6x+2y)\vec{i} + 2x\vec{j}\ ,\ \ \vec{\nabla}T_{p(3,-6)} = 6\vec{i} + 6\vec{j}$$

$\left|\vec{\nabla}T\right| = \sqrt{6^2+6^2} \ \ \rightarrow \left|\vec{\nabla}T\right| = 6\sqrt{2}$ درجه در متر

$$\vec{\nabla}T.\vec{n} = \left|\vec{\nabla}T\right|_{p(3,-6)} \rightarrow (6\vec{i}+6\vec{j}).(n_1\vec{i}+n_2\vec{j}) = 6\sqrt{2}$$

$$6n_1 + 6n_2 = 6\sqrt{2} \quad , \quad n_1 + n_2 = \sqrt{2}$$

$$n_1^2 + n_2^2 = 1 \ \ \rightarrow\ n_1^2(\sqrt{2}-n_1)^2 = 1 \ \ \rightarrow n_1^2 + n_2^2 + 2 - 2\sqrt{2n_1} \ = 1$$

$$2n_1^2 - 2\sqrt{2n_1}\ + 1 = 0 \ \ \rightarrow n_1^2 - 2\sqrt{2n_1} + \frac{1}{2} = 0 \ \ , n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \ , n_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$$

مثال۷: اگر تابع $u(x,y,z)$ در رابطه‌ی زیر صدق کند، آنگاه تابع u را به‌دست آورید:

$$\vec{\nabla} u = (2xz^2 + ye^{xy})i + (xe^{xy} + 2yz^2)j + 2(x^2+y^2+1)z\vec{k}$$

حل:

$$p = 2xz^2 + ye^{xy} \quad , Q = xe^{xy} + 2yz^2 \quad , R = 2(x^2+y^2+1)z$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial p}{\partial y}=e^{xy}+xye^{xy}\\ \dfrac{\partial p}{\partial z}=4xz\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial Q}{\partial x}=e^{xy}+xye^{xy}\\ \dfrac{\partial Q}{\partial z}=4yz\end{cases}\qquad \begin{cases}\dfrac{\partial R}{\partial x}=4xz\\ \dfrac{\partial R}{\partial y}=4yz\end{cases}$$

بنابراین نتیجه می‌شود

$$\frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial Q}{\partial x}\quad,\quad \frac{\partial p}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x}\quad,\quad \frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}$$

لذا میدان پایستار (نگهدار) است و می‌توان تابع $u(x,y,z)$ را به‌دست آورد.

$$p=\frac{\partial u}{\partial x}\quad,\quad Q=\frac{\partial u}{\partial y}\quad,R=\frac{\partial u}{\partial z}$$

$$p=\frac{\partial u}{\partial x}=2xz^2+ye^{xy}\ \rightarrow u(x,y,z)=\int(2xz^2+ye^{xy})dx+h(y,z)=$$

$$x^2z^2+e^{xy}+h(y,z),\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=0+xe^{xy}+h'(y,z)=Q=xe^{xy}+2yz^2$$

$$h'(y,z)=2yz^2\ \rightarrow h(y,z)=\int 2yz^2dy+g(z)=y^2z^2+g(z)$$

$$u(x,y,z)=x^2z^2+e^{xy}+y^2z^2+g(z)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=2zx^2+2zy^2+g'(z)=R=2(x^2+y^2+1)z\ ,g'(z)=$$

$$2z\quad,\quad g(z)=z^2+C\ ,u(x,y,z)=x^2z^2+e^{xy}+y^2z^2+z^2+C$$

مثال۸: اگر $\vec{r}(x,y,z)=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$، $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$، f تابعی مشتق پذیر از r باشد، آنگاه نشان دهید: $\vec{\nabla}f(r)=f'(r).\dfrac{\vec{r}}{r}$

حل: (استفاده از قاعده زنجیری) $\vec{\nabla}f(r)=f_x(r)\vec{i}+f_y(r)\vec{j}+f_z(r)\vec{k}$

$$f_x(r)=\frac{\partial f(r)}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial r}=f'(r)\frac{\partial r}{\partial x}\ ,\qquad f_y(r)=f'(r)\frac{\partial r}{\partial y}$$

$$f_z(r)=f'(r)\frac{\partial r}{\partial z}\quad,\quad \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{x}{r},\qquad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\qquad \frac{\partial r}{\partial z}=\frac{z}{r}$$

$$\vec{\nabla}f(r)=f'^{(r)}.\frac{x}{r}\vec{i}+f'^{(r)}.\frac{y}{r}\vec{j}+f'^{(r)}.\frac{z}{r}\vec{k}=\frac{f'(r)}{r}(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$$

$$\vec{\nabla}f(r)=\frac{f'(r)}{r}\times\vec{r}\rightarrow\vec{\nabla}f(r)=f'(r).\frac{\vec{r}}{r}$$

مثال۹: کمترین حجم محدود به صفحات $x = 0 \ , y = 0 \ , z = 0$ و صفحه‌ی مماس بر بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}$ در یک نقطه از یک هشتم اول $x > 0 \ , y > 0 \quad , z > 0$ را تعیین کنید.

حل: با فرض اینکه نقطه‌ی $M(x_0, y_0, z_0)$ بر روی سطح واقع است با تعیین بردار گرادیان، معادله‌ی صفحه مماس به راحتی مشخص می‌گردد.

$$f: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \ \rightarrow \ \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}$$

$$\vec{\nabla} f = \frac{2x}{a^2}\vec{i} + \frac{2y}{b^2}\vec{j} + \frac{2z}{c^2}\vec{k} \qquad \rightarrow \vec{\nabla} f_{|x_0,y_0,z_0} = \frac{2x_0}{a^2}\vec{i} + \frac{2y_0}{b^2}\vec{j} + \frac{2z_0}{c^2}\vec{k}$$

بنابراین معادله‌ی صفحه مماس به شکل زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{2z_0}{c^2}(z - z_0) = 0$$

و مولفه‌های بردار گرادیان همان مولفه‌های بردار قائم بر صفحه هستند و $M(x, y, z)$ یک نقطه‌ی دلخواه می‌باشد که بردار گرادیان بر $\overrightarrow{M_1 M}$ عمود است، پس از ساده سازی:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} + \frac{zz_0}{c^2} = 1$$

این صفحه محورهای مختصات را در نقاط $h_1(x, 0,0)$ و $h_2(0, y, 0)$ و $h_3(0,0, z)$ قطع می‌کند که هر کدام از نقاط H_1وH_2وH_3 چون بر روی صفحه مماس قرار دارند، بنابراین در معادله‌ی صفحه مماس صدق می‌کنند.

$$H_1: \frac{x_0}{a^2}x + 0 + 0 = 1 \ \rightarrow xx_0 = a^2 \ \rightarrow x = \frac{a^2}{x_0}$$

$$H_2: 0 + \frac{y_0 y}{b^2} + 0 = 1 \ \rightarrow \frac{y_0 y}{b^2} = 1 \ \rightarrow y = \frac{b^2}{y_0}$$

$$H_3: 0 + 0 + \frac{z_0 z}{c^2} = 1 \ \rightarrow zz_0 = c^2 \ \rightarrow z = \frac{c^2}{z_0}$$

و بردارهای $\overrightarrow{OH}_1$, $\overrightarrow{OH}_2$, $\overrightarrow{OH}_3$ هرمی با قاعده مثلث قائم الزاویه در صفحات مختصات تشکیل می‌دهند.

$$V = \frac{1}{3}sh = \frac{1}{3}\left(\text{مساحت قاعده}\right)\text{ارتفاع} \rightarrow V = \frac{a^2 b^2 c^2}{6x_0 y_0 z_0}$$

در این مرحله حجم حاصل بایستی تحت قید بیضی‌گون حداقل گردد.

$$F(x, y, z) = \frac{(abc)^2}{6xyz} \quad , G(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \text{ قید}$$

از روش ضرایب لاگرانژ در این مرحله استفاده می‌شود.

$$\vec{\nabla} f = \lambda \vec{\nabla} g \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k} = \lambda\left(\frac{\partial g}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\vec{k}\right)$$

$$\rightarrow \frac{(abc)^2}{6}\left[\frac{-yz}{(xyz)^2}\vec{i} - \frac{xz}{(xyz)^2}\vec{j} - \frac{xy}{(xyz)^2}\vec{k}\right] = \lambda\left[\frac{2x}{a^2}\vec{i} + \frac{2y}{b^2}\vec{j} + \frac{2z}{c^2}\vec{k}\right]$$

از متحد قرار دادن مولفه‌ها در سه جهت $\vec{k}$ و $\vec{j}$ و $\vec{i}$:

$$\begin{cases} \dfrac{(abc)^2(-yz)}{6(xyz)^2} = \dfrac{2\lambda x}{a^2} & 1 \\ \dfrac{(abc)^2(-xz)}{6(xyz)^2} = \dfrac{2\lambda y}{b^2} & 2 \\ \dfrac{(abc)^2(-xy)}{6(xyz)^2} = \dfrac{2\lambda z}{c^2} & 3 \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{(1)}{(2)} \Rightarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{xb^2}{ya^2} \Rightarrow x = \dfrac{a}{b}y & 4 \\ \dfrac{(2)}{(3)} \Rightarrow \dfrac{z}{y} = \dfrac{yc^2}{zb^2} \Rightarrow z = \dfrac{c}{b}y & 5 \end{cases}$$

حال باقرار دادن x , z از روابط ۴و ۵ در رابطه‌ی بیضی گون:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \rightarrow \frac{(\frac{a}{b}y)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{(\frac{c}{b}y)^2}{c^2} = 1$$

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \rightarrow \frac{3y^2}{b^2} = 1 \rightarrow y = \frac{b}{\sqrt{3}}, x = \frac{a}{\sqrt{3}} \quad , \quad z = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

بنابراین با تعیین مقادری x , y , z برای حجم حداقل می‌توان نوشت:

$$V_{min} = (x,y,z)^{-1}\frac{(abc)^2}{6} = \left(\frac{abc}{3\sqrt{3}}\right)^{-1}\left(\frac{abc}{6}\right) \rightarrow V_{min} = (abc)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

مسائل برای حل

۱- دما درهرنقطه‌ی (x,y,z) از یک جسم درفضای سه بعدی برابر T درجه و $T = \frac{60}{x^2+y^2+z^2+3}$ فاصله بر حسب اینچ اندازه‌گیری می‌شود. الف) آهنگ تغییر دما در نقطه‌ی (۲و۲-و۳) در جهت بردار $-2\vec{i} + 3\vec{j} - 6\vec{k}$ را بیابید. ب) جهت و بزرگی بیشترین آهنگ تغییر T را در جهت (۲و۲-و۳) بیابید.

۲- چگالی در هر نقطه‌ی (x,y) از یک ورقه‌ی مستطیلی شکل واقع در صفحه‌ی xy برابر است با p اسلاگ بر فوت مربع و $p=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+3}}$ ، الف) آهنگ تغییرچگالی در نقطه‌ی (۲و۳) را در جهت بردار واحد $\operatorname{Cos}\left(\frac{2}{3}\pi\right)\vec{\imath}+\operatorname{Sin}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\vec{\jmath}$ بیابید.ب) جهت و بزرگی بیشترین آهنگ تغییر p را در جهت (۲و۳) را پیدا کنید.

۳- پتانسیل الکتریکی در هر نقطه‌ی (x,y) از صفحه‌ی xy برابر است با V ولت، و $V=e^{-2x}Cos2y$ فاصله بر حسب فوت اندازه‌گیری می‌شود. الف) آهنگ تغییر پتانسیل در نقطه‌ی $(0,\frac{\pi}{4})$ در جهت بردار واحد $Cos\frac{\pi}{6}\vec{\imath}+\operatorname{Sin}\frac{\pi}{6}\vec{\jmath}$ را بیابید. ب) جهت و بزرگی بیشترین آهنگ تغییر V را در جهت $(0,\frac{\pi}{4})$ بیابید.

۴- دو رویه را در نقطه‌ای چون p_0 واقع بر محل تقاطع این رویه‌ها عمود بر هم گویند، اگر بردارهای قائم بر رویه‌ها در p_0 متعامد باشند، نشان دهید رویه‌ی $x^2-2yz+y^3=4$ بر هر عضو خانواده رویه‌های $x^2+(4c-2)y^2-cz^2+1=0$ در نقطه‌ی (۲و۱- و۱) عمود است.

۵-معادله‌ی صفحه مماس و خط قائم بر رویه $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}+z^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ را در نقطه‌ی $p(x_0,y_0,z_0)$ بیابید.

۶- معادلات متقارن خط مماس برمنحنی‌حاصل از تقاطع رویه‌های $x^2+y^2=a^2$ و $y^2+z^2=a^2$ را در نقطه‌ی (x_0,y_0) متعلق به هر رویه بیابید.

۷-تعیین کنید که بردار داده شده یک گرادیان است یا نه، اگر گرادیان است تابعی بیابید که دارای گرادیان مفروض باشد.

الف) $e^xCosx\vec{\imath}+Siny\vec{\jmath}+(e^zSinx-Cosy)\vec{k}$ ب) $(ye^x+x)\vec{\imath}+(xe^x-y)\vec{\jmath}$

ج) $2xSec2y\vec{\imath}+2x^2Sec2ytan2y\vec{\jmath}$

د) $e^x(e^z-Ln)\vec{\imath}+\left(e^yLnz-\frac{e^x}{y}\right)\vec{\jmath}+(e^{x+z}+\frac{e^y}{z})\vec{k}$

قوانین نیوتن حرکت، کار، انرژی و اندازه حرکت

سه قانون حرکت توسط نیوتن ارائه گردید که پایه و اساس مکانیک می‌باشد. الف- هر ذره پافشاری و مقاومت می‌کند که در حالت سکون یا حرکت یکنواخت بر روی یک خط راست (برای نمونه با سرعت ثابت) باقی بماند، مگر اینکه توسط نیرویی تحت تاثیر قرار گیرد. ب-اگر $\vec{F}$ نیروی خارجی اعمالی بر ذره‌ی به جرم m باشد و متعاقب آن حرکت با سرعت $\vec{v}$ ایجاد گردد، آنگاه:

$$\vec{F}=\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (۹۷-۳)$$

که در آن $\vec{p} = m\vec{v}$ منتوم (اندازه حرکت) نام دارد. اگر m مستقل از زمان t باشد، آنگاه می‌توان نوشت: $\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a}$ که در آن $\vec{a}$ شتاب ذره است. ج- اگر ذره‌ی ۱ بر روی ذره‌ی ۲ با نیروی $\vec{F}_{12}$ در راستای خط اتصال دو ذره اثر نماید آنگاه ذره‌ی ۲ بر روی ذره‌ی ۱ با نیروی $\vec{F}_{21}$ اثر می‌کند، بنابراین $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$ یعنی هر عملی را عکس العملی است مساوی و در خلاف جهت آن.

نیرو، جرم و زمان

اینرسی توانایی یک جسم برای مقاومت در مقابل تغییر حالت می‌باشد و **جرم** یک اندازه‌ی کمی (کمیتی) از اینرسی یک جسم است. **نیرو** عمل یک جسم بر روی جسم دیگر است. این عمل می‌تواند به علت تماس بین دو جسم حاصل شود که در آن صورت اثر فشاری- کششی خوانده می‌شود و یا می‌تواند بین اجسام جدا از هم باشد که در آن صورت اثر میدان نیرو نام دارد.

زمان : اساساً یک اندازه‌گیری از توالی وقوع رخدادها در فضا می‌باشد. زمان به عنوان یک کمیت مطلق در نظر گرفته می‌شود. استاندارد زمان به وسیله‌ی فرکانس ارتعاش یک اتم سزیم تعریف می‌گردد.

واحدهای استاندارد جرم گرم g در سیستم *CGS (Centimeter-Gram-Second)*، کیلوگرم kg در سیستم SI می‌باشد. واحدهای استاندارد نیرو در این سیستم‌ها دین *(dyn)* و نیوتن *(N)* می‌باشد. یک **دین** نیرویی است که به جرم یک گرم شتاب $1cm/S^2$ می‌دهد و یک **نیوتن** نیرویی است که به جرم $1kg$ شتاب $1m/s^2$ می‌دهد. زمان معمولاً بر حسب ثانیه در سیستم SI می‌باشد.

چارچوب اینرسی (لختی) مرجع، حرکت مطلق

بایستی تاکید نمود که قوانین نیوتن پذیرفته شده‌اند، تحت این فرض‌که تمام اندازه‌گیری‌ها یا مشاهدات نسبت به سیستم مختصات یا چارچوب مرجع می‌باشد که در فضا ثابت شده است، برای نمونه مطلقاً در حالت سکون قرار دارد. این چنین فرضی است که فضا یا حرکت مطلق است.کاملاً مشهود است که یک ذره می‌تواند در حالت سکون بماند یا به حرکت یکنواخت بر روی یک خط راست نسبت به یک چارچوب مرجع ادامه دهد و بر روی یک منحنی مسافرت نماید و شتاب نسبت به چارچوب مرجع دیگری داشته باشد.

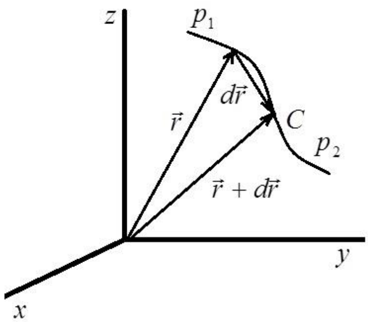
کار

اگر نیروی $\vec{F}$ بر روی یک ذره اعمال شود و باعث جابجایی $d\vec{r}$ گردد، آنگاه کار انجام شده توسط این نیرو بر روی ذره $dw = \vec{F}.d\vec{r}$ می‌باشد و تنها مولفه‌ی $\vec{F}$ در جهت $d\vec{r}$ در تولید حرکت موثر است. کل

کار انجام شده توسط میدان نیرویی (میدان برداری) $\vec{F}$ درحرکت ذره از نقطه‌ی p_1 تا نقطه‌ی p_2 در راستای منحنی C مطابق شکل ۳-۲۲ با استفاده از انتگرال خطی زیر تعیین می گردد.

$$W = \oint_c \vec{F}.d\vec{r} = \int_{p_1}^{p_2} \vec{F}.d\vec{r} = \int_{\overrightarrow{r_1}}^{\overrightarrow{r_2}} \vec{F}.d\vec{r} \qquad (۹۸-۳)$$

که در آن $\overrightarrow{r_1}$ و $\overrightarrow{r_2}$ بردارهای موقعیت نقاط p_1 و p_2 هستند.



شکل ۳-۲۳- مسیر انجام کار با استفاده از انتگرال خطی

توان

نرخ زمان کار انجام شده بر روی ذره اغلب توان لحظه‌ای یا عمدتاً توان گفته می‌شود، که بر روی ذره اعمال می‌گردد. با استفاده از نشان W و p برای کار و توان می‌توان نوشت:

$$p = \frac{dW}{dt} \qquad (۹۹-۳)$$

اگر $\vec{F}$ نیروی اعمال شده به ذره $\vec{v}$ و سرعت آن باشد، آنگاه:

$$p = \vec{F}.\vec{v} \qquad (۱۰۰-۳)$$

انرژی جنبشی

فرض کنید که ذره دارای جرم ثابت و در زمان‌های t_1 , t_2 به ترتیب در موقعیت‌های p_1 , p_2 قرار داشته باشد، حرکت با سرعت‌های $\overrightarrow{v_1} = \frac{d\vec{r}_1}{dt}$, $\overrightarrow{v_2} = \frac{d\vec{r}_2}{dt}$ انجام شود، آنگاه می‌توان نشان داد:

$$W = \oint_c \vec{F}.d\vec{r} = \frac{1}{2}m(v_2^2 - v_1^2) \qquad (۱۰۱-۳)$$

$$k = \frac{1}{2}mv^2 \text{ یا } T = \frac{1}{2}mv^2 \qquad (۱۰۲-۳)$$

بنابراین اختلاف انرژی جنبشی ذره بین نقاط p_1 , p_2 مساوی کل کار انجام شده از p_1 , p_2 بر روی منحنی C می‌باشد.

$$W = T_2 - T_1 \quad \text{و} \quad T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2 \quad , T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2 \tag{۱۰۳-۳}$$

میدان‌های نیروی پایستار

فرض کنید تابع اسکالری مانند V وجود داشته باشد، به طوری که $\vec{F} = \vec{\nabla}\mathrm{V}$ آنگاه می‌توان نوشت:

$$W = \int_{p_1}^{p_2} \vec{F}.d\vec{r} = V(p_1) - V(p_2) \tag{۱۰۴-۳}$$

در چنین حالتی کار انجام شده مستقل از مسیر C متصل کننده نقاط p_1 , p_2 بر روی C می‌باشد. اگر کار انجام شده توسط یک میدان نیرویی در حرکت یک ذره از نقطه‌ای به نقطه‌ی دیگر مستقل از مسیر اتصال دو نقطه باشد، آنگاه گفته می‌شود میدان نیرو پایستار است.

قضیه: میدان نیروی $\vec{F}$ پایستار است، اگر و تنها اگر میدان اسکالر دیفرانسیل‌پذیر پیوسته‌ای مانند V وجود داشته باشد به طوری که $\vec{F} = -\vec{\nabla}\mathrm{V}$ یا به طور معادل اگر و تنها اگر $\vec{\nabla} \times \vec{F} = curl\vec{F} = 0$

قضیه: میدان نیرویی دیفرانسیل‌پذیر پیوسته $\vec{F}$ پایستار است اگر و تنها اگر برای هر میدان بسته‌ی غیرمتقاطع با منحنی C (منحنی بسته ساده) رابطه‌ی $\oint_C \vec{F}.d\vec{r} = 0$ برقرار باشد، یعنی کار انجام شده در حرکت یک ذره حول هر مسیر بسته مساوی صفر است.

انرژی پتانسیل یا پتانسیل

اسکالر V به طوری که $\vec{F} = -\vec{\nabla}\mathrm{V}$ انرژی پتانسیل نام دارد یا اسکالر پتانسیل یا عمدتاً پتانسیل گفته می‌شود که در میدان نیروی پایستار وجود دارد و بنابراین کار انجام شده کل از p_1 , p_2 در راستای C برابر است با اختلاف انرژی پتانسیل بین نقاط p_1 , p_2، در نتیجه: $W = V_1 - V_2$

که در آن $V_2 = V(p_2) \quad , V_1 = V(p_1)$ بایستی اشاره شود که پتانسیل داخل یک ثابت افزایشی دلخواه تعریف می‌گردد. پتانسیل را می‌توان به فرم زیر در نظر گرفت:

$$V = -\int_{r_0}^{r} \vec{F}.d\vec{r} \tag{۱۰۵-۳}$$

که در آن فرض می‌شود در $r = r_0$، $V = 0$

قانون پایستگی

برای یک میدان نیروی پایستار می‌توان نوشت:

$$T_1 - \mathrm{T}_2 = \mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2 \quad \text{یا} \quad T_1 + \mathrm{V}_1 = \mathrm{T}_2 + \mathrm{V}_2 \tag{۱۰۶-۳}$$

بنابراین پس از جایگذاری برای انرژی جنبشی می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + \mathrm{V}_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + \mathrm{V}_2 \tag{۱۰۷-۳}$$

کمیت $E=T+V$ که مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل بوده و انرژی کل نام دارد.با توجه به رابطه‌ی ۱۰۷-۳ نتیجه می‌شودکه انرژی کل در نقاط p_1 , p_2 با هم برابر است، بنابراین مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل برابر مقدار ثابتی می‌باشد که پایستگی انرژی نام دارد.

ضربه

فرض کنید که ذره در زمان‌های $\mathrm{t}_1 - \mathrm{t}_2$ درموقعیت‌های p_1 , p_2 قرار دارد و دارای سرعت‌های v_2 , v_1 است. انتگرال زمانی نیروی $\vec{F}$ به فرم $\int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \vec{F}.d\vec{r}$ ضربه‌ی نیروی $\vec{F}$ نام دارد. ضربه مساوی است با تغییرات اندازه حرکت بین دو نقطه، بنابراین:

$$\int_{\mathrm{t}_1}^{\mathrm{t}_2} \vec{F}.d\vec{r} = m\vec{v}_2 = \vec{p}_2 - \vec{p}_1 \tag{۱۰۸-۳}$$

این نظریه حتی هنگامی که جرم متغیر و نیرو غیر پایستار باشد، برقرار است.

گشتاور و اندازه حرکت زاویه‌ای

اگر ذره‌ای با بردار موقعیت $\vec{r}$ در یک میدان نیرویی حرکت کند، آنگاه $\vec{\Lambda} = \vec{r} \times \vec{F}$ که گشتار یا گشتاور نیروی $\vec{F}$ حول o (مرکز دوران) می‌باشد. اندازه‌ی Λ یک اندازه‌گیری (اثر چرخشی) ایجاد شده بر روی ذره توسط نیرو می‌باشد. همچنین می توان نشان داد:

$$\vec{r} \times \vec{F} = \frac{d}{dt}m(\vec{r} \times \vec{v}) \tag{۱۰۹-۳}$$

کمیت $\Omega = m(\vec{r} \times \vec{v}) = \vec{r} \times \vec{p}$ اندازه حرکت زاویه‌ای یا گشتاور اندازه حرکت حول مرکز دوران می‌باشد و گشتاور اعمالی بر روی کره مساوی نرخ زمانی تغییر در اندازه حرکت زاویه ای می‌باشد.

$$\Lambda = \frac{d\Omega}{\mathrm{dt}} \tag{۱۱۰-۳}$$

این نظریه حتی وقتی که جرم m متغیر و نیرو غیرکنسوواتیو باشد، معتبر است.

قانون بقای اندازه حرکت

اگر $\vec{F} = 0$ در قانون دوم نیوتن اعمال شود، آنگاه

$$\frac{d}{\mathrm{dt}}(m\vec{v}) = 0 \;\rightarrow mv = \text{ثابت} \tag{۱۱۱-۳}$$

و به این معنی است که اگر هیچ نیرویی وارد نشود و یا نیروی خارجی اعمالی بر روی ذره صفر می‌باشد و اندازه حرکت آن ثابت می‌ماند برای حالتی که جرم ثابت است، معادل همان قانون اول نیوتن می‌باشد.

قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای

اگر $\Lambda=0$ باشد آنگاه ثابت $= \frac{d}{\mathrm{dt}}\left(m(\vec{r}\times\vec{v})\right) = 0 \ \to m((\vec{r}\times\vec{v})$ بنابراین اگر گشتاور خالص خارجی اعمالی بر روی ذره صفر باشد، اندازه حرکت زاویه‌ای ثابت می‌ماند، این نظریه اغلب قانون بقای اندازه حرکت زاویه‌ای نام دارد.

نیروی غیرپایستار

اگر هیچ تابع اسکالری مانند V وجود نداشته باشد که $\vec{F} = -\vec{\nabla}\mathrm{V}$ (یا به طور معادل $\vec{\nabla}\times\vec{F} \neq 0$ آنگاه F میدان نیروی غیرپایستار نام دارد.

استاتیک یا تعادل یک ذره

یک حالت مخصوصاً هنگام حرکت یک ذره زمانی اتفاق می‌افتد که ذره یا در حالت سکون یا تعادل به سیستم مختصات داخلی یا چارچوب مرجع قرار دارد. شرط لازم و کافی برای این حالت این است که با توجه به قانون دوم نیوتن برآیند نیرو مساوی صفر باشد، برای نمونه نیروی خارجی خالص اعمال شده بر روی ذره مساوی صفر است.

اگر میدان نیرو با پتانسیل V بایستار باشد، آنگاه شرط لازم و کافی برای اینکه ذره در یک نقطه در حالت تعادل باشد، آن است که رابطه‌ی زیر برقرار باشد.

$$\vec{\nabla}v = 0 \quad \text{یا} \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \qquad (۱۱۲\text{-}۳)$$

شرط لازم و کافی برای تعادل پایدار یک ذره در یک نقطه، حداقل بودن پتانسیل V در آن نقطه است.

مسائل حل شده

مثال ۱: ذره‌ای به جرم m درصفحه‌ی xy حرکت می‌کند به طوری‌که بردار وضعیت آن به فرم $\vec{r} = aCos\omega t\vec{\imath} + bSin\omega t\vec{\jmath}$ می‌باشد که در آن $b,a\omega$, ثابتهای مثبت هستند و $a>b$ (شکل ۳-۲۴) الف) نشان دهید که ذره در یک مسیر بیضوی حرکت می‌کند. ب) نشان دهید که جهت نیروی ذره همیشه به طرف مبدا است. ج) انرژی جنبشی ذره را در نقاط B,A یافته و کار انجام شده را محاسبه نمائید. د) نشان دهید که کل کار انجام شده توسط این میدان در حرکت ذره یک‌بار حول بیضی برابر صفر است.

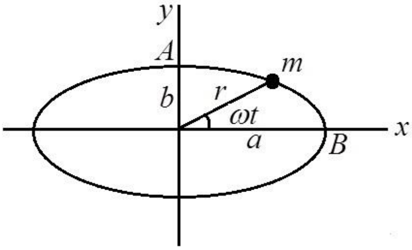
حل: بردار وضعیت به فرم زیر نوشته می‌شود.

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} = aCos\omega t\vec{i} + bSin\omega t\vec{j}$

که در آن $x = aCos\omega t$ و $y = bSin\omega t$ که معادلات پارامتری بیضی با نیم قطرهای اصلی و فرعی b , a هستند. به راحتی می‌توان معادله بیضی را به شکل زیر نتیجه گرفت:

$(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 = Cos^2\omega t + Sin^2\omega t = 1 \quad \rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

ب) با این فرض که ذره دارای جرم ثابت m می‌باشد، نیروی اعمالی بر ذره را با استفاده از قانون دوم نیوتن می‌توان به شکل زیر نوشت:



شکل۳-۲۴- حرکت ذره بر روی مسیر بیضوی

$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\frac{d^2\vec{v}}{d^2t} = m\frac{d^2}{dt^2}[(aCos\omega t)\vec{i} + (bSin\omega t)\vec{j}]$

$\vec{F} = m[-\omega^2 aCos\omega t\vec{i} + \omega^2 bSin\omega t\vec{j}] = -m\omega^2[aCos\omega t\vec{i} + bSin\omega t\vec{j}]$

$\vec{F} = -m\omega^2\vec{r}$

که علامت منفی نشان دهنده‌ی این است که جهت بردار نیرو همیشه به سمت مبدا می‌باشد.

ج) سرعت $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} - \omega aCos\omega t\vec{i} + \omega bSin\omega t\vec{j}$

$v^2 = |\vec{v}|^2 = \omega^2[a^2Sin^2\omega t + b^2Cos^2\omega t]$

انرژی جنبشی $K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(\omega^2)[a^2Sin^2\omega t + b^2Cos^2\omega t]$

در نقطه‌ی A، $\omega t = 0 \quad \leftarrow$ $cos\omega t = 1$, $sin\omega t = 0$ بنابراین

$K_A = \frac{1}{2}m\omega^2 b^2$

در نقطه‌ی B، $\omega t = \frac{\pi}{4} \quad \leftarrow$ $Sin\omega t = 1$, $Cos\omega t = 0$ پس $K_B = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2$

حال به دو روش کار انجام شده محاسبه می‌شود.

روش اول کار انجام شده $= \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B -m\omega^2\vec{r}.d\vec{r}$

$$-m\omega^2\int_A^B \vec{r}.d\vec{r} = -\frac{1}{2}m\omega^2\int_A^B d(\vec{r}.d\vec{r}) = -\frac{1}{2}m\omega^2\int_A^B d\vec{r}^2 = -\frac{1}{2}m\omega^2 r^2$$

$$r_{|A} = a, r_{|B} = b\ ,\ W = +\frac{1}{2}m\omega^2 a^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 b^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2(a^2 - b)$$

روش دوم: می‌توان فرض نمود در A و B به ترتیب $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2w}$ می‌باشد، آنگاه:

$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}[-m\omega^2(aCos\omega t\vec{\imath} + bSin\omega t\vec{\jmath})].$$

$$[-\omega aCos\omega t\vec{\imath} + \omega bSin\omega t\vec{\jmath}]dt =$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2\omega}}[-m\omega^3](a^2 - b^2)Sin\omega t.Cos\omega tdt = \frac{1}{2}m\omega^2 a^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 b^2$$

$$K_A = K_B = \Delta K$$

یعنی کار انجام شده برابر است با تفاضل انرژی جنبشی سیستم بین دو نقطه‌ی A , B.

د) همچنین با فرض روش دوم می‌توان نوشت:

کار انجام شده $= \int_0^{\frac{\pi}{2\omega}} m\omega^3(\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2)Sin\omega t.Cos\omega tdt =$

$$\frac{1}{2}m\omega^2(a^2 - b^2)Sin^2\omega t = 0$$

مثال۲: نشان دهید که میدان نیرویی مثال ۱ پایستار است. همچنین انرژی پتانسیل را در نقاط B,A بیابید و کار انجام شده توسط نیروی اعمال شده به ذره را از A تا B تعیین کنید. انرژی کل ذره را پیدا کرده و نشان دهید که این انرژی دارای مقدار ثابتی است.

$$\vec{F} = -m\omega^2\vec{r} = -m\omega^2(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})$$

حل: برای پایستار بودن میدان نیروی $\vec{F}$ بایستی نشان داد که $\vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F} = curl\vec{F}\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -m\omega^2 x & -m\omega^2 y & 0 \end{vmatrix} = (\frac{\partial}{\partial y}(0) - \frac{\partial}{\partial z}(-m\omega^2 y)\vec{\imath} +$$

$$\vec{\jmath}(\frac{\partial}{\partial z}(-m\omega^2 x) - \frac{\partial}{\partial x}(0)) + \vec{k}(\frac{\partial}{\partial x}(-m\omega^2 y) - \frac{\partial}{\partial y}((-m\omega^2 x))$$

$0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} = 0 \rightarrow \vec{\nabla}\times\vec{F} = 0$ میدان پایستار است

با توجه به پایستار بودن میدان نیرو نتیجه می‌شود که پتانسیل $\vec{V}$ وجود دارد به طوری‌که:

$$\vec{F} = -m\omega^2 x\vec{\imath} - m\omega^2 y\vec{\jmath} = -\vec{\nabla}\mathrm{V} = \frac{\partial V}{\partial x}\vec{\imath} - \frac{\partial V}{\partial y}\vec{\jmath} - \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = m\omega^2 x \qquad , \frac{\partial V}{\partial y} = m\omega^2 y \quad , \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

$$V = \int m\omega^2 x dx + g(y) = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + g(y)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = g'(y) = \frac{1}{2} m\omega^2 y \quad \to g(y) = \frac{1}{2} m\omega^2 y^2$$

تابع پتانسیل مورد نیاز $V = \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 y^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 (x^2 + y^2) = \frac{1}{2} m\omega^2 r^2$

در نقطه A : $r = a$ پس $V_A = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2$

در نقطه B : $r = b$ بنابراین $V_B = \frac{1}{2} m\omega^2 b^2$

کار انجام شده $W = V_A - V_B = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2 - \frac{1}{2} m\omega^2 b^2$

انرژی جنبشی در هر نقطه $K = \frac{1}{2} m\omega^2$

مثال۳: الف) اگر $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ باشد که در آن V تک مقداره و دارای مشتقات جزئی پیوسته می‌باشد. نشان دهید که کار انجام شده در حرکت ذره از نقطه‌ی $p_1(x_1, y_1, z_1)$ در این میدان به نقطه‌ی $p_2(x_2, y_2, z_2)$ می‌باشد. ب) اگر $\int_c \vec{F}.d\vec{r}$ مستقل از مسیر C اتصال بین دو نقطه‌ی p_1 , p_2 باشد، نشان دهید که تابع پیوسته‌ی V وجود دارد به طوری که $\vec{F} = -\vec{\nabla} V$

حل: الف) $W = -\int_{p_1}^{p_2} \vec{F}.d\vec{r} = -\int_{p_1}^{p_2} \vec{\nabla} V.d\vec{r} = -\int_{p_1}^{p_2} (\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}).$

با استفاده از ضرب داخلی دو بردار $\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right)$

$$W = -\int_{p_1}^{p_2} (\frac{\partial V}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{k}) = -\int_{p_1}^{p_2} dV = V(p_1) - V(p_2)$$

$$W = V(x_1, y_1, z_1) - V(x_2, y_2, z_2)$$

یعنی انتگرال تنها به مختصات نقاط p_2,p_1 بستگی دارد و به هر مسیر متصل کننده‌ی بین دو نقطه‌ی داده شده وابسته نیست. ب) فرض کنید $\vec{F} = \vec{F_1}\vec{i} + \vec{F_2}\vec{j} + \vec{F_3}\vec{k}$ با استفاده از این قضیه که $\int_c \vec{F}.d\vec{r}$ مستقل از مسیر C می‌باشد (هر مسیرمتصل کننده‌ی دو نقطه‌ی دلخواه) بنابراین پتانسیل به شکل زیر است.

$$V(x, y, z) = -\int_c [F_1(x, y, z)dx + F_2(x, y, z)dy + F_3(x, y, z)dz]$$

که در آن C مسیر اتصال نقاط p_1 , p می‌باشد. حال می‌توان انتگرال منحنی الخط را به C انتگرال مجزا تقسیم نمود:

$$V(x,y,z) = -\int_{x_1}^{x} F_1(x,y,z)dx - \int_{y_1}^{y} F_2(x,y,z)dy - \int_{z_1}^{z} F_3(x,y,z)dz$$

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -F_3(x,y,z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial y} = -F_2(x,y,z) - \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z)dz = -F_2(x,y,z) - \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_2}{\partial y}(x,y,z)dz$$

$$-F_2(x,y,z_1) - F_2(x,y,z)\Big|_{z_1}^{z} = -F_2(x,y,z_1) - F_2(x,y,z) + F_2(x,y,z_1) = F_2(x,y,z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -F_1(x,y,z) - \int_{y_1}^{y} \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z_1)dy - \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,z)dz = -F(x_1,y_1,z_1)$$

$$-\int_{y_1}^{y} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z_1)dy - \int_{z_1}^{z} \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z)dz = -F(x_1,y_1,z_1) - F(x_1,y_1,z_1)\Big|_{y_1}^{y}$$

$$-F_1(x,y,z)\Big|_{z_1}^{z} = -F_1(x,y_1,z_1) - F_1(x,y,z_1) + F(x,y_1,z_1) - F_1(x,y,z) + F(x,y,z_1) = -F_1(x,y,z)$$

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_1}\vec{\imath} + \overrightarrow{F_2}\vec{\jmath} + \overrightarrow{F_3}\vec{k} = -\frac{\partial v}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial y}{\partial x}\vec{\jmath} + \frac{\partial z}{\partial x}\vec{k} = \vec{\nabla}V$$

مثال ٤ : ذره‌ای به جرم m در راستای محور x تحت تاثیر میدان نیرویی پایستار با پتانسیل $V_{(x)}$ قرار دارد.

الف) اگر ذره در وضعیت‌های x_2,x_1 به ترتیب با زمان‌های t_2,t_1 قرار داشته باشد، نشان دهید اگر انرژی کل E باشد، آنگاه: $t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}}$ ب) همچنین اگر $V = \frac{1}{2}kx^2$ باشد و ذره در $x = a$ از حالت سکون شروع به حرکت نماید، نشان دهید که $x = aCos\sqrt{\frac{k}{m}}t$ و حرکت را توصیف نمائید.

حل: با استفاده از اصل پایستگی انرژی،

انرژی پتانسیل + انرژی جنبشی = انرژی کل

$$\frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2 + V(x) = E$$

$$\frac{1}{2}m(\frac{dx}{dt})^2 = E - V(x) \rightarrow (\frac{dx}{dt})^2 = \frac{2}{m}(E - V(x))$$

$$(\frac{dt}{dx})^2 = \frac{m}{2(E - V(x))} \rightarrow \frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{1}{\sqrt{E - V(x)}}$$

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}} \rightarrow \int_{t_1}^{t_2} dt = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}}$$

$$t_2 - t_1 = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_{x_1}^{x_2}\frac{dx}{\sqrt{E-V(x)}} \quad , \quad (\frac{dx}{dt})^2 = \frac{2}{m}(E-V(x))$$

$$x = a \rightarrow \frac{dx}{dt} = 0 \rightarrow \text{سرعت} = 0 \rightarrow \frac{2}{m}\left(E - \frac{1}{2}ka^2\right) = 0 \rightarrow E = \frac{1}{2}ka^2$$

$$(\frac{dx}{dt})^2 = \frac{2}{m}(\frac{1}{2}ka^2 - \frac{1}{2}kx^2) \rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{k}{m}(a^2 - x^2)$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}dt \rightarrow Sin^{-1}\frac{x}{a} = \sqrt{\frac{k}{m}}t + C_1$$

$$x = a \rightarrow t = 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} = C_1 \rightarrow Sin^{-1}\frac{x}{a} = \pm\sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{x}{a} = \mathrm{Sin}\,(\frac{\pi}{2} \pm \sqrt{\frac{k}{m}}t) \rightarrow x = aCos\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

ذره به سمت جلو و عقب در راستای x از $x = a$ تا $x = -a$ نوسان می‌کند. زمان برای یک ارتعاش کامل یا یک نوسان از $x = a$ تا برگشت مجدد به $x = a$ یک پریود نوسان نام دارد که از رابطه‌ی $p = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ تعیین می‌گردد.

مثال۵: نشان دهید در مختصات قطبی (r, θ) گرادیان، پتانسیل به فرم زیر تعیین می شود (شکل ۳-۱۹).

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r}\overrightarrow{r_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{\theta}_1$$

حل: فرض کنید $\alpha\vec{\nabla}V = G\vec{r}_1 + H\vec{\theta}_1$ که در آن H,G قابل تعیین هستند.

$$d\vec{r} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath}\ , x = rCos\theta\ , y = rSin\theta\ , \vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} = rCos\theta\vec{\imath} + rSin\theta\vec{\jmath}$$

به طوری که $\frac{\partial\vec{r}}{\partial r} = rCos\theta\vec{\imath} + Sin\theta\vec{\jmath}\ , \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right| = 1\ , \overrightarrow{r_1} = Cos\theta\vec{\imath} + Sin\theta$

همچنین

$$\theta_1 = \frac{\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}}{\left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial r}\right|} \quad , \quad \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = -rSin\theta\vec{i} + rCos\theta\vec{j}$$

می‌توان نوشت:

$$\vec{i} = Cos\theta\vec{r} - Sin\theta\overrightarrow{\theta_1} \quad , \quad \vec{j} = Sin\theta\vec{r} + Cos\theta\overrightarrow{\theta_1}$$

بنابراین در $\partial\vec{r}$ به جای $\vec{J}$ و $\vec{i}$ از دو رابطه اخیر استفاده می‌شود:

$$d\vec{r} = (Cos\theta dr - rSin\theta)\left(Cos\theta\overrightarrow{r_1} - Sin\theta\vec{\theta}_1\right) + (Sin\theta \mathrm{dr} + rCosd\theta) \times$$

$$Sin\theta\overrightarrow{r_1} + Cos\theta\vec{\theta}_1) \rightarrow \quad d\vec{r} = dr.\overrightarrow{r_1} + rd\theta.\vec{\theta}_1$$

$$\vec{\nabla}V.dr = dV = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta$$

$$\left(G\vec{r}_1 + H\vec{\theta}_1\right).(\mathrm{dr}.\vec{r}_1 + rd\theta\theta_1) = Gdr + Hrd\theta = \frac{\partial V}{\partial r}dr + \frac{\partial V}{\partial \theta}d\theta$$

به طوری که: $G = \frac{\partial V}{\partial r} \quad ,H = \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}$ پس

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{r}_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{\theta}_1$$

مسائل برای حل

۱- ذره‌ای در میدان نیرویی $\vec{F}$ به جرم m در راستای بیضی حرکت می‌کند:

$$\vec{r} = aCos\omega t\vec{i} + bSin\omega t\vec{j}$$

اگر $\vec{p}$ اندازه‌ی حرکت باشد، الف) $\vec{r}\times\vec{p} = mab\omega\vec{k}$ ب) $\vec{r}\times\vec{p} = \frac{1}{2}m\omega^2(b^2 - a^2)$

۲- نیروی اعمالی بر روی یک ذره به جرم m بر حسب زمان t به صورت زیر است:

$$\vec{F} = aCos\omega t + bSin\omega t\vec{j}$$

اگر ذره در حالت اولیه در مبدا باشد، آنگاه بردارهای موقعیت و سرعت در هر زمان به فرم زیر هستند:

$$\vec{r} = \frac{a}{m\omega^2}[1 - Coswt]\vec{i} + \frac{b}{m\omega^2}(\omega t - Sin\omega t]\vec{j}$$

$$\vec{r} = \frac{a}{m\omega}Sin\omega t\vec{i} + \frac{b}{m\omega}(1 - Cos\omega t]\vec{j}$$

۳- ذره‌ای به جرم m تحت اثر میدان نیرویی $\vec{F} = a(Sin\omega t\vec{i} + Cos\omega t\vec{j})$ قرار دارد، اگر ذره در حالت اولیه در حالت سکون در مبدا سکون قرار داشته باشد، نشان دهید که کار انجام شده بر روی ذره تا زمان t برابر است با: $\frac{a^2}{m\omega^2}(1 - Cos\omega t)$ و توان لحظه‌ای اعمال شده به ذره $\frac{a^2}{m\omega}sin\omega t$ است.

۴- الف) نشان دهید میدان نیرویی $\vec{F} = -kr^3\vec{r}$ پایستار است. ب) انرژی پتانسیل ذره در حالت حرکت را استخراج نمائید. ج) اگر ذره‌ی به جرم m با سرعت $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ در این میدان حرکت نماید، نشان دهید که اگر E انرژی کل ثابت باشد، آنگاه $\frac{1}{2}m(\frac{d\vec{r}}{dt})^2 + \frac{1}{5}kr^5 = E$ این موضوع کدام اصل مهم فیزیکی را نشان می‌دهد؟

۵- پتانسیل ذره‌ی قرار داده شده در میدان نیرویی $\vec{F} = -kr^n\vec{r}$ را بیابید که در آن k و n ثابت هستند. تمام حالت‌ها را بررسی کنید.

۶- ذره‌ای به جرم m در راستای محور x تحت اثر نیروی جاذبه‌ای به طرف مبدا با مقدار $\vec{F} = -(\frac{k}{x^2})\vec{\imath}$ حرکت می‌کند. اگر ذره از حالت سکون در $x=a$ شروع به حرکت نماید نشان دهید که در زمان $\frac{\pi}{2}a\sqrt{\frac{ma}{2k}}$ به مبدا می‌رسد. اگر $\vec{F} = -(\frac{k}{x^3})\vec{\imath}$ باشد مسئله را مجدداً بررسی کنید.

۷- ذره‌ای به جرم m در میدان نیرویی $\vec{F} = -kx\vec{r}$ حرکت می‌کند. الف) چه میزان کار برای حرکت ذره از $x=x_1$ تا $x=x_2$ مورد نیاز است؟ ب) اگر ذره‌ی یکسانی در $x=x_1$ با سرعت v_1 شروع به حرکت کند، در $x=x_2$ دارای چه سرعتی خواهد بود؟

جواب: الف) $\frac{1}{2}k(x_1^2 - x_2^2)$, ب) $v_1^2 + (\frac{k}{m})(x_1^2 - x_2^2)$

۸- الف) نشان دهید شرط کافی برای اینکه نقطه‌ی (a,b) نقطه‌ی حداقل تابع $V(x,y)$ باشد، این است که شرایط الف) $\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} = 0$ ب) $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} > 0$, $\Delta= \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right) - (\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y})^2 > 0$ برقرار باشد.

۹- نیروی ثابت $\vec{F}$ بر روی ذره‌ای به جرم m سرعت را از v_1 تا v_2 در زمان τ تغییر می‌دهد، نشان دهید: $\vec{F} = \frac{m}{\tau}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1)$ حال اگر کمیت $\vec{F}_{av} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt}{t_2 - t_1}$ نیروی متوسط اعمالی بر ذره از زمان t_1 تا زمان t_2 باشد اگر به جای $\vec{F}$ از $\vec{F}_{av}$ استفاده شود، حرکت حاصل را توصیف نمائید.

۱۰- نشان دهید که در مختصات استوانه‌ای می‌توان نوشت:

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial p}\vec{\mathrm{e}}_P + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \varphi}\vec{\mathrm{e}}_\varphi + \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{z}}\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{z}$$

که در آن $\vec{\mathrm{e}}_\mathrm{z}$ و $\vec{\mathrm{e}}_\varphi$و $\vec{\mathrm{e}}_P$ بردارهای یکه در جهت‌های z و φ و p هستند.

۱۱- نشان دهید که گرادیان پتانسیل در مختصات کروی به فرم زیر است:

$$\vec{\nabla}V = \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial p}\,\vec{\mathrm{e}}_r + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \phi}\,\vec{\mathrm{e}}_\theta + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{z}}\vec{\mathrm{e}}_\phi$$

که در آن $\vec{\mathrm{e}}_\phi$ و $\vec{\mathrm{e}}_\theta$ و $\vec{\mathrm{e}}_r$ بردارهای یکه در جهت‌های ϕ , θ , r هستند.

۱۲- مطابق با نظریه‌ی نسبیت اینشتین، جرم m ذره از رابطه‌ی زیر تعیین می‌گردد که در آن v سرعت و m_0 جرم حالت سکون بوده و C سرعت نور و $\beta = \frac{V}{C}$ می‌باشد.

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{C^2}}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

الف) نشان دهید که نرخ زمان کار انجام شده برابر $\mathrm{m_0 C^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}$ است.

ب) با توجه به قسمت قبل انرژی جنبشی را به فرم زیر استخراج کنید:

$$k=(m-m_0)C^2=m_0C^2\left\{(1-\beta^2)^{-\frac{1}{2}}-1\right\}$$

ج) اگر v خیلی کوچکتر از C باشد نشان دهید که انرژی جنبشی به صورت تقریبی برابر است با $\frac{1}{2}mv^2$

حرکت مطلق و نسبی

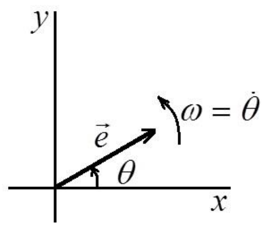
در مطالعه‌ی مکانیک اجسام لازم است بین این دو حرکت تفاوت قائل شد. نوع حرکت به انتخاب دستگاه مرجع بستگی دارد. به عنوان مثال یک دستگاه مختصات متصل به یک توپ تازه پرتاب شده، یک دستگاه مختصات شتاب‌دار است در حالی‌که دستگاه مختصات متصل کننده به زمین را می‌توان یک دستگاه بدون شتاب فرض نمود. بنابراین در حرکت بایستی به این نکته توجه داشت که حرکت نسبت به چه مختصات مرجعی بیان می‌شود، آیا این مختصات مرجع ثابت است و یا متحرک، آیا دستگاه مختصات مرجع دارای شتاب است یا ذره در مکانیک نیوتنی تنها دستگاه‌های بدون شتاب مورد استفاده قرار می‌گیرند.

یک دستگاه مختصات ثابت، گاهی مواقع یک دستگاه اینرسی و یا دستگاه نیوتنی و گاهاً دستگاه گالیله‌ای نام دارد، اگر منظومه‌ی شمسی نسبت به خورشید در حال حرکت باشد، یک دستگاه بدون شتاب واقعی بایستی به خورشید متصل باشد چنین دستگاهی، دستگاه هلیوسنتریک نام دارد. دستگاه متصل به زمین ژئو سنتریک نام دارد. برای اکثر کاربردهای مهندسی می‌تواند به عنوان یک دستگاه اینرسی لحاظ گردد. اگر حرکت یک نقطه‌ی مادی نسبت به یک دستگاه مختصات ثابت مطالعه شود، حرکت آن، حرکت مطلق و اگر حرکت نسبت به دستگاه مختصات متحرک بررسی گردد، حرکت آن، حرکت نسبی نام دارد.

مشتقات بردارهای متحرک

بردار یکه‌ی دوار

مطابق شکل ۳-۲۵ فرض کنید بردار یکه‌ی $\vec{e}$ با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کند، با نوشتن بردار یکه‌ی $\vec{e}$ بر حسب بردارهای یکه‌ی $\vec{i}$, $\vec{j}$ می‌توان نوشت: $|\vec{e}|=1$



شکل ۳-۲۵- بردار یکه و دوران آن

$\vec{i}$, $\vec{j}$ بردارهای یکه‌ی ثابت هستند. بنابراین مشتق آنها نسبت به زمان مساوی صفر است، یعنی:

$$\frac{d\vec{i}}{dt} = \frac{d\vec{j}}{dt} = 0$$

حال می‌توان نوشت:

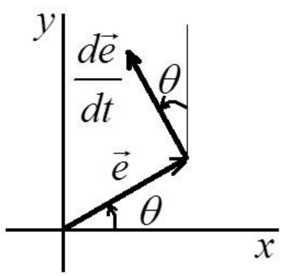
$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{d}{dt}\left[Cos\theta\,\vec{i} \ + Sin\theta\,\vec{j}\,\right] = \frac{d}{dt}\left[Cos\theta\,\vec{i}\,\right] + \frac{d}{dt}[Sin\theta\,\vec{j}\,]$$

$$\vec{i}\frac{d}{dt}Cos\theta + Cos\theta\frac{d\vec{i}}{dt} + \vec{j}\frac{dSin\theta}{dt} + Sin\theta\frac{d\vec{j}}{dt} = \vec{i}.\left(-\dot{\theta}\right)Sin\theta + \vec{j}.\dot{\theta}Cos\theta$$

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \dot{\theta}(-Sin\theta\vec{i} + Cos\theta\vec{j})\ , \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

$$\left|\frac{d\vec{e}}{dt}\right| = \dot{\theta}\sqrt{Sin^2\theta + Cos^2\theta} = \dot{\theta} = \omega$$ (همان سرعت دوران بردار یکه $\vec{e}$)

بردار $\frac{de}{dt}$ بر بردار یکه‌ی $\vec{e}$ عمود است (مطابق شکل۳-۲۶)

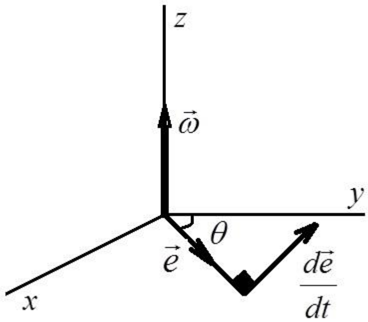


شکل ۳-۲۶- مشتق بردار یکه که بر بردار یکه عمود است.

همچنین می‌توان بردار سرعت زاویه‌ای را به فرم $\overrightarrow{\omega} = \dot{\theta}\vec{k}$ نوشت. $\vec{k}$ بردار یکه در جهت عمود بر صفحه‌ی xy است، پس بردارهای $\vec{e}$, $\overrightarrow{\omega}, \frac{d\vec{e}}{dt}$ دو به دو برهم عمود هستند، با توجه به مساوی بودن مقادیر $\overrightarrow{\omega}, \frac{d\vec{e}}{dt}$ و واحد بودن بردار $\vec{e}$ رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود (شکل ۳-۲۷):

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \overrightarrow{\omega} \times \vec{e} \qquad (۱۱۳-۳)$$

بنابراین مشتق یک بردار یکه نسبت به زمان برابر حاصل‌ضرب برداری (خارجی) بردار سرعت زاویه‌ای آن بردار یکه در خود بردار یکه می‌باشد. مشتق و یک بردار یکه نشان دهنده‌ی سرعت ترک آن می باشد.



شکل ۳-۲۷- وضعیت بردارهای سرعت زاویه‌ای، مشتق بردارهای یکه و بردار یکه در مختصات دکارتی

بردار در دستگاه مختصات مرجع متحرک

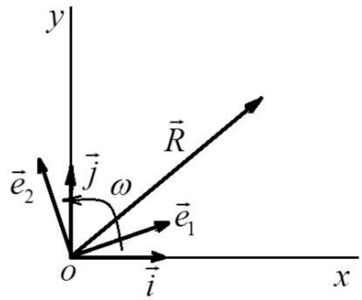
مطابق شکل ۳-۲۸ بردار وضعیت (موقعیت) R را به فرم زیر در نظر بگیرید:

$$\vec{R} = R_x\vec{\imath} + R_x\vec{\jmath}$$

که در آن R_x و R_x مولفه‌های اسکالر بردار R بر روی محورهای y,x و $j\,,i$ بردارهای یکه هستند که ثابت فرض می‌شوند. $\vec{e}_2$, $\vec{e}_1$ بردارهای یکه هستند که با سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کنند. با مشتق گیری از بردار $\vec{R}$ نسبت به t و اینکه $\frac{d\vec{\imath}}{dt} = \frac{d\vec{\jmath}}{dt} = 0$ می‌توان نوشت:

$$\vec{R}' = \frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{dR_x}{dt}\vec{i} + \frac{dR_y}{dt}\vec{j} = R_x'\vec{i} + R_y'\vec{j} \qquad (۱۱۴-۳)$$

همچنین بردار $\vec{R}$ بر حسب بردارهای یکه $\vec{e}_2$, $\vec{e}_1$ به فرم زیرنوشته می‌شود، که در آن R_2,R_1 به ترتیب مولفه‌های اسکالر بردار $\vec{R}$ روی محورهای $\vec{e}_2$, $\vec{e}_1$ هستند.



شکل۳–۲۸- دوران بردارهای یکه در دستگاه مختصات کارتزین

$$\vec{R} == R_1\vec{e}_1 + R_2\vec{e}_2 \qquad (۱۱۵-۳)$$

$$\vec{R}' == R_1'\vec{e}_1 + R_2'\vec{e}_2 + R_1\vec{e}_1' + R_2\vec{e}_2' \qquad (۱۱۶-۳)$$

چون بردارهای $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ در حال دوران هستند، مشتقات آنها در نظر گرفته شده‌اند.

همچنین $\vec{e}_2' = \vec{\omega}\times\vec{e}_2$, $\vec{e}_1' = \vec{\omega}\times\vec{e}_1$ پس:

$$\begin{aligned}\vec{R}' &= R_1'\vec{e}_1 + R_2'\vec{e}_2 + R_1.\vec{\omega}\times\vec{e}_1 + R_2.\vec{\omega}\times\vec{e}_2 = R_1'\vec{e}_1 + R_2'\vec{e}_2 + \\ &\vec{\omega}\times\left(R_1\vec{e}_1 + R_2\vec{e}_2\right) = R_r' + \vec{\omega}\times\vec{R} \quad , \quad R_r' = R_1'\vec{e}_1 + R_2'\vec{e}_2\end{aligned} \qquad (۱۱۷-۳)$$

سرعت یک نقطه‌ی مادی

مطابق شکل ۳–۲۹ نقطه‌ی p در صفحه‌ی xy حرکت می‌کند بردار وضعیت آن $\vec{S}=\vec{R}+\vec{r}$ می باشد که در آن $\vec{R}$ بردار وضعیت مرکز دستگاه مختصات ثابت xy و $\vec{r}$ بردار وضعیت نقطه‌ی p نسبت به مرکز دستگاه مختصات متحرک $x'y'$ است. با توجه به متحرک بودن دستگاه $x'oy'$ نسبت به دستگاه xoy بردارهای یکه‌ی $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ تحت زاویه‌ی θ و سرعت زاویه‌ای ω دوران می‌کنند همچنین بردار یکه‌ی $\vec{e}_3$ بر صفحه‌ی xoy عمود است و $\vec{e}_3 = \vec{e}_1\times\vec{e}_2$ حال از رابطه‌ی بردار موقعیت مشتق گرفته و سرعت مطابق نقطه‌ی مادی p تعیین می‌گردد:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt} = \dot{\vec{S}} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}} \qquad (۱۱۸-۳)$$

که در آن $\dot{\vec{R}}$ سرعت نقطه‌ی o' نسبت به o می‌باشد. چون‌که r در دستگاه متحرک تعریف شده است، با استفاده از تعریف مشتق بردار در دستگاه مختصات مرجع متحرک می‌توان نوشت:

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_r + \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (۳\text{-}۱۱۹)$$

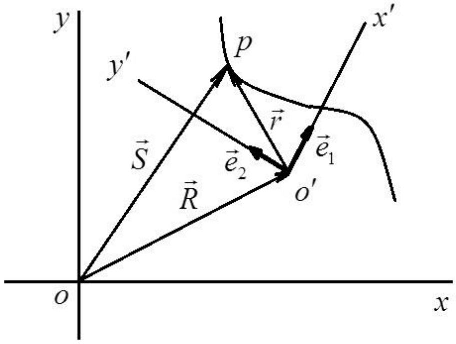
پس از قرار دادن در رابطه‌ی ۳-۱۲۸عبارت زیر حاصل می‌شود.

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_r + \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (۳\text{-}۱۲۰)$$

که در آن:

$\vec{v}$: سرعت مطلق نقطه‌ی p، $\dot{\vec{R}}$: سرعت مطلق مبدا مختصات متحرک o'، $\vec{\omega}$: سرعت زاویه‌ای مطلق دستگاه مختصات $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$، $\vec{r}$: بردار موقعیت نقطه مادی p در دستگاه مختصات $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$، $\dot{\vec{r}}_r$: سرعت نقطه‌ی مادی p که به وسیله‌ی ناظر متصل به دستگاه مختصات متحرک $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ اندازه‌گیری می‌شود. در صورتی که در دستگاه مختصات متحرک فقط دارای حرکت انتقالی نسبت به دستگاه ثابت باشد، سرعت زاویه‌ای $\omega = 0$ شده و می‌توان نوشت:

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_r \qquad (۳\text{-}۱۲۱)$$



شکل۳-۲۹- بردار موقعیت نسبت به حالتی که مبدا مختصات منتقل شده است.

شتاب یک نقطه‌ی مادی

برای یافتن شتاب با دو بردار مشتق گیری نسبت به زمان از $\vec{S} = \vec{R} + \vec{r}$ نسبت به دستگاه مختصات xy ثابت می‌توان نوشت:

$$\vec{a} = \frac{d^2S}{dt^2} = \ddot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}} \qquad (۳\text{-}۱۲۲)$$

که در آن $\ddot{\vec{R}}$ شتاب مطلق مرکز مختصات متحرک o' نسبت به مرکز مختصات ثابت o می‌باشد. چون $\vec{r}$ در دستگاه مختصات متحرک اندازه‌گیری می‌شود، مشتق گیری از آن به فرم زیر است:

$$\vec{\dot{r}} = \vec{\dot{r}}_r + \vec{\omega} \times \vec{r} \qquad (۱۲۳-۳)$$

$$\vec{\ddot{r}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{\dot{r}}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}\right) = \frac{d\vec{\dot{r}}_r}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \times \vec{r}) \qquad (۱۲۴-۳)$$

$$\frac{d}{dt}(\overrightarrow{\omega} \times \vec{r}) = \vec{\dot{\omega}} \times \vec{r} + \overrightarrow{\omega}\left(\vec{\dot{r}}_r + \overrightarrow{\omega} \times \vec{r}\right) = \overrightarrow{\omega} \times \vec{r} + \overrightarrow{\omega} \times \vec{\dot{r}}r + \overrightarrow{\omega} \times \left(\overrightarrow{\omega} \times \vec{r}\right)$$

$$\vec{\ddot{r}} = \vec{\ddot{r}}_r + \vec{\dot{\omega}} \times \vec{r} + \overrightarrow{\omega} \times \left(\overrightarrow{\omega} \times \vec{r}\right) + 2\overrightarrow{\omega} \times \vec{\dot{r}}_r \qquad (۱۲۵-۳)$$

با در نظر گرفتن $\alpha = \dot{\omega}$ که نشان دهنده‌ی شتاب زاویه‌ای مطلق در دستگاه متحرک می‌باشد، سرانجام پس از جایگذاری رابطه‌ی زیر نتیجه می‌شود.

$$\vec{a} = \vec{\ddot{R}} + \vec{\ddot{r}}_r + \vec{\alpha} \times \vec{\alpha} + \overrightarrow{\omega} \times \left(\overrightarrow{\omega} \times \vec{r}\right) + 2\overrightarrow{\omega} \times \vec{\dot{r}}_r \qquad (۱۲۶-۳)$$

که در آن $\vec{\ddot{R}}$: شتاب مطلق مرکز مختصات متحرک o'، $\vec{\ddot{R}}$: شتاب مطلق مرکز مختصات متحرک o'، $\vec{\ddot{r}}_r$: شتاب نقطه‌ی p که توسط ناظر متصل به دستگاه مختصات متحرک $\vec{e}_2$, $\vec{e}_1$ اندازه‌گیری می‌شود. $\vec{\alpha}$: زاویه‌ای مطلق دستگاه مختصات $\vec{e}_2$, $\vec{e}_1$ متحرک، $\overrightarrow{\omega}$: بردار موقعیت نقطه‌ی مادی p که در دستگاه مختصات متحرک اندازه‌گیری می‌شود.$\vec{\alpha} \times \vec{r}$: شتاب مماس به علت شتاب زاویه‌ای دستگاه مختصات متحرک، اگر مقدار ω ثابت باشد، این جمله مساوی صفر می‌شود. $\overrightarrow{\omega} \times \left(\overrightarrow{\omega} \times \vec{r}\right)$: شتاب به علت سرعت زاویه‌ای دستگاه مختصات متحرک، این شتاب، شتاب جانب مرکز یا مولفه‌ی قائم شتاب نام دارد.

$2\vec{\omega} \times \vec{\dot{r}}_r$: شتاب به علت اثر متقابل جملات سرعت زاویه‌ای وسرعت نسبی این شتاب به شتاب کریولیس معروف است. اگر دستگاه مختصات متحرک فقط دارای حرکت انتقال باشد، آنگاه $\omega = \alpha = 0$ شده و عبارت زیر حاصل می‌شود.

$$\vec{a} = \vec{\ddot{R}} + \vec{\ddot{r}}_r \qquad (۱۲۷-۳)$$

یادآوری:

یک جسم وقتی نقطه‌ی مادی گفته می‌شود که ابعاد آن تاثیری در وضعیت حرکتی آن نداشته باشد، بنابراین جرم یک نقطه‌ی مادی در یک نقطه متمرکز فرض می‌شود. نقطه مادی گاهی مواقع جرم نقطه‌ای نیزگفته می‌شود.

مسائل حل شده

مثال ۱: مطابق شکل ۳-۳۰ یک واگن باری در امتداد یک مسیر مستقیم با سرعت ۳۰m/s و شتاب ۱۰m/s^2 حرکت می‌کند. میله‌ای به سقف واگن متصل شده و در لحظه‌ی نشان داده شده با سرعت زاویه‌ای ۲rad/s

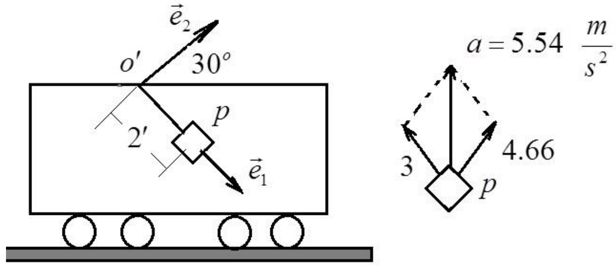
در جهت خلاف عقربه‌های ساعت و شتاب زاویه‌ای $۱۰ rad/s^2$ در جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌کند. در همان لحظه وزنه‌ی p با سرعت ثابت $۴m/s$ نسبت به میله، در امتداد میله به سمت خارج حرکت می‌کند، مطلوب است تعیین سرعت و شتاب مطلق وزنه‌ی p در لحظه‌ی نشان داده شده.

حل:

دستگاه مختصات متحرک $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ در مرکز O' قرار داده شده و به میله می‌چسبد، چون O' به واگن متصل است و واگن نیز متحرک است، سرعت و شتاب مطلق آن در دستگاه متحرک برابر است با:

$$\dot{\vec{R}} = 30(Sin30°\vec{e}_1 + Cos30\vec{e}_1) \quad , \quad \ddot{\vec{R}} = 10(Sin30°\vec{e}_1 + Cos30\vec{e}_2)$$

این سرعت و شتاب بر حسب بردارهای یکه در دستگاه مختصات متحرک بیان شده‌اند، با توجه به اطلاعات داده شده درمساله:



شکل۳-۳۰- یک جرم متصل به میله در داخل یک واگن باری متحرک

$$\vec{\omega} = 2\vec{e}_3 \quad , \quad \vec{a} = -10\vec{e}_3 \quad , \quad \vec{r} = 2\vec{e}_1 \quad , \quad \dot{\vec{r}}_r = 4\vec{e}_1 \, , \quad \ddot{\vec{r}}_r = 0$$

بنابراین سرعت مطلق به فرم زیر تعیین می‌گردد:

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_r + \vec{\omega} \times \vec{r} \quad \rightarrow \vec{v} = 30(0.5\vec{e}_1 + 0.866\vec{e}_2) + 4\vec{e}_1 + (2\vec{e}_3 \times 2\vec{e}_1)$$
$$\vec{v} = 15\vec{e}_1 + 26\vec{e}_2 + 4\vec{e}_1 + 4\vec{e}_3 = 19\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 \quad \text{m/s}$$

شتاب مطلق نیز مطابق رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود.

$$\vec{a} = \ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}}_r + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) + 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_r$$
$$\vec{\omega} \times \vec{r} = 4\vec{e}_2 \text{ و } \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = 2\vec{e}_3 \times 4\vec{e}_2 = -8\vec{e}_1$$
$$\vec{\alpha} \times \vec{r} = -10\vec{e}_3 \times 2\vec{e}_1 = -20\vec{e}_2 \qquad 2\vec{\omega} \times \dot{\vec{r}}_r = 4\vec{e}_3 \times 4\vec{e}_1 = 16\vec{e}_2$$

بردارهای یکه نیز راست‌گرد انتخاب شده‌اند.

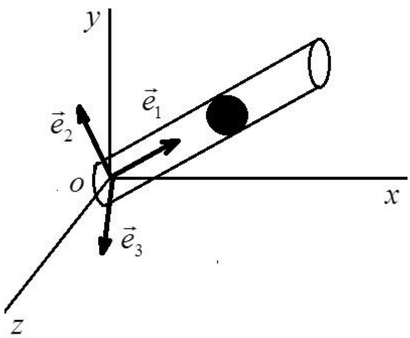
$$\vec{a} = 10(0/5\vec{e}_1 + 0/866\vec{e}_2) - 20\vec{e}_2 - 8\vec{e}_1 + 16\vec{e}_2 =$$
$$-35\vec{e}_1 + 4/66 \ {}^{m}/_{s^2}$$

بردار شتاب مطلق مطابق شکل ۳-۳۰ نشان داده شده که دارای برآیند $5/54\,{}^{m}/_{s^2}$ می‌باشد.

مثال۲: مطابق شکل ۳-۳۱ نقطه‌ی مادی در امتداد سطح داخلی لوله حرکت می‌کند. نقطه‌ی مادی طوری در امتداد لوله حرکت می‌کند که رابطه‌ی $r = t^2$ برای آن برقرار است. (r بر حسب متر و t بر حسب ثانیه) لوله با سرعت زاویه‌ای $\vec{\omega} = 10t(\vec{e}_2 + \vec{e}_3)\,{}^{rad}/_{s}$ دوران می‌کند. دستگاه بردارهای یکه $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ مطابق شکل به لوله متصل است. مطلوب است تعیین سرعت و شتاب نقطه‌ی مادی وقتی که $t=1$ ثانیه است. نتایج را بر حسب $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ بیان کنید.

حل: چون دستگاه بردارهای یکه‌ی متحرک متصل به لوله است، سرعت زاویه‌ای آن مساوی $\overrightarrow{\omega} = 10t(\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$ می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$\vec{v} = \dot{\vec{R}} + \dot{\vec{r}}_r + \overrightarrow{\omega} \times \vec{r}$$



شکل۳-۳۱- حرکت نقطه‌ی مادی در سطح داخلی لوله

چون مرکز o' بر o منطبق است، بنابراین: $\dot{\vec{R}} = 0$ همچنین:

$$\vec{r} = t^2\vec{e}_1 \quad , \quad \dot{\vec{r}}_r = 2t\vec{e}_1$$

$$\overrightarrow{\omega} \times \vec{r} = 10t(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \times (t^2\vec{e}_1) = -10t^3\vec{e}_3 + 10t^3\vec{e}_2$$

بنابراین:

$$\vec{v} = 2t\vec{e}_1 + 10t^3\vec{e}_2 - 10t^3\vec{e}_3 = (2\vec{e}_1 + 10\vec{e}_2 - 10\vec{e}_3)\,{}^{m}/_{s} \quad , \quad t = 1\ sec$$

برای تعیین شتاب از رابطه‌ی زیر استفاده می‌شود.

$$\vec{a} = \ddot{\vec{R}} + \ddot{\vec{r}}_r + \vec{\alpha} \times \vec{r} + \overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \vec{r}) + 2\overrightarrow{\omega} \times \dot{\vec{r}}_r$$

$$\ddot{\vec{R}} = 0 \quad \text{و}\ \ddot{\vec{r}}_r = 2\vec{e}_1 \quad , \vec{\alpha} = 10(\vec{e}_2 + \vec{e}_3)$$

$$\vec{\alpha} \times \vec{r} = -10(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \times t^2\vec{e}_1 = -10t^2\vec{e}_3 + 10t^2\vec{e}_2$$

$$\overrightarrow{\omega} \times (\overrightarrow{\omega} \times \vec{r}) = 10t(\vec{e}_2 + \vec{e}_3) \times (10t^3)(\vec{e}_2 - \vec{e}_3) = 100t^4(-\vec{e}_1 - \vec{e}_1) = -200t^4\vec{e}_1$$

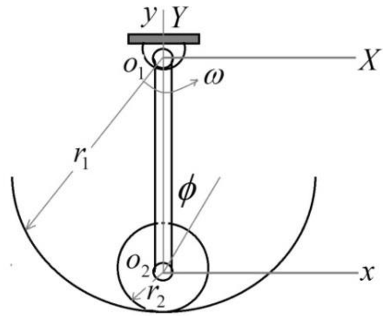
بنابراین:

$$2\overrightarrow{\omega} \times \dot{\vec{r}}_r = 20t(\vec{e}_1 + \vec{e}_3) \times 2t\vec{e}_1 = -40\mathrm{t}^2\vec{e}_3 + 40\mathrm{t}^2\vec{e}_2$$
$$\vec{\alpha} = 2\vec{e}_1 - 10\mathrm{t}^2\vec{e}_3 + 10\mathrm{t}^2\vec{e}_2 - 200\mathrm{t}^4\vec{e}_3 - 40\mathrm{t}^2\vec{e}_3 + 40\mathrm{t}^2\vec{e}_2$$

و برای $t=1$ ثانیه می‌توان نوشت:

$$\vec{\alpha} = (-198\vec{e}_1 + 50\vec{e}_2 - 50\vec{e}_3)\, {}^{m}/_{sec^2}$$

مثال۳: صفحه‌ی مدور O به شعاع r_r (مطابق شکل۳-۳۲) توسط میله‌ی O_1O_2 که حول نقطه‌ی O_1 با سرعت زاویه‌ای ثابت ω دوران می‌کند بدون لغزش روی مسیری دوار به شکل r غلتانده می‌شود. مطلوب است تعیین بردار شتاب نقطه‌ی p روی محیط صفحه در لحظه‌ای که زاویه‌ی $O_1O_2\,,\ O_2P$ برابر Φ باشد.



شکل۳-۳۲- صفحه‌ی مدور در حالت بدون لغزش به همراه میله با سرعت زاویه‌ای ثابت

حل: دستگاه مختصات ثابت O_1XYZ را در نقطه‌ی O_1 و دستگاه مختصات متحرك (واسط) را متصل به میله‌ی O_1O_2 با مبدا O_2 و به طریقی که محور y بر O_1O_2 منطبق باشد، انتخاب می گردد. الف) با انتخاب محورهای کمکی نامبرده شده می‌توان بردارهای سرعت، شتاب، سرعت زاویه‌ای و شتاب زاویه‌ای را به فرم زیر نوشت:

$$\overrightarrow{\omega} = \omega\vec{k} = \omega\vec{K}\,, \vec{R} = (r_1 - r_2)\vec{j}$$
$$\dot{\vec{R}} = \overrightarrow{\omega} \times \vec{R} = \omega(r_1 - r_2).\vec{k} \times \vec{j} = (r_1 - r_2)\omega\vec{i}$$
$$\ddot{\vec{R}} = \overrightarrow{\omega} \times \dot{\vec{R}} = \omega\vec{k} \times (r_1 - r_2)\vec{i} = (r_1 - r_2)\omega\vec{j}$$

ب) زاویه‌ی p با محور y در دستگاه متحرک Φ نامیده می‌شود، برای یافتن رابطه‌ی Φ و ω ملاحظه می‌شود که $\vec{\omega}_1$ بردار سرعت زاویه‌ای مطلق صفحه‌ی غلتان برابر است با مجموع سرعت زاویه‌ای آن نسبت به دستگاه متحرک O_2xyz و سرعت زاویه‌ای این دستگاه نسبت به دستگاه اصلی:

$$\vec{\omega}_1 = \omega\vec{k} = \omega\vec{K} - \dot{\Phi}\vec{k} = (\omega - \dot{\Phi})\vec{k}$$

از طرفی سرعت مرکز صفحه برابر است با $(r_1 - r_2)\omega$ به سمت راست و محور دوران غلطشی یالی از صفحه‌ی مدور است که در تماس با سطح حرکت می‌کند، بنابراین:

$$\vec{\omega}_1 = \frac{r_1 - r_2}{r_2} = \omega\vec{K}$$

$$\frac{r_1 - r_2}{r_2}\omega - \dot{\Phi} \;\; \rightarrow \;\; \dot{\Phi} = \frac{r_1}{r_2}\omega \rightarrow \ddot{\Phi} = \frac{r_1}{r_2}\dot{\omega}$$

بردارهای سرعت و شتاب نقطه‌ی p نسبت به دستگاه متحرک عبارتند از:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_{xyz} = -\dot{\Phi}\vec{k} \times (r_2 Sin\phi\vec{\imath} + r_2 Cos\phi\vec{\jmath}) = \frac{r_1}{r_2}\omega r_2 Cos\phi\vec{\imath} - \frac{r_1}{r_2}\omega r_2 Sin\phi\vec{\jmath}$$

$$\vec{v}_r = r_1\omega Cos\phi\vec{\imath} - r_1\omega Sin\phi\vec{\jmath}$$

چون این رابطه لحظه‌ای نیست، می‌توان از آن مشتق گرفته و شتاب را به‌دست آورد.

$$\vec{a}_r = \vec{a}_{xyz} = (\frac{d\vec{v}_r}{dt})_{xyz} = r_1\omega\dot{\phi} Cos\dot{\phi}\vec{\imath} - r_1\omega\dot{\phi} Sin\dot{\phi}\vec{\jmath}$$

$$\vec{a}_r = \frac{r_1^2\omega^2}{r_2}(-Sin\phi\vec{\imath} - Cos\phi\vec{\jmath}) \rightarrow r = r_2 Sin\phi\vec{\imath} + r_2 Cos\phi\vec{\jmath}$$

ج) حال برای نقطه‌ی p روابط حرکت مطلق به فرم زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{v} = \vec{v}_{xyz} = \dot{\vec{R}} + \vec{v}_r + \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\vec{v} = (r_1 - r_2)\omega\vec{\imath} + r_1\omega(Cos\phi\vec{\jmath} - Sin\phi\vec{\imath}) + \omega\vec{k} \times r_2(Sin\phi\vec{\imath} + Cos\phi\vec{\jmath})$$

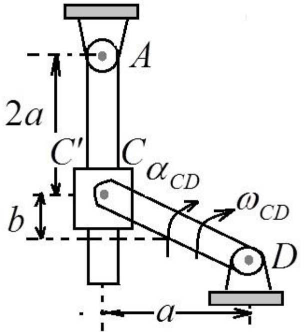
$$\vec{v} = \omega[(r_1 - r_2) - Cos\phi(r_1 + r_2)]\vec{\imath} - \omega(r_1 - r_2)Sin\phi\vec{\jmath}$$

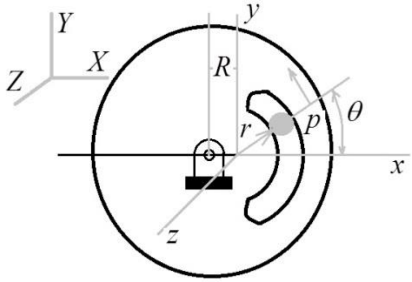
مسائل برای حل

۱- در شکل ۳-۳۳ دیسکی نشان داده شده که در آن شیاری به شعاع r تعبیه گردیده است. در لحظه‌ی مورد نظر ذره‌ی p در شیار نامبرده با سرعت زاویه‌ای ثابت ω_1 نسبت به دیسک در جهت نشان داده شده حرکت می‌کند. اگر دیسک حول محور خود O با سرعت ω_2 در خلاف جهت مثلثاتی بچرخد، مطلوب است تعیین بردار شتاب نقطه‌ی p.

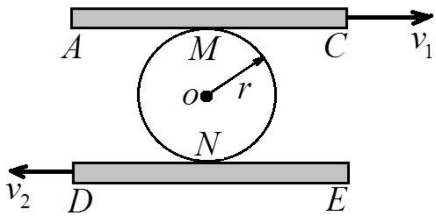
۲- اگر در مکانیزم و لحظه‌ی نشان داده شده در شکل ۳-۳۴، $a = 400mm$, $b = 300mm$ ، سرعت زاویه‌ای میله CD برابر $\omega_{CD} = 2\,\frac{rad}{s}$ و شتاب زاویه‌ای آن $\alpha_{CD} = 4\,\frac{rad}{s^2}$ باشند، مطلوب است تعیین سرعت و شتاب زاویه‌ای میله AB در این لحظه. لغزنده‌ی C به میله‌ی CD لولا شده و می‌توان روی میله‌ی AB لغزش نماید.

۳-استوانه‌ای به شعاع r مطابق شکل ۳-۳۵ بین دو صفحه‌ی متحرک قرار گرفته و حرکت آن نسبت به غلطش بدون لغزش است. حرکت صفحه‌ی AC به سمت راست با سرعت $v_1\,\frac{m}{s}$ و صفحه DE با سرعت $v_2\,\frac{m}{s}$ به سمت چپ حرکت می‌کند. مطلوب است محاسبه‌ی سرعت مرکز o و سرعت زاویه‌ای استوانه





شکل ۳-۳۳- دیسک شیاردار جهت هدایت حرکت ذره در داخل شیار شکل ۳-۳۴- مکانیزم مربوط به تمرین ۲

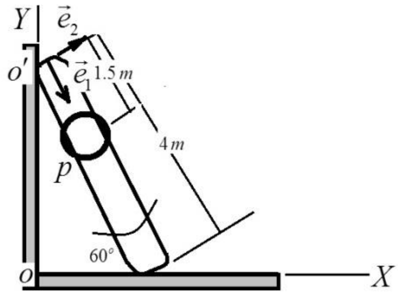


شکل۳-۳۵- حرکت غلطش بدون لغزش استوانه بین دو صفحه‌ی موازی متحرک

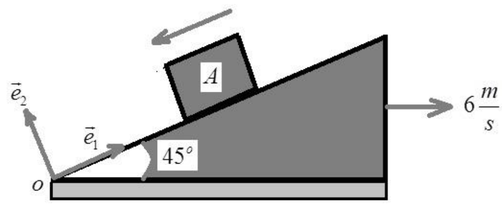
۴- مطابق شکل۳-۳۶، حلقه‌ی p در امتداد میله با سرعت نسبی $v\,\frac{m}{s}$ نسبت به میله به سمت پائین می‌لغزد، به طور همزمان، میله که در صفحه‌ی xy قرار دارد، با سرعت زاویه‌ای $5\,\frac{rad}{s}$ در خلاف جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌کند. در لحظه‌ی نشان داده شده، سرعت مطلق حلقه را به‌دست آورید.

۵- گوه‌ی شکل۳-۳۷ با سرعت $6\,\frac{m}{s}$ روی سطح در جهت نشان داده شده حرکت می‌کند و در همان حین قطعه‌ی A با سرعت $2\,\frac{m}{s}$ روی سطح شیبدار به طرف پائین می‌لغزد، با استفاده از بردارهای یکه‌ی $\vec{e}_2$ و $\vec{e}_1$ که مطابق شکل به گوه چسبیده‌اند، سرعت مطلق قطعه تعیین کنید.

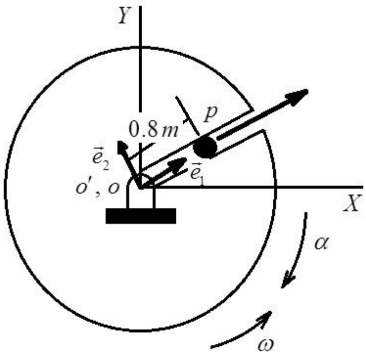
۶- میز نشان داده شده مطابق شکل ۳-۳۸ باسرعت زاویه‌ای $4\,\frac{rad}{s}$ در جهت مخالف عقربه‌های ساعت و شتاب زاویه‌ای $6\,\frac{rad}{s}$ در جهت عقربه‌های ساعت دوران می‌کند. در لحظه‌ی نشان داده شده نقطه‌ی مادی p در امتداد شیار با سرعت یکنواخت $8\,\frac{m}{s}$ نسبت به میز به سمت خارج حرکت می‌کند، شتاب مطلق نقطه‌ی مادی را به‌دست آورید.



شکل ۳-۳۶- لغزش حلقه بر روی میله به سمت پایین



شکل ۳-۳۷- حرکت گوه بر روی سطح شیبدار متحرک



شکل ۳-۳۷- حرکت نقطه‌ی مادی بر روی میز شیاردار متحرک

مراجع مورد استفاده

1- Robert. C.Wrede and Murray Spiegel, Schaums outline of Series Theory and problems of Advanced calculus, second edition, MoGraw-Hill, copyright© 2002.
2- Speiegel Murray Ralph, Schaums outline of theory and problems of Theoretical mechanics (Metric Edition), International Edition 1982. Mac Graw – Hill.
3- S. Selcuk Bayin, Mathematical Methods in Science and Engineering, Copyright © 2006 by John Wiley & Sons, Inc. All rights reserved.
4- Peter V. O'Neil, Advanced Engineering Mathematics, International Student Edition, Copyright © 2007 by Nelson, a division of Thomson Canad a Limited.
5- Andrea Prosperetti, Advanced Mathematics for Applications, © Cambridge University Press 2011.
6-Qiang. Yuan-qi, Gu. En-pu, Cheng Jia-Fu, Li. Ze-Hua, Yang. De-Tian, Problems andSolutions in Mechanics, Copyright © 1994 and Reprint in 2002 by World Scintific Publishing, Co. Pte. Ltd.
7- Sadri Hassani, Mathematical Methods for Students of Physics and Related Fields, © Springer Science+Business Media, LLC, 2009.
8-N. N. Lebedev, I. P. Skalskaya, Y. S. Uflyand, Worked Problems in Applied Mathematics, English Edition by Richard Silverman, Copyright © 1965 by Dover Publications, INC.
9- Murray. R. Spiegel, Schaums outline of Series Theory and problems of Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis, Copyright © 1959, by Mac Graw – Hill, Inc.

۱۰–ج، اچ، کیندل، هندسه تحلیلی، ترجمه‌ی ح، ابراهیم زاده قلزم، انتشارات فاطمی، اسفند ۱۳۶۸.

۱۱– م، جلوداری ممقانی، ریاضی عمومی ۲، دانشگاه پیام نور، چاپ دوازدهم ۱۳۸۲.

۱۲– ح، دهمرده، ریاضی عمومی ۲ ، انتشارات بعثت، چاپ پنجم ۱۳۷۶.

۱۳– ع، شیدفر، ریاضی عمومی ۲، چاپ اول ۱۳۷۴، ناشر مولف، استاد دانشگاه علم و صنعت.

۱۴– ل، لیتهلد، حساب دیفرانسیل و انتگرال و هندسه تحلیلی، جلد ۲ قسمت ۲، ترجمه‌ی ب، محسن رزاقی، س، کاظمی، ا، ناظمی، مرکز نشر دانشگاهی، چاپ سوم ۱۳۸۰.

۱۵– و، کاپلان و د، جی لوئیس، حساب دیفرانسیل و انتگرال و جبر خطی، جلد ۲، ترجمه‌ی ن، ایزد دوستدار، یوسفی آذر، انتشارات دانشگاه تهران، چاپ اول، دی ماه ۱۳۷۰.

۱۶– ن، محمدی راد، مسائل برگزیده از کتاب آپوستل جلد ۲، ویرایش ۳، انتشارات جنگل، ۱۳۸۳.

۱۷– ن، تابنده، مکانیک مهندسی، دینامیک برداری، جلد ۱، انتشارات دانشگاه تهران،÷ چاپ ۱، ۱۳۷۵.

۱۸– دی کی آنالد، مکانیک مهندسی، جلد ۲ دینامیک، ترجمه‌ی ش، طاحونی، نشر دانا،چاپ ۱، ۱۳۷۳.