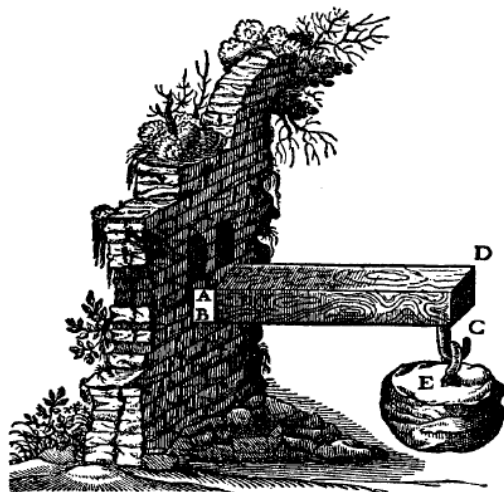


# فصل چهارم

## بارهای گسترده و مرکز ثقل



*Galileo wanted to know when the cantilever beam would break. He asked: What weight, hung from the end of the beam at C, would cause failure? You might wonder about Galileo's state of mind when he posed the question. From the looks of the wall it is the latter whose failure he should be concerned with, not the beam. No. You are reading the figure incorrectly; you need to put on another special pair of eyeglasses that filter out the shrubbery and the decaying wall and allow you to see only a cantilever beam, rigidly attached to a rigid support at the end AB. These glasses will also be necessary in what follows, so keep them on. Galileo had, earlier in his book, discussed the failure of what we would call a bar in uniaxial tension.*



## ۴-۱- نیروهای گسترده:

در فصل‌های گذشته نیرو به صورت متمرکز در نظر گرفته شد و در راستای خط اثرشان بر یک نقطه اثر می‌کنند، که این نیروها واقعیت عینی و خارجی ندارند. در عمل یک نیرو به جای تاثیر بر یک نقطه به صورت متمرکز بر یک سطح مشخص وارد می‌شود. اگر بارگذاری در مقایسه با ابعاد جسم بزرگ باشد، نیرو گسترده خوانده می‌شود.

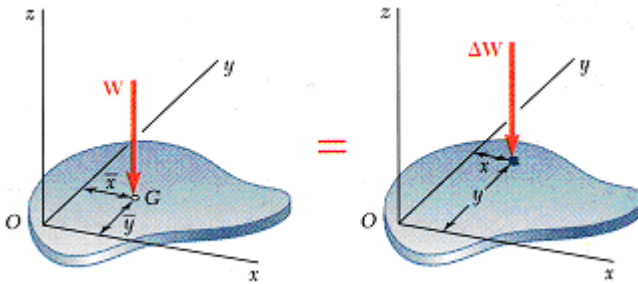
## ۴-۲- مرکز ثقل:

مرکز ثقل یک جسم، مرکز نیروهای موازی می‌باشد که از طرف زمین به ذرات آن وارد می‌آیند. محل این نقطه نسبت به ذرات یک سیستم بستگی به موقعیت سیستم ندارد. برای یافتن مرکز ثقل، از روابط (۴-۱) می‌توان استفاده نمود.

$$W = mg, \quad W = \int dW, \quad \bar{x} = \frac{\int x dW}{W}, \quad \bar{y} = \frac{\int y dW}{W}, \quad \bar{z} = \frac{\int z dW}{W} \quad (4-1)$$

برای نمونه در شکل (۴-۱) مرکز ثقل در نقطه  $G$  برای ورق نشان داده شده است. گشتاور وزن کل ورق  $W$ ، حول محورهای مختصات بایستی مساوی مجموع گشتاورهای تمام المان‌های ورق نسبت به محورهای مختصات باشد که با زیاد شدن تعداد المان‌ها، مجموع به انتگرال تبدیل می‌شود.

تذکر: مختصات مرکز ثقل در مراجع مختلف به صورت‌های  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  و  $(x_C, y_C, z_C)$  آمده است.



شکل ۴-۱

$$\sum M_y = \bar{x}.W = \sum x.\Delta W = \int x.dW \quad (4-2)$$

$$\sum M_x = \bar{y}.W = \sum y.\Delta W = \int y.dW \quad (4-3)$$

در کارهای عملی مهندسی، زمانی که اندازه جسم در مقایسه با اندازه زمین کوچک است، می توان فرض کرد همه ذراتی که جسم را تشکیل می دهند، از مرکز زمین فاصله یکسانی دارند. در نتیجه همگی تحت اثر شتاب گرانشی  $g$  یکسانی قرار دارند. حال اگر وزن جسم بر شتاب جاذبه تقسیم گردد، جرم حاصل می شود، پس مرکز جرم یک جسم به سادگی از روابط زیر حاصل می شود.

$$m = \int dm \quad , \quad \bar{x} = \frac{\int x dm}{m} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int y dm}{m} \quad , \quad \bar{z} = \frac{\int z dm}{m} \quad (4-4)$$

### ۴-۳- مرکز هندسی:

در صورتی که جسم همگن باشد (یعنی وزن مخصوص آن در تمام حجم ثابت باشد)، مختصات مرکز ثقل تبدیل به مرکز هندسی می شود، یعنی اینکه در جسم همگن مرکز هندسی منطبق بر مرکز ثقل است.

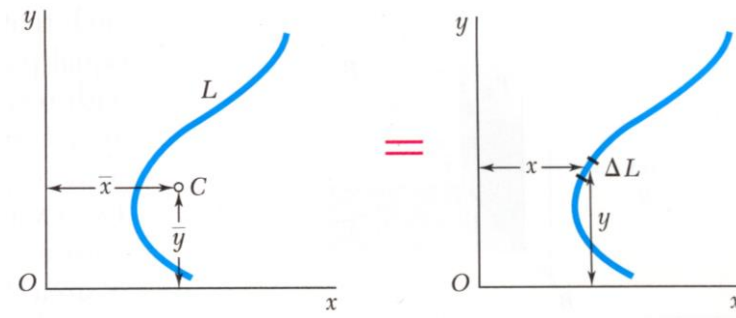
#### ۴-۳-۱- مرکز هندسی خط:

برای یک میله یا سیم باریک به طول  $L$ ، سطح مقطع  $A$  و چگالی  $\rho$ ، مرکز خط عبارتست از: (شکل ۴-۲)

$$L = \int dL \quad , \quad \bar{x} = \frac{\int x dL}{L} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int y dL}{L} \quad , \quad \bar{z} = \frac{\int z dL}{L} \quad (4-5)$$

در حالت دو بعدی  $dL$  به یکی از صورت‌های زیر نوشته می شود.

$$dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta \quad , \quad dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad , \quad dL = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} dy \quad (4-6)$$



شکل ۴-۲

## ۲-۳-۴- مرکز هندسی سطح:

اگر جسمی شامل یک صفحه نازک همگن، با ضخامت یکسان  $t$  و مساحت رویه  $A$  باشد، آنگاه  $m = \rho t A$  و  $dm = \rho t dA$  با تقسیم معادلات مرکز جرم بر  $\rho t$  مرکز هندسی سطح از فرمول های زیر به دست می آید. (شکل ۳-۴)

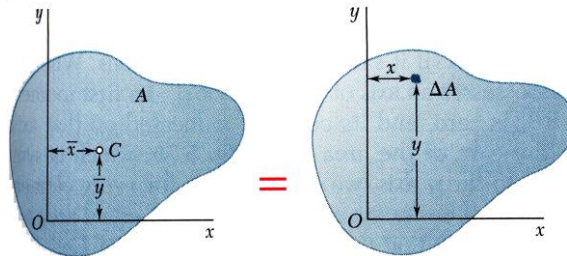
$$A = \int dA \quad , \quad \bar{x} = \frac{\int x dA}{A} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \quad , \quad \bar{z} = \frac{\int z dA}{A} \quad (۴-۷)$$

اگر سطحی دارای یک محور تقارن باشد، آن محور تقارن حتماً از مرکز سطح آن عبور می کند. اگر سطح دارای دو محور تقارن باشد، محل برخورد آنها مرکز سطح است. اگر سطحی دارای مرکز تقارن باشد، مرکز هندسی آن نیز است.

در سطوح همگن مرکز هندسی بر مرکز ثقل منطبق می باشد، لیکن در سطوح غیر همگن محل مرکز ثقل نه تنها به هندسه سطح، بلکه به توزیع وزن مخصوص در روی آن نیز بستگی خواهد داشت.

انتگرال  $\int x dA$  را گشتاور سطح  $A$  نسبت به محور  $y$  می نامند و آن را با  $Q_y$  نشان می دهند، به همین ترتیب انتگرال  $\int y dA$  مشخص کننده گشتاور اول  $A$  نسبت به محور  $x$  است و آن را با  $Q_x$  نشان می دهند.

$$Q_y = \int x dA = \bar{x} A \quad . \quad Q_x = \int y dA = \bar{y} A \quad (۴-۸)$$



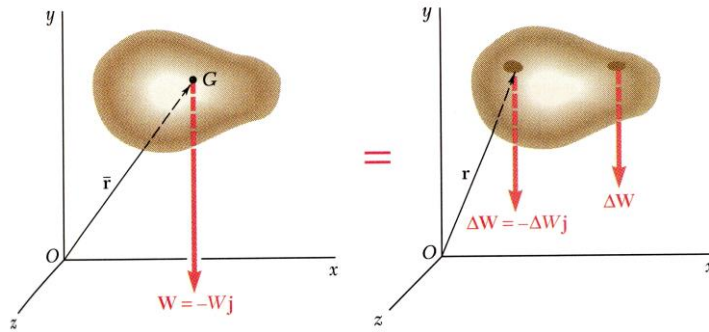
شکل ۳-۴

## ۳-۳-۴- مرکز هندسی حجم:

اگر چگالی (جرم در واحد حجم) جسم ثابت باشد، آنگاه  $m = \rho V$  و  $dm = \rho dV$  و با تقسیم معادلات مرکز جرم بر چگالی مرکز هندسی حجم به صورت (۴-۹) حاصل می شود.

(شکل ۴-۴)

$$V = \int dV \quad , \quad \bar{x} = \frac{\int x dV}{V} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\int y dV}{V} \quad , \quad \bar{z} = \frac{\int z dV}{V} \quad (4-9)$$

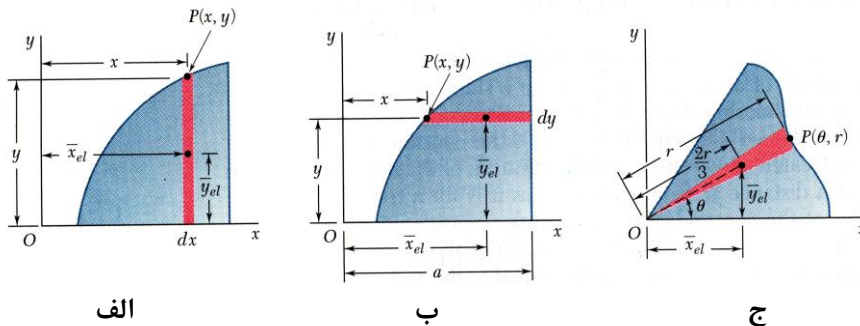


شکل ۴-۴

۴-۴- تعیین مرکز هندسی به روش انتگرال گیری:

اگر جزء سطح  $dA$  با مربع کوچک به اضلاع  $dx, dy$  انتخاب شود، تعیین هر یک از انتگرال ها، انتگرال گیری دوگانه بر حسب  $x, y$  را ایجاب می کند و در صورت استفاده از مختصات قطبی یا در صورتی که  $dA$  در مربع کوچکی به اضلاع  $dr, rd\theta$  انتخاب گردد، انتگرال گیری دوگانه مورد نیاز است.

در بیشتر موارد مختصات مرکز هندسی هر سطح را می توان با تشکیل یک انتگرال ساده تعیین کرد. این عمل با انتخاب  $dA$  به شکل مستطیل یا نواری باریک یا قطاعی نازک یا جزئی از شکل انجام می شود. شکل (۵-۴) را در نظر بگیرید.



شکل ۵-۴

با مراجعه به شکل ۴-۵- الف وب و نوشتن معادلات مرکز هندسی سطح و در نظر گرفتن المان‌های سطح به صورت یک نوار قائم و افقی رابطه‌های زیر نتیجه می‌شود.

$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{el} dA = \int x(y dx) \quad (4-10)$$

$$\bar{y}A = \int \bar{y}_{el} dA = \int \frac{y}{2}(y dx) \quad (4-11)$$

$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{el} dA = \int \frac{a+x}{2} [(a-x) dx] \quad (4-12)$$

$$\bar{y}A = \int \bar{y}_{el} dA = \int y [(a-x) dx] \quad (4-13)$$

با مراجعه به شکل ۴-۵- ج و در نظر گرفتن المان سطح در دستگاه مختصات قطبی می‌توان نوشت:

$$\bar{x}A = \int \bar{x}_{el} dA = \int \frac{2r}{3} \cos\theta \left( \frac{1}{2} r^2 d\theta \right) \quad (4-14)$$

$$\bar{y}A = \int \bar{y}_{el} dA = \int \frac{2r}{3} \sin\theta \left( \frac{1}{2} r^2 d\theta \right) \quad (4-15)$$

#### ۴-۵- اجسام مرکب:

احجام مرکب ترکیبی از دو یا چند حجم با هندسه ساده است. با معلوم بودن مراکز هندسی اجسام ساده تشکیل دهنده می‌توان مرکز هندسی حجم مرکب را محاسبه نمود. بنابراین مرکز ثقل حجمی عبارتست از:

$$\begin{aligned} \bar{x}(W_1 + W_2 + \dots + W_n) &= \bar{x}_1 W_1 + \bar{x}_2 W_2 + \dots + \bar{x}_n W_n \\ \Rightarrow \bar{x} &= \frac{\sum \bar{x}_i W_i}{\sum W_i} \end{aligned} \quad (4-16)$$

$$\begin{aligned} \bar{y}(W_1 + W_2 + \dots + W_n) &= \bar{y}_1 W_1 + \bar{y}_2 W_2 + \dots + \bar{y}_n W_n \\ \Rightarrow \bar{y} &= \frac{\sum \bar{y}_i W_i}{\sum W_i} \end{aligned} \quad (4-17)$$

$$\bar{z}(W_1 + W_2 + \dots + W_n) = \bar{z}_1 W_1 + \bar{z}_2 W_2 + \dots + \bar{z}_n W_n$$

$$\Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum \bar{z} W_i}{\sum W_i} \quad (4-18)$$

سطوح یا حجم‌های توخالی با علامت منفی در محاسبات ظاهر می‌شود. برای اجسام مرکب روابط سطح و خط را نیز می‌توان نوشت.

$$\bar{y} = \frac{\sum y_i A_i}{\sum A_i}, \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i A_i}{\sum A_i} \quad (4-19)$$

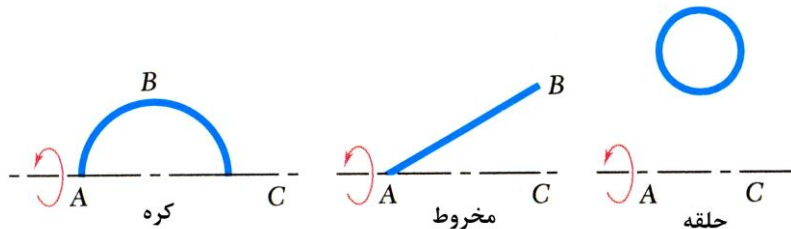
$$\bar{y} = \frac{\sum y_i L_i}{\sum L_i}, \quad \bar{x} = \frac{\sum x_i L_i}{\sum L_i} \quad (4-20)$$

#### ۴-۶- قضایای پایوس گلدنیوس:

به کمک این روش می‌توان به راحتی سطح جانبی و حجم یک حجم دوار را محاسبه نمود. حجم دوار حجمی است که از دوران یک خط یا خم حول محوری که با آن متقاطع نیست بوجود می‌آید. از این قضایا می‌توان برای تعیین مرکز هندسی خطوط و خم‌ها و سطوح استفاده نمود.

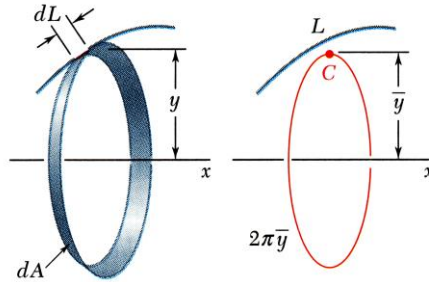
#### ۴-۶-۱- قضیه اول:

سطح جانبی از دوران خمی به طول  $L$ ، حول یک محور ثابت و غیر متقاطع با آن مساوی است با حاصلضرب طول  $L$  در محیط دایره‌ای به مرکز هندسی خم در حین دوران، طی می‌کند. این خم را مولد سطح دوار می‌گویند. (شکل‌های ۴-۶ و ۴-۷)  $A = 2\pi \bar{y} L$ ، در صورتی که دوران حول محور کامل نبوده و به اندازه  $\theta$  بر حسب رادیان باشد، سطح جانبی از رابطه  $A = \theta \bar{y} L$  بدست می‌آید.



شکل ۴-۶

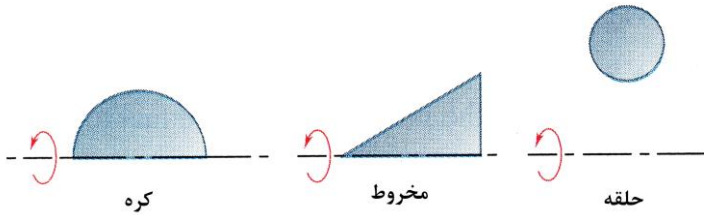




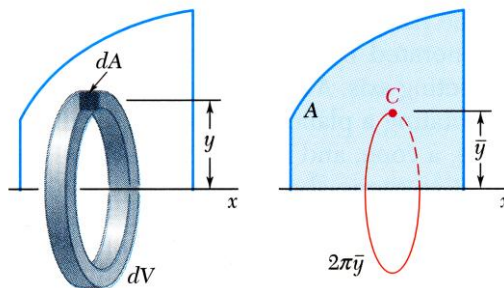
شکل ۴-۷

۲-۶-۴- قضیه دوم:

حجم حاصل از دوران یک سطح به مساحت  $A$ ، حول یک محور ثابت و غیر متقاطع با آن، مساوی است با حاصلضرب سطح  $A$  در محیط دایره ای که مرکز هندسی سطح در حین دوران، طی می کند. این سطح را مولد حجم دوار می گویند.  $V = 2\pi\bar{y}A$  در صورتی که دوران حول محور کامل نبوده و به اندازه  $\theta$  (برحسب رادیان) باشد، حاصل از رابطه  $V = \theta \bar{y}A$  به دست می آید. (شکل های ۴-۸ و ۴-۹)



شکل ۴-۸



شکل ۴-۹

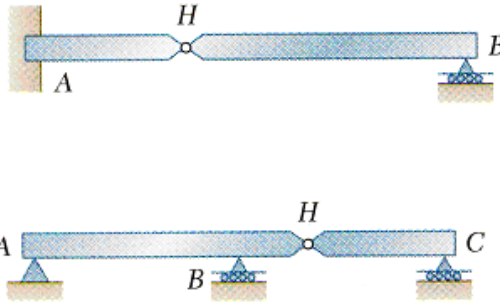
## ۴-۷- تیرها:

تیرها اعضای منشوری هستند که علاوه بر نیروی محوری و برشی در مقابل خمش ناشی از بارهای اعمال شده نیز مقاومت می کنند.

## ۴-۷-۱- انواع تیرها:

تیرهایی که واکنش خارجی تکیه‌گاه آنها را می توان تنها با روش های استاتیکی محاسبه کرد، به تیرهای معین استاتیکی موسومند.

تیری که تعداد تکیه‌گاه‌های آن بیش از تعداد مورد نیاز برای تامین تعادل است را نامعین استاتیکی می نامند و لازم است خواص بار، تغییر شکل تیر را علاوه بر معادله تعادل استاتیکی برای تعیین واکنش های تکیه‌گاه نیز در نظر گرفت. بعضی از تیرها از دو بخش تشکیل شده و توسط مفصل یا پین به هم متصل شده‌اند. در این حالت جهت تحلیل تیر، در قسمت مفصل پس از برش، دو نیروی عمودی مخالف هم در دو طرف برش جایگزین می شود. (شکل ۴-۱۰)



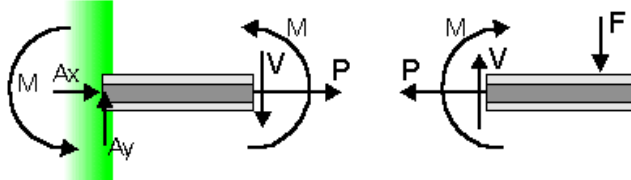
شکل ۴-۱۰

## ۴-۷-۲- نیروهای داخلی در تیرها:

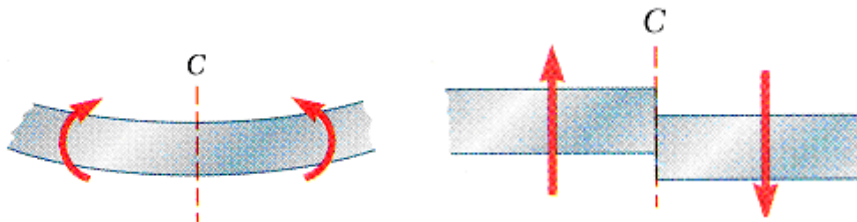
تیرها علاوه بر تحمل کشش و فشار می توانند در مقابل برش، خمش و پیچش مقاومت کنند. نیروی  $V$  را نیروی برش، کوپل  $M$  را گشتاور خمشی و کوپل  $T$  را گشتاور پیچشی می نامند، این آثار نمایشگر مولفه های برداری برآیند نیروهای وارد بر مقطع عرضی تیر هستند. برای تعیین نیروها قرارداد زیر در نظر گرفته می شود.

نیروی محوری وقتی مثبت است که کششی باشد. نیروی برشی وقتی مثبت است که در قطعه سمت چپ جهت آن به سمت پایین باشد.

گشتاور خمشی وقتی مثبت است که در تار تحتانی تیر ایجاد کشش نماید. در واقع گشتاور خمشی مثبت تیر را به صورت کاسه ای و گشتاور خمشی منفی تیر را به صورت گنبدی در می آورند. (شکل ۱۱-۴ الی ۱۳-۴)



شکل ۱۱-۴



اثر نیروهای خارجی (برش مثبت)

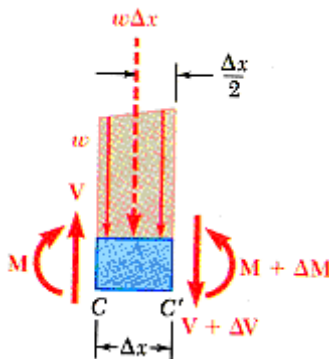
شکل ۱۲-۴

اثر نیروهای خارجی (گشتاور خمشی مثبت)

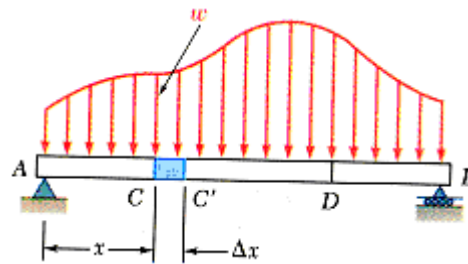
شکل ۱۳-۴

### ۳-۸-۴- روابط عمومی بارگذاری، برش و گشتاور:

در تیرهایی که نیروهای گسسته (متمركز) دارند. یک روش نوشتن معادلات تعادل (تعادل نیروی برشی و بار، تعادل نیروهای محوری، تعادل گشتاورهای خمشی نسبت به مقطع) است. بنابراین با توجه به روابط زیر می توان با داشتن معادله بار خارجی، معادلات  $M, V$  را یافت. جهت یافتن رابطه بین شدت بار، نیروی برشی و گشتاور خمشی تیر نشان داده شده در شکل (۱۲-۴) و برش مقطعی از آن در شکل (۱۳-۴) در نظر گرفته می شود.



شکل ۱۳-۴



شکل ۱۲-۴

با توجه به مقطع نشان داده شده در شکل (۴-۱۳) با گرفتن گشتاور حول نقطه  $C'$  رابطه زیر نتیجه می شود.

$$\sum M_c = 0 \Rightarrow M + \Delta M - M - V \times \Delta x + w(x) \times \Delta x \times \frac{\Delta x}{2} = 0 \quad (۴-۲۱)$$

$$\Rightarrow V = \frac{\Delta M}{\Delta x}, \quad V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} \approx \frac{dM}{dx}$$

در عبارت بالا،  $\Delta x \times \frac{\Delta x}{2}$  بسیار کوچک بوده و می توان از آن صرف نظر کرد.

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow V + \Delta V + w\Delta x - V = 0 \Rightarrow w = -\frac{\Delta V}{\Delta x} \quad (۴-۲۲)$$

$$w = -\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta x} \approx -\frac{dV}{dx}$$

**الف:** معادله زیر بیانگر این مطلب است که شیب نمودار برشی باید در همه جا برابر منفی مقدار بار اعمالی باشد.

$$w(x) = \frac{-dV}{dx} \Rightarrow \int_{V_0}^V dV = -\int_{x_0}^x w(x) dx \quad (۴-۲۳)$$

$$\Rightarrow V - V_0 = (\text{منفی سطح زیر بار از } X_0 \text{ تا } X) \quad (۴-۲۴)$$

**ب:** معادله زیر بیانگر این مطلب است که شیب نمودار گشتاور در هر کجا برابر نیروی برشی است.

$$V(x) = \frac{-dM}{dx} \Rightarrow \int_{M_0}^M dV = -\int_{x_0}^x V(x) dx \quad (۴-۲۵)$$

$$\Rightarrow M - M_0 = (\text{منفی زیر نمودار برشی از } X_0 \text{ تا } X) \quad (۴-۲۶)$$

معادله فوق برای دو طرف بار متمرکز معتبر بوده و در محل گشتاور متمرکز معتبر نمی باشد، زیرا به علت تغییر ناگهانی گشتاور، ناپیوستگی به وجود آمده است.

وقتی  $V$  از صفر می گذرد و تابعی پیوسته از  $x$  بوده و  $\frac{dV}{dx} = 0$  است، گشتاور خمشی  $M$

وقتی است که  $V$  به طور ناپیوسته از محور صفر عبور می کند که برای تیرها تحت بارهای متمرکز اتفاق می افتد.

**تذکر:** درجه برشی  $V$  یکی بیش تر از درجه بار  $w$  است. همچنین درجه گشتاور  $M$  بر حسب  $x$  یک درجه بیش از  $V$  است. در نتیجه  $M$  بر حسب  $x$  دو درجه بیش تر از  $w$

است  $\left(\frac{d^2M}{dx^2} = -w\right)$ . پس اگر  $w$  تابع معلومی از  $x$  باشد، می توان گشتاور  $M$  را با دو

بار انتگرال گیری به دست آورد. یک گشتاور متمرکز با نیروی برشی متمرکز در روی تیر به ترتیب در نمودار گشتاور خمشی و نیروی برشی، یک تغییر عمودی در جهت اعمال شدن گشتاور با نیرو ایجاد می کند.

#### ۹-۴- سیستم های معادل بار گسترده:

سیستم های معادل بار گسترده مطابق شکل (۴-۱۴) توسط توسط بار و کوپل برآیند در  $O$  جایگذاری شده است.

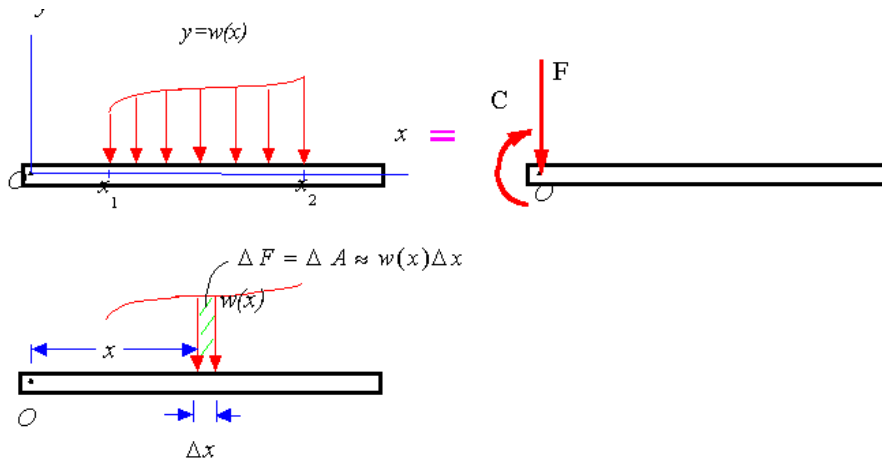
$$(+\downarrow) \sum F_y = F = \int_{x_1}^{x_2} dF = \int_{x_1}^{x_2} w(x)dx \quad (4-27)$$

$$(+CW) \sum M_o = C = \int_{x_1}^{x_2} x dF = \int_{x_1}^{x_2} xw(x)dx \quad (4-28)$$

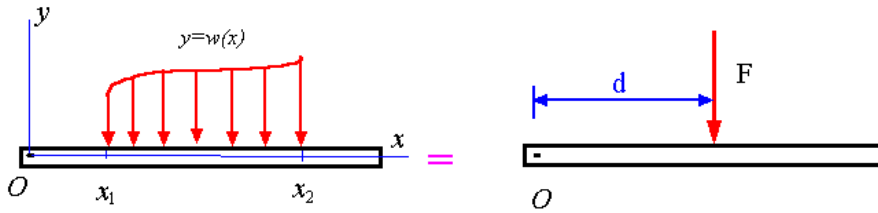
با توجه به شکل (۴-۱۵) و جایگذاری بار گسترده به وسیله یک نیروی منفرد معادلات زیر حاصل می شود.

$$(+\downarrow) \sum F_y = F = \int_{x_1}^{x_2} dF = \int_{x_1}^{x_2} w(x)dx = w(x) \quad \text{سطح زیر منحنی} \quad (4-29)$$

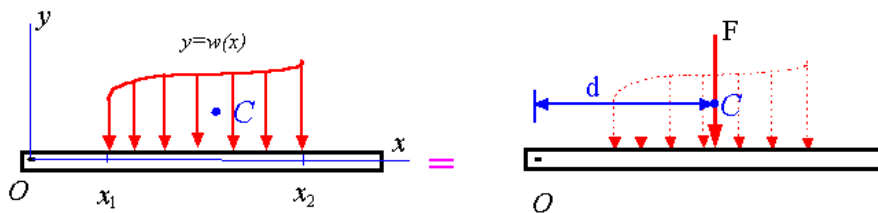
$$(+CW) \sum M_o = Fd = \int_{x_1}^{x_2} x dF = \int_{x_1}^{x_2} xw(x)dx \Rightarrow d = \frac{1}{F} \int_{x_1}^{x_2} xw(x)dx \quad (4-30)$$



شکل ۴-۱۴



شکل ۴-۱۵



شکل ۴-۱۶

از آنجایی که معادله برای  $d$  یعنی رابطه (۴-۳۰) مشابه رابطه مورد استفاده در تعیین مرکز سطح منحنی  $w(x)$  می باشد، بنابراین  $F$  بایستی از مرکز سطح منحنی نامبرده بگذرد. (شکل ۴-۱۶) پس محل عبور نیروی برآیند ناشی از بار گسترده به صورت زیر می باشد:

$$d = \frac{\int_{x_1}^{x_2} x dF}{F} = \frac{\int_{x_1}^{x_2} w x dx}{\int_{x_1}^{x_2} w dx} \quad (4-31)$$

لازم به ذکر است در بارهای گسترده مثلثی و مستطیلی مقدار بار متمرکز حاصل برابر مساحت زیر بار گسترده بوده و نقطه اثر آن به ترتیب در یک سوم از قاعده مثلث و وسط مستطیل می باشد. بار گسترده دوزنقه‌ای را نیز می توان به دو بار گسترده مثلثی و مستطیلی تقسیم نموده و بارهای متمرکز هر کدام از آنها را جایگزین نمود.

## ۴-۱۰- توابع استثنایی در تیرها

توابع استثنایی به عنوان شیوه ای جدید جهت ارائه نیروهای برشی و گشتاورهای خمشی مناسب هستند. اگر بارگذاری به طور پیوسته روی طول تغییر کند. اگر نیروها یا گشتاورهای متمرکز حاضر باشند، یک جفت معادله گشتاور خمشی و نیروی برشی بایستی برای هر ناحیه بین نیروهای متمرکز یا گشتاور نوشته شود. تابع استثنایی به فرم زیر نوشته می شود

$$f_n(x) = \langle x-a \rangle^n, \quad n \geq 0 \quad (4-32)$$

$$\langle x-a \rangle^n = \begin{cases} 0, & x < a \\ (x-a)^n, & x > a \end{cases} \quad (4-33)$$

این توابع در هر جایی جز در  $x = a$  محدود هستند. مطابق شکل برای کوپل وارد شده در جهت عقربه‌های ساعت در  $x = a$  به فرم  $\langle x-a \rangle^{-2}$  و نیروی متمرکز به سمت بالا اعمال شده در  $x = a$  نیز برابر  $\langle x-a \rangle^{-1}$  می باشد. برای بار گسترده اعمال شده، خطی و سهمی شکل در  $x = a$  نیز به ترتیب به صورت  $\langle x-a \rangle^0$  و  $\langle x-a \rangle^{+1}$  و  $\langle x-a \rangle^{+2}$  می باشد. این توابع محدود هستند به صورتی که:

$$\int_{-\infty}^x \langle x-a \rangle^{-2} dx = \langle x-a \rangle^{-1} \quad (4-34)$$

$$\int_{-\infty}^x \langle x-a \rangle^{-1} dx = \langle x-a \rangle^0 \quad (4-35)$$

تابع  $\langle x-a \rangle^{-1}$ ، بار متمرکز واحد یا تابع ضربه واحد می باشد. در کتاب‌های فیزیک به عنوان تابع دلتای دیراک نیز شناخته شده است. تابع  $\langle x-a \rangle^{-2}$  گشتاور متمرکز واحد یا تابع دابلت واحد نام دارد. شکل نوع بارگذاری توابع استثنایی در جدول (۴-۱) آمده است.

## ۴-۱۱- انواع تکیه‌گاهها در تیرها:

جهت تحلیل تیر و ترسیم نمودارهای نیروی برشی و گشتاور خمشی در مرحله اول بایستی عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهها محاسبه شوند، بنابراین شناخت انواع تکیه‌گاهها در تیرها ضروری است. جدول (۴-۲) انواع این تکیه‌گاهها را در تیرهای معین و نامعین از لحاظ استاتیکی نشان می دهد.

جدول ۴-۱

نوع بارگذاری	تابع استثنایی	شکل نوع بارگذاری
گشتاور متمرکز (تابع دابلت)	$w(x) = M_0 \langle x - a \rangle^{-2}$	
نیروی متمرکز (تابع ضربه یا دلتای دیراک)	$w(x) = F_0 \langle x - a \rangle^{-1}$	
بار گسترده یکنواخت (تابع پله‌ای)	$w(x) = w_0 \langle x - a \rangle^0$	
بار گسترده خطی	$w(x) = \frac{dw}{dx} \langle x - a \rangle^1$	
بار گسترده سهمی	$w(x) = \frac{C}{2} \langle x - a \rangle^2$	

## ۴-۱۱- رسم نمودار نیروی برشی و گشتاور خمشی در تیرهای مستقیم:

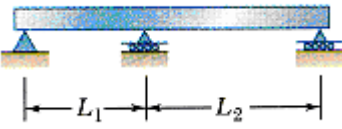

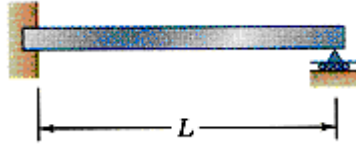
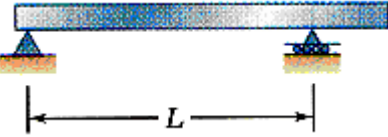
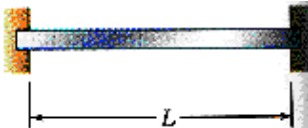
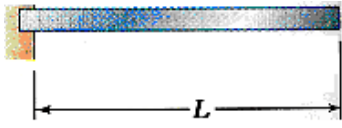
## ۴-۱۱-۱- نمودار نیروی برشی:

- ۱- در ابتدا لازم است کلیه واکنش‌ها تکیه‌گاهی محاسبه شوند.
- ۲- جهت مثبت بار به سمت بالا بوده (جهت مثبت  $y$  ها) انتخاب می‌شود. بنابراین بار رو به پایین منفی است.
- ۳- طبق رابطه  $\frac{dV}{dx} = q = -w$  شیب نمودار برشی در هر نقطه مساوی شدت بار وارده در آن نقطه است. اگر شدت بار مثبت (رو به بالا) باشد، نمودار برش صعودی و اگر شدت بار منفی (رو به پایین باشد)، نمودار برشی نزولی است و اگر شدت بار وارده صفر باشد، نمودار برشی به صورت افقی در می‌آید.



- ۴- تغییرات نیروی برشی بین دو مقطع از طول تیر مساوی مقدار بار وارده (با در نظر گرفتن علامت) بین آن دو مقطع می باشد.
- ۵- جایی که بار متمرکز اعمال شده نسبت به محور تیر قائم یا عرضی، یک پله در دیاگرام نیروهای برشی اتفاق می افتد که مساوی اندازه نیروی برشی می باشد.
- ۶- بین نقاط بار اعمال شده، نیروی برشی ثابت است.
- ۷- در نواحی از تیر که در معرض یک بار گسترده یکنواخت قرار دارد. دیاگرام نیروی برشی، خطی است.
- ۸- در نواحی از تیر که در معرض یک بار گسترده خطی قرار دارد. دیاگرام نیروی برشی سهمی شکل است.
- ۹- نقاط واقع بر دیاگرام نیروی برشی که در آن نیروی برشی صفر است، متناظر با نقاطی است که گشتاور خمشی حداقل یا حداکثر است.

## جدول ۲-۴

انواع تکیه‌گاهها در تیرهایی که از لحاظ استاتیکی معین و نامعین هستند.	
 <p>تیر نامعین پیوسته</p>	 <p>تیر معین بر روی تکیه‌گاههای ساده</p>
 <p>تیر نامعین یک سر گیردار و یک سر ساده (غلتکی)</p>	 <p>تیر معین بر روی تکیه‌گاههای ساده و یک سر آزاد</p>
 <p>تیر نامعین دو سر گیردار</p>	 <p>تیر معین یک سر گیردار (تیر طره)</p>

## ۲-۱۱-۴- نمودار گشتاور خمشی:

- ۱- بین نقاط اعمال بار عرضی، دیاگرام گشتاور خمشی خطی است.
- ۲- در نواحی از تیر که در معرض بار گسترده یکنواخت قرار دارد، دیاگرام گشتاور خمشی سهمی است.
- ۳- در نواحی از تیر که در معرض تغییرات بار به طور خطی قرار دارد، دیاگرام گشتاور خمشی درجه سوم می باشد.
- ۴- در نقاطی که بارهای عرضی متمرکز به تیر اعمال می شود، جهت دیاگرام گشتاور خمشی عوض می شود. (چرخشی)
- ۵- در نقطه ای که یک کوپل اعمال شده استاتیک پله (برشی) در دیاگرام گشتاور خمشی اتفاق می افتد که اندازه اش مساوی کوپل اعمال شده می باشد.
- ۶- دیاگرام گشتاور خمشی در نقاطی که نیروی برشی صفر است به مقدار حداقل یا حداکثر خود می رسد.
- ۷- طبق رابطه  $V = \frac{dM}{dx}$ ، شیب نمودار گشتاور خمشی در هر نقطه برابر نیروی برشی در آن نقطه است اگر نیروی برشی مثبت باشد، نمودار لنگر صعودی و اگر نیروی برشی منفی باشد، نمودار گشتاور نزولی است. اگر نیروی برشی صفر باشد، شیب نمودار لنگر افقی است. یا به عبارت دیگر می توان گفت اگر شیب نمودار برشی مثبت باشد، تقعر نمودار خمشی به سمت بالا و اگر شیب نمودار برشی منفی باشد تقعر نمودار برشی به سمت پایین است.
- ۸- تغییرات گشتاور خمشی بین دو مقطع از طول تیر برابر است با سطح زیر نمودار برشی بین آن دو مقطع است.
- ۹- بار متمرکز یک پله در نمودار نیروی برشی و گشتاور متمرکز یک پله در نمودار گشتاور خمشی ایجاد می کند.

## ۱۲-۴- کابل ها:

کابل‌های انعطاف‌پذیر از اعضای مهم سازه‌ها به شمار می روند و در پل‌های معلق، خطوط انتقال برق، خطوط تلفن، تله کابین و بسیاری کاربرد های دیگر مورد استفاده قرار می‌گیرد. در طراحی اینگونه سازه‌ها لازم است که روابط کشش کابل، دهانه، مقدار افت و طول کابل معلوم باشد. در طراحی کابل به عنوان یک جسم در حالت تعادل تعیین می شود. در طراحی کابل‌های انعطاف پذیر فرض می شود که هر گونه مقاومت کابل در مقابل خمش، ناچیز بوده و قابل چشم پوشی می باشد و نیروی موجود در کابل همواره در امتداد کابل است.

در فرمول ها دو نوع کابل بررسی می شود.

۱- کابل هایی که بارشان به صورت تابعی از مختصه  $x$  در راستای افق معلوم باشد.

۲- کابل هایی که وزن دارند، یعنی بار آنها تابعی از طول کابل است

توجه شود که در هر مورد با استفاده از معادله تعادل  $\sum F_x = 0$  می توان نوشت.

$$d(T\cos\theta) = 0 \Rightarrow T\cos\theta = T_0 = cte \quad (4-36)$$

$$d(T\sin\theta) = w dx \Rightarrow \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right) = \frac{w}{T_0} \Rightarrow \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{w}{T_0} \quad (4-37)$$

#### ۱-۱۲-۴- کابل های تحت تاثیر بارهای متمرکز:

کابل انعطاف پذیری که تحت تاثیر یک سیستم از بارهای متمرکز قرار دارد. مطابق شکل (۱۷-۴-الف) کابلی که در معرض بارهای متمرکز  $P_1, P_2, P_3$  قرار دارد را در نظر بگیرید. این کابل در دو انتهای  $A, B$  دارای اتصال مفصلی (پینی) است. اگر این بارها را بزرگتر از وزن کابل فرض کنید، از وزن کابل می توان صرف نظر کرده و قطعات کابل را به صورت میله های دو نیرویی مستقیم در نظر گرفت. همچنین فرض می شود که بارهای متمرکز  $P_1, P_2, P_3$  و فاصله های  $x_1, x_2, x_3$  و دهانه  $a$  معلوم هستند و فاصله های  $y_1, y_2, y_3$  مجهول هستند. دیاگرام آزاد کابل در شکل (۴-۱۷-ب) نشان داده شده است. چون  $y_1, y_2, y_3$  مجهول هستند، بنابراین شیب قطعه های کابل در دوسر  $A, B$  مجهول است و عکس العمل در  $A, B$  نیز هر کدام دارای دو مولفه در راستای  $x, y$  هستند و چون چهار مجهول وجود دارد، سه معادله تعادل جهت بدست آوردن واکنش های  $A, B$  کافی نیستند. حال معادلات تعادل را به صورت زیر می توان نوشت.

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow B_y L - P_1 x_1 - P_2 x_2 - P_3 x_3 = 0 \quad (4-38)$$

$$\Rightarrow B_y = \frac{1}{L} (P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow A_y + B_y - P_1 - P_2 - P_3 = 0 \quad (4-39)$$

$$\Rightarrow A_y = P_1 + P_2 + P_3 - B_y = P_1 + P_2 + P_3 - \frac{1}{L} (P_1 x_1 + P_2 x_2 + P_3 x_3)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow +B_x + A_x = 0 \Rightarrow B_x = -A_x \quad (4-40)$$

برای کابل فوق با توجه به صرف نظر کردن از وزن آن نیرو های داخلی در قسمت های مختلف این کابل را می توان به صورت شکل (۴-۱۷-ج) نشان داد با توجه به دیاگرام آزاد معادله

تعادلی  $\sum F_x = 0$  مشاهده می شود که

$$-A_x = T_1 \cos \theta_1 = T_2 \cos \theta_2 = T_3 \cos \theta_3 = T_4 \cos \theta_4 = B \quad (4-41)$$

معادله اخیر بیانگر ثابت بودن مولفه افقی نیروی کشش در هر نقطه از کابل بوده و برابر با مولفه افقی عکس‌العمل بین در تکیه‌گاهها می باشد. بیشترین کشش  $T$  مربوط به قطعه‌ای است که دارای بزرگترین شیب  $\theta$  می باشد. زیرا  $\cos \theta$  در این فاصله حداقل است. چنین قطعه‌ای باید در نزدیکی یکی از دو تکیه‌گاه باشد. با در نظر گرفتن معادلات تعادل

$$\sum F_x = 0 \text{ و } \sum F_y = 0 \text{ برای پین های } A, B \text{ می توان نوشت:}$$

$$A_y = -T_1 \sin \theta_1, \quad A_x = T_1 \cos \theta_1 \quad (4-42)$$

$$B_y = T_4 \cos \theta_4, \quad B_x = T_3 \cos \theta_3 \quad (4-43)$$

$$T_4 = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}, \quad T_1 = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \quad (4-44)$$

$$\theta_4 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{B_y}{B_x}, \quad \theta_1 = \operatorname{tg}^{-1} \frac{A_y}{A_x} \quad (4-45)$$

اگر در مسئله‌ای بیشترین کشش و یا بیشترین شیب داده شده باشد، با توجه به روابط می توان مولفه‌های افقی عکس‌العمل تکیه‌گاهی را بدست آورد. با معلوم بودن  $A_x, B_x$ ، بقیه مجهولات را می توان از دیاگرام آزاد شکل (۴-۱۷-ج) بدست آورد. همچنین با دانستن فاصله عمودی بین هر نقطه در راستای تیر و یک تکیه‌گاه می توان مولفه‌های مجهول مربوط به عکس‌العمل‌های تکیه‌گاهی را محاسبه نمود. برای مثل دیاگرام آزاد شکل (۴-۱۷-د) را در نظر بگیرید که در آن  $y_D$  معلوم فرض شده است. از معادله تعادل  $\sum M_D = 0$  می توان نوشت:

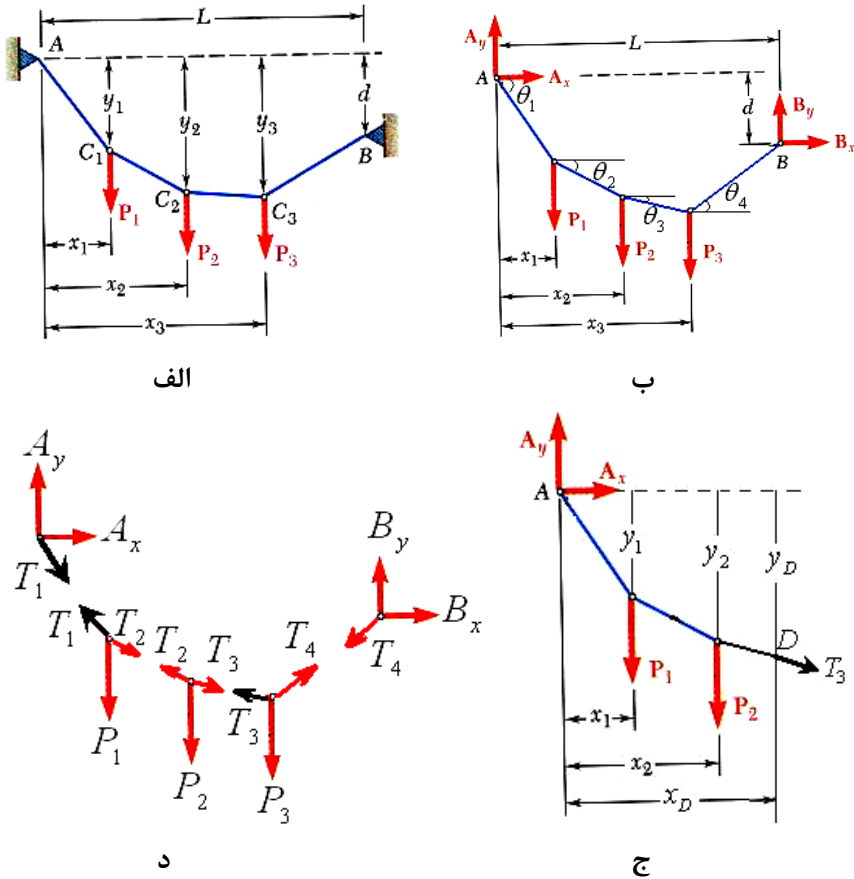
$$A_y x_D + P_1(x_D - x_1) + P_2(x_D - x_2) + A_x y_D = 0 \quad (4-46)$$

$$A_x = -\frac{1}{y_D} [A_y x_D + P_1(x_D - x_1) + P_2(x_D - x_2)]$$

و سرانجام با مشخص کردن طول کابل می توان مسائلی از این نوع را حل نمود. در این مورد، طول هر قطعه‌ای از کابل بر حسب فاصله‌های عمودی  $y_1, y_2, y_3$  و فاصله‌های افقی  $x_1, x_2, x_3$  و دهانه  $L$  نوشته می شود. طول کابل  $L'$  به صورت زیر بدست می آید.

$$L' = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (4-47)$$

$$+ \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2} + \sqrt{(L - x_3)^2 + (y_3)^2}$$



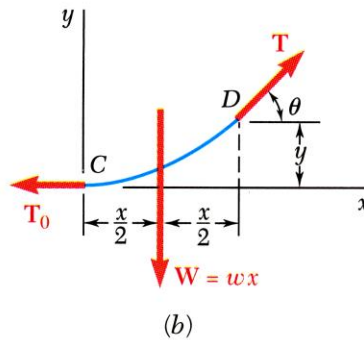
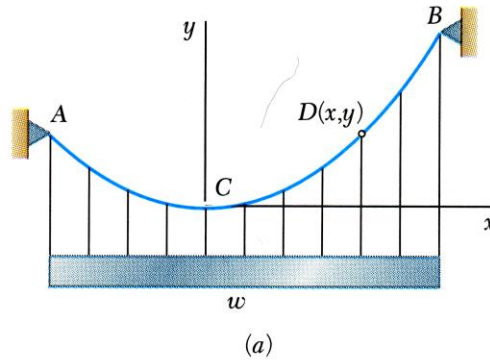
شکل ۴-۱۷- کابل انعطاف‌پذیری که تحت تاثیر سیستمی از نیروهای متمرکز قرار دارد.

۲-۱۲-۴- بار گسترده در امتداد سطح افق (کابل سهمی):

وقتی شدت بارگذاری  $w$  ثابت باشد، شکل کابل‌ها بر اثر بار یکنواخت سهمی است و معادله کلی آن عبارتست از: (شکل ۴-۱۸)

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{w}{T_0} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{wx}{T_0} + C_1 \Rightarrow y = \frac{\omega x^2}{2T_0} + C_1 x + C_2 \quad (۴-۴۸)$$

معادله کابل در این حالت، یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم می باشد که جواب آن به راحتی پس از دو بار انتگرال‌گیری حاصل می‌گردد.



شکل ۴-۱۸

در مرکز دستگاه مختصات انتخاب شده، با توجه به شکل در  $x=0$  ,  $y=0$  شیب منحنی برابر صفر است. بنابراین به راحتی می توان ضرایب ثابت را تعیین نمود.

$$\left( x=0, y=0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 0 \right) \Rightarrow C_1 = C_2 = 0 \Rightarrow y = \frac{\omega x^2}{2T_0} \quad (4-49)$$

از موارد مهم در این حالت می توان به نکات زیر اشاره نمود.

۱- اگر افت کابل در نقطه  $C$  مساوی  $h$  فرض شود می توان نوشت:

$$x = \frac{L}{2}, \quad y = h \Rightarrow T_0 = \frac{\omega L^2}{8h} \Rightarrow y = \frac{4h}{L^2} x^2 \quad (4-50)$$

۲- نیروی کشش در کابل عبارتست از:

$$T \sin \theta = \omega x \quad , \quad T \cos \theta = T_0 \quad (4-51)$$

در نتیجه:

$$(T \sin \theta)^2 + (T \cos \theta)^2 = T_0^2 + \omega^2 x^2 \Rightarrow T = \sqrt{T_0^2 + (\omega x)^2} \quad (4-52)$$

۳- ماکزیمم نیروی کششی عبارتست از:

$$x = \frac{L}{2} \Rightarrow T_{\max} = \sqrt{T_0^2 + \frac{\omega^2 L^2}{4}} \quad (۴-۵۳)$$

۴- طول کابل از مبدا مختصات تا نقطه  $B$  برابر است با:

$$S = \int_0^{l_A} \sqrt{1+(y')^2} dx = \int_0^{l_A} \sqrt{1+\left(\frac{\omega x}{T_0}\right)^2} dx = \int_0^{l_A} \left[1+\left(\frac{\omega x}{T_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx \quad (۴-۵۴)$$

۵- در صورتی که  $\frac{h}{L} < \frac{1}{4}$  باشد، ابتدا با استفاده از بسط دو جمله‌ای نیوتن عبارت  $I$  را

نوشته و سپس انتگرال گرفته می‌شود و از توان‌های بالای  $\frac{h}{L}$  صرف نظر کرده و به صورت تقریبی طول کابل را می‌توان محاسبه نمود. طول کابل عبارتست از:

$$I = \left[1+\left(\frac{\omega x}{T_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (۴-۵۵)$$

$$S = \int_0^{l_A} \left[1+\left(\frac{\omega x}{T_0}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx = \int_0^{l_A} \left[1+\frac{\omega^2 x^2}{2T_0^2} - \frac{\omega^4 x^4}{8T_0^4} + \dots\right] dx \quad (۴-۵۶)$$

$$= l_A \left[1+\frac{2}{3}\left(\frac{h_A}{l_A}\right)^2 - \frac{2}{5}\left(\frac{h_A}{l_A}\right)^4 + \dots\right]$$

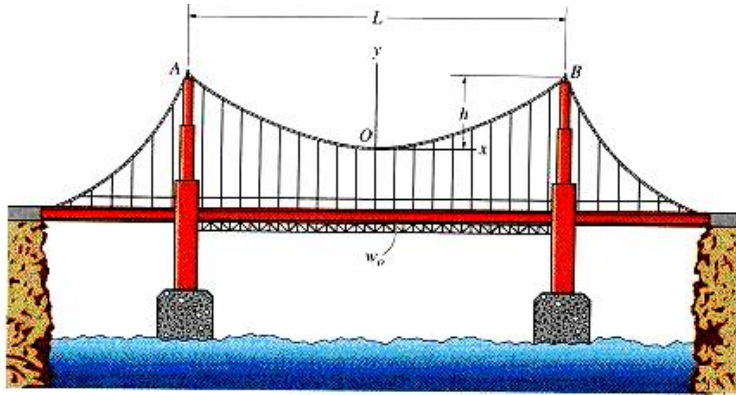
سری اخیر به ازای  $\frac{h_A}{l_A} < \frac{1}{2}$  همگرا می‌باشد، که در مورد بیشتر کابل‌ها درست است. برای

پل معلق مطابق شکل (۴-۱۹)، طول کل دهنه آن  $L = 2l_A$  و افت کابل  $h = h_A$  و طول کل کابل  $S = 2s_A$  با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه (۴-۵۵)، حداکثر کشش و طول کل کابل به فرم زیر نتیجه می‌شود.

$$T_{\max} = \frac{wL}{2} \sqrt{1+\left(\frac{L}{4h}\right)^2} \quad (۴-۵۷)$$

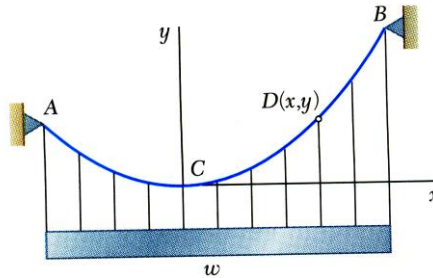
$$S = L \left[1+\frac{8}{3}\left(\frac{h}{L}\right)^2 - \frac{32}{5}\left(\frac{h}{L}\right)^4 + \dots\right] \quad (۴-۵۸)$$

سری اخیر به ازای  $\frac{h}{L} < \frac{1}{4}$  همگرا می‌باشد، که در مورد بیشتر کابل‌ها درست است.



شکل ۴-۱۹

۶- در صورتی که دو تکیه‌گاه هم‌تراز نباشند، کابل متقارن نبوده و مرکز مختصات  $x, y$  یعنی نقطه  $O$  که همواره در نقطه حداقل کابل قرار دارد، در وسط دهانه قرار نخواهد گرفت. لذا برای پیدا کردن طول کافی است یک بار از  $O$  تا  $x$  تکیه‌گاه راست و بار دیگر از  $O$  تا  $x$  تکیه‌گاه چپ طول‌ها را محاسبه کرده و سپس با هم جمع کرد. ( $A, B$  نقطه‌های چپ و راست نقطه  $O$  می‌باشند). (شکل ۴-۲۰)



شکل ۴-۲۰

مطابق روش قبل عمل نموده و سرانجام طول کابل به صورت زیر به دست می‌آید.

$$S_A = x_A \left( 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{y_A}{x_A} \right)^2 - \frac{2}{5} \left( \frac{y_A}{x_A} \right)^4 + \dots \right) \quad (۴-۵۹)$$

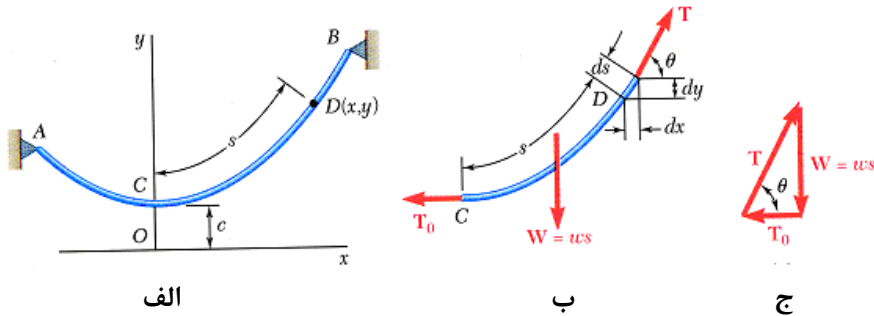
$$S_B = x_B \left( 1 + \frac{2}{3} \left( \frac{x_A}{y_A} \right)^2 - \frac{2}{5} \left( \frac{x_A}{y_A} \right)^4 + \dots \right) \quad (۴-۶۰)$$



$$S = S_A + S_B \quad (۴-۶۱)$$

۳-۱۲-۴- کابل های تحت بار گسترده وزن (کابل با منحنی زنجیری):

مطابق شکل (۴-۲۱) وقتی کابلی تحت بار گسترده در امتداد مسیر (مثل وزن کابل) قرار گرفته باشد، معادله کلی آن عبارت است از: (وزن واحد طول کابل  $\omega$  و برآیند وزن برابر با  $R = \omega S$  است).



شکل ۴-۲۱

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\omega}{T_0} \frac{ds}{dx}, \quad ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \Rightarrow \frac{dy'}{dx} = \frac{\omega}{T_0} \sqrt{1 + (y')^2} \quad (۴-۶۲)$$

معادله رابطه (۴-۶۱) یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم می باشد که از روش کاهش مرتبه برای حل آن می توان استفاده نمود. پس با جایگذاری  $y' = P$  رابطه زیر نتیجه می شود.

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dx} &= \frac{\omega}{T_0} \sqrt{1 + P^2} \Rightarrow \int \frac{dP}{\sqrt{1 + P^2}} = \int \frac{\omega}{T_0} dx \\ \Rightarrow \ln(P + \sqrt{1 + P^2}) &= \frac{\omega}{T_0} x + C \end{aligned}$$

انتگرال بالا با استفاده از جدول انتگرال محاسبه شده است، با روش جانشینی مثلثاتی و تغییر متغیر  $P = \tan \theta$  نیز می توان به همین نتیجه رسید. چون در  $x = 0$  شیب منحنی برابر با صفر می باشد، بنابراین به راحتی  $y' = P = 0$  حاصل می شود. پس:

$$\ln(P + \sqrt{1 + P^2}) = \frac{\omega}{T_0} x \Rightarrow P + \sqrt{1 + P^2} = e^{\frac{\omega}{T_0} x}$$

$$\Rightarrow P = \frac{e^{\frac{2\omega}{T_0} x} - 1}{2e^{\frac{\omega}{T_0} x}} = \frac{e^{\frac{\omega}{T_0} x} - e^{-\frac{\omega}{T_0} x}}{2} = \text{Sinh} \frac{\omega}{T_0} x \Rightarrow y = \frac{T_0}{\omega} \text{Cosh} \frac{\omega}{T_0} x + C$$

و نقطه مرزی (0,0) در معادله کابل زنجیره‌ای که تنها تحت تاثیر وزن خود می باشد، صدق

$$C = -\frac{T_0}{\omega} \text{ کرده و مقدار ثابت به صورت زیر حاصل می شود.}$$

$$y = \frac{T_0}{\omega} \left( \text{Cosh} \left( \frac{\omega x}{T_0} \right) - 1 \right) \quad (4-63)$$

همچنین مقدار افت یا شکم دادگی حداکثر برابر است با:

$$\left( x = \frac{L}{2}, y = h \right) \Rightarrow y = h = \frac{T_0}{\omega} \left( \text{Cosh} \left( \frac{\omega L}{2T_0} \right) - 1 \right) \quad (4-64)$$

طول کابل و نیروی کشش در کابل را می توان به صورت زیر به دست آورد. با توجه به شکل

$$(4-21) \text{ ب و ج) ملاحظه می شود که } P = \frac{dy}{dx} = \text{tg} \theta = \frac{\omega s}{T_0} = \text{Sinh} \frac{\omega x}{T_0} \text{، بنابراین}$$

عبارت زیر را می توان نتیجه گرفت.

$$S = \frac{T_0}{\omega} \text{Sinh} \left( \frac{\omega x}{T_0} \right) \quad (4-65)$$

با استفاده از مثلث تعادل در شکل (4-21-ج) رابطه زیر نتیجه می شود. بنابراین:

$$T^2 = T_0^2 + (\omega s)^2 \quad (4-66)$$

از ترکیب رابطه‌های (4-63) و (4-64) رابطه زیر را می توان به دست آورد.

$$T^2 = T_0^2 + (\omega s)^2 = T_0^2 + \omega^2 \left( \frac{T_0}{\omega} \right)^2 \text{Sinh}^2 \left( \frac{\omega x}{T_0} \right) = T_0^2 \left[ 1 + \text{Sinh}^2 \left( \frac{\omega x}{T_0} \right) \right]$$

$$\Rightarrow T = T_0 \text{Cosh} \left( \frac{\omega x}{T_0} \right)$$

(4-67)

## ۱۳-۴- استاتیک سیالات:

مایعات شکل هندسی خاصی را به خود نگرفته و تحت اثر نیروی برشی هر چند کوچک تغییر شکل می دهند. مایعات تحت اثر تنش برشی جاری شده و شکل ظرفی را که در آن جای دارند، به خود می گیرند، ولی سطح بالایی و آزاد آنها همواره افقی می باشد. اگر مایعی در حال سکون باشد هیچگونه تنش برشی نمی تواند در آن موجود باشد و تمام نیروهای وارده از طرف ظرف به قسمت‌هایی از مایع که با ظرف در تماس است، به صورت عمودی می باشند. فشار وارد شده به وسیله یک مایع در حال سکون بستگی به ارتفاع مایع دارد. منظور از ارتفاع مایع، ارتفاع عمودی نقطه مورد نظر تا سطح آزاد مایع می باشد. جرم مخصوص  $\rho$  عبارتست از جرم واحد حجم آن، اگر  $m$  جرم ماده و  $V$  حجم آن باشد، آنگاه جرم مخصوص این ماده که واحد آن در سیستم متریک  $Kg / m^3$  می باشد. عبارتست از:

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (۴-۶۸)$$

## ۱-۱۳-۴- جرم مخصوص نسبی:

غالب اوقات جرم مخصوص یک ماده با جرم مخصوص آب در همان واحد مقایسه می شود. نسبت این دو، جرم مخصوص نسبی یا چگالی جسم نامیده می شود و با حرف  $d$  مشخص می گردد. با توجه به رابطه پیداست که جرم مخصوص تنها یک عدد بوده و هیچ واحدی ندارد. جرم مخصوص نسبی یک جسم از لحاظ عددی برابر است با جرم مخصوص همین جسم در یکی از واحد های ذکر شده و امروزه اصطلاح چگالی یا سنگینی نسبی به همان جرم مخصوص نسبی معروف است. در جدول (۳-۴) مقادیر تقریبی جرم مخصوص نسبی چند جسم معروف بیان شده است.

جدول ۳-۴ (جرم مخصوص نسبی  $d$ )

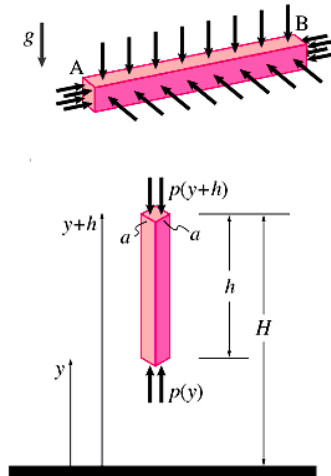
جسم	$d$	جسم	$d$	جسم	$d$	جسم	$d$
بنزین	۰/۷۲	روغن های مخصوص	۰/۹	چدن خاکستری	۷/۲	مس	۸/۹
پارافین	۰/۸	آب	۱	آهن چکش خوار و سفت	۷/۶	سرب	۱۱/۴
الکل	۰/۸	آلومینیوم	۲/۷	فولاد	۷/۸	جیوه	۱۳/۶
بنزول	۰/۸۸	روی	۷/۱	برنج	۸/۴		

## ۲-۱۳-۴- فشار هیدرواستاتیک:

وقتی که جسمی در یک مایع غوطه‌ور می‌گردد، تحت فشار همه جانبه از طرف مایع قرار می‌گیرد. این فشار به فشار هیدرواستاتیک یا فشار مایع معروف است و علت آن وزن مایع موجود در بالای نقطه مورد نظر است. (شکل ۴-۲۲)

$$P = P_0 + \rho gh = P_0 + \gamma h \quad (4-69)$$

در رابطه فوق  $P_0$  فشار جو در سطح مایع ( پاسکال )،  $\rho$  جرم مخصوص  $\left(\frac{kg}{m^3}\right)$  و  $\gamma$  وزن مخصوص  $\left(\frac{N}{m^3}\right)$  می باشد. عبارت  $P - P_0 = \gamma h$  را نیز فشار گیج می‌نامند.



شکل ۴-۲۲

برای تحلیل بسیاری از مسائل مهندسی که شامل نیروهای سیال است، لازم است نیروی برآیند  $R$  که مربوط به فشار توزیع شده بر روی سطح غوطه‌ور است و همچنین محل تقاطع خط اثر نیروی برآیند با صفحه غوطه‌ور تعیین شود، نقطه  $\bar{y}$  روی صفحه غوطه‌ور یعنی جایی که خط اثر نیروی برآیند صفحه غوطه‌ور را قطع می‌کند، به عنوان مرکز فشار شناخته می‌شود. مرکز فشار از رابطه زیر بدست می‌آید.

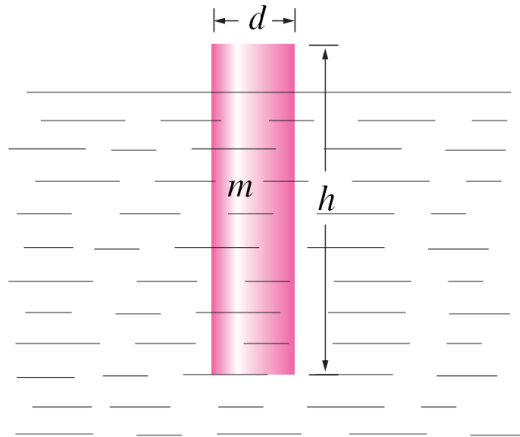
$$\bar{y} = \frac{\int y(Px dy)}{\int Px dy} \quad (4-70)$$

نیروی شناوری: نیرویی است که از طرف سیال بر جسم غوطه‌ور در سیال اعمال می‌شود که این نیرو برابر وزن مایع جا به جا شده توسط جسم است. این نیرو بر اساس اصل شناوری ارشمیدس برای هر نوع سیالی که در حالت تعادل قرار دارد، می‌تواند در نظر گرفته شود. (حجم جسم،  $\gamma$  وزن جسمی سیال)

$$F = \gamma V \quad (4-71)$$

۳-۱۳-۴- استوانه شناور بر روی آب:

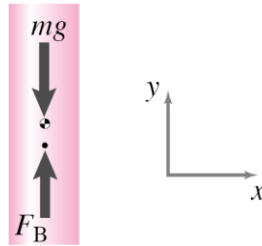
در این قسمت، استوانه جامدی به جرم  $m$ ، قطر  $d$  و ارتفاع  $h$  را با چگالی  $\rho$  در نظر بگیرید. با فرض اینکه استوانه به طور قائم شناور باشد، هدف یافتن ارتفاع شناوری استوانه می‌باشد، و همچنین یافتن بخشی از آن می‌باشد که به طور طولی (محور طولی آن موازی با سطح آب است) در آب غوطه‌ور است. (۴-۲۳)



شکل ۴-۲۳

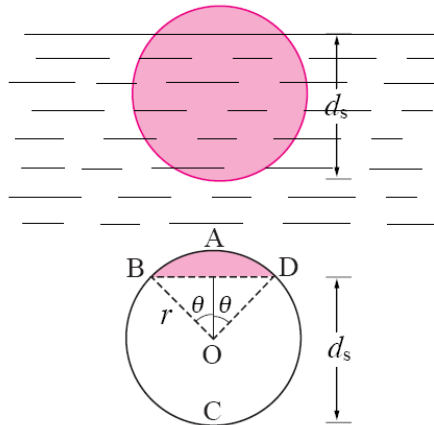
استوانه به طور قائم شناور است، فرض کنید  $h_s$  ارتفاع غوطه‌وری استوانه بوده و  $r = \frac{d}{2}$  شعاع آن باشد. نیروی شناوری  $\vec{F}_B$  مساوی وزن آب جابجا شده با حجم غوطه‌ور شده استوانه می‌باشد. بنابراین  $\vec{F}_B = \pi r^2 h_s \gamma \vec{j}$ ، از بالانس نیرویی استوانه (دیگرام آزاد جسم در شکل ۴-۲۴) می‌توان نوشت:

$$\vec{F}_B - mg\vec{j} = \vec{0} \Rightarrow (\pi r^2 h_s \gamma - mg)\vec{j} = \vec{0} \Rightarrow h_s = \frac{mg}{\pi r^2 \gamma} = \frac{m}{\pi r^2 \rho} \quad (4-72)$$



شکل ۴-۲۴

در قسمت دیگر، استوانه به طور افقی شناور است، مهم نیست که استوانه چگونه شناور شده است. نیروی شناوری بایستی مساوی وزن استوانه باشد. این نیرو مساوی با وزن آب جابجا شده می باشد. بنابراین حجم غوطه‌ور شده استوانه به دلیل شناور بودن استوانه به طور افقی بایستی مساوی حجم غوطه‌وری باشد، که در شناوری به طور قائم قرار دارد. (شکل ۴-۲۵)



شکل ۴-۲۵

$$S_{BCD} \cdot h = \pi r^2 \cdot h_s \Rightarrow S_{BCD} = \pi r^2 \cdot \frac{h_s}{h} \quad S_{BCD} = \pi r^2 - S_{ABD} \quad (۴-۷۳)$$

$$\Rightarrow S_{ABD} = \pi r^2 - S_{BCD} = \pi r^2 - \pi r^2 \cdot \frac{h_s}{h} = \pi r^2 \left[ 1 - \frac{h_s}{h} \right]$$

$$S_{ABD} = S_{OBAD} - S_{OBD} = r^2 \theta - \frac{1}{2} (r \cos \theta) (2r \sin \theta) \quad (۴-۷۴)$$

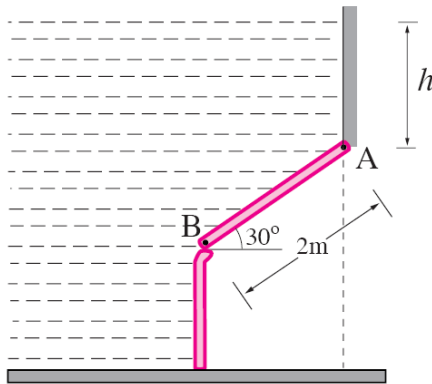
$$\Rightarrow \pi r^2 \left[ 1 - \frac{h_s}{h} \right] = r^2 \theta - r^2 \cdot \sin \theta \cdot \cos \theta \quad (۴-۷۵)$$

معادله حاصل یک معادله غیر خطی بر حسب زاویه  $\theta$  می باشد که از این معادله می توان  $\theta$  را به دست آورد. همچنین عمق غوطه وری در حالت افقی برابر است با:

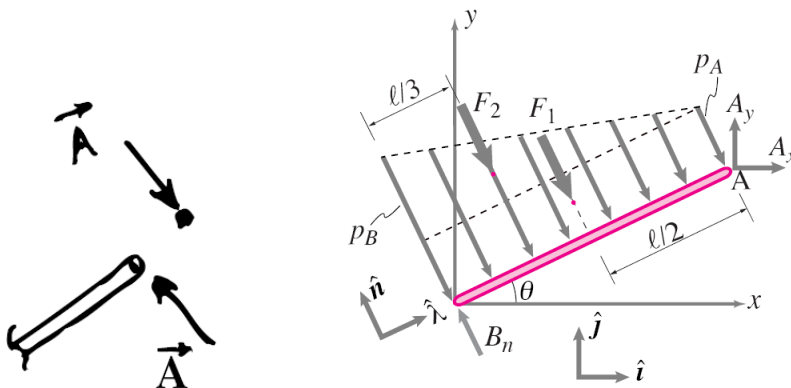
$$d_s = r(1 + \cos \theta) \quad (4-76)$$

۴-۱۳-۴- نیروی هیدرواستاتیک وارد بر دریچه یک سد:

در این بخش، مطابق شکل (۴-۲۶) ورق مستطیلی را که به عنوان دریچه نگهدارنده از خروج آب به سمت خارج جلوگیری می کند، در نظر بگیرید. این دریچه در نقطه  $A$  به صورت مفصلی و در نقطه  $B$  به صورت سطح بدون اصطکاک است، پهنای ورق  $1m$  و ارتفاع سطح آب تا نقطه  $A$  برابر  $h$  است، وزن ورق نیز ناچیز می باشد. هدف یافتن نیروها در مفصل  $A$  به صورت تابعی از  $h$  می باشد.



شکل ۴-۲۶



شکل ۴-۲۸

شکل ۴-۲۷

فرض می شود،  $\gamma = \rho g$  چگالی وزنی (وزن بر واحد حجم) آب باشد. آنگاه فشار به واسطه آب در نقطه  $A$  برابر  $p_A = \gamma h$  و در نقطه  $B$  مساوی  $p_B = \gamma(h + l \sin \theta)$  می باشد. فشار، عمود بر ورق عمل کرده و به صورت خطی از  $p_A$  در  $A$  تا  $p_B$  در  $B$  تغییر می کند. دیاگرام آزاد جسم برای ورق در شکل (۴-۲۷) نشان داده شده است. همچنین فرض می شود که  $\hat{\lambda}$  بردار یکه در راستای  $BA$  و  $\hat{n}$  بردار یکه قائم بر  $BA$  باشد، برای محاسبه نیروهای عکس العمل بر روی ورق در نقاط  $A$  و  $B$ ، ابتدا فشار گسترده بر روی ورق به وسیله دو نیروی متمرکز  $F_1, F_2$  با تقسیم فشار گسترده به نواحی مستطیلی و مثلثی و یافتن برآیند آنها جایگزین می گردد.

$$F_1 = \rho_A l = \gamma h l \quad , \quad F_2 = (p_B - p_A) \frac{l}{2} = \frac{1}{2} \gamma^2 \sin \theta \quad (۴-۷۷)$$

حال تعادل گشتاوری حول نقطه  $A$  را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \sum \vec{M}_A = \vec{0} &\Rightarrow \vec{r}_{B/A} \times \vec{B} + \vec{r}_{D/A} \times \vec{F}_2 + \vec{r}_{C/A} \times \vec{F}_1 = \vec{0} \\ &\Rightarrow -l \hat{\lambda} \times B_n \hat{n} - \frac{2l}{3} \hat{\lambda} \times [-(F_1 \hat{n})] - \frac{l}{2} \hat{\lambda} \times [-(F_2 \hat{n})] = \vec{0} \\ &\Rightarrow -B_n l \hat{k} + \frac{2l}{3} F_1 \hat{k} + \frac{l}{2} F_2 \hat{k} = \vec{0} \Rightarrow B_n = \frac{2F_1}{3} + \frac{F_2}{2} = \gamma \left[ \frac{2}{3} h + \frac{l}{4} \sin \theta \right] \end{aligned} \quad (۴-۷۸)$$

از بالانس نیرویی نیز می توان به صورت زیر نیروی مورد نظر را محاسبه نمود.

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} = \vec{0} &\Rightarrow \vec{A} = -B_n \hat{n} + F_1 \hat{n} + F_2 \hat{n} \\ &= \left[ -\gamma \left( \frac{2}{3} h + \frac{l}{4} \sin \theta \right) + \gamma h l + \frac{1}{2} \gamma^2 \sin \theta \right] \cdot \hat{n} \\ &= \left( \frac{1}{3} \gamma h l + \frac{1}{2} \gamma^2 \sin \theta \right) \cdot \hat{n} = \gamma \left[ \frac{1}{3} h + \frac{1}{2} l \sin \theta \right] \cdot \hat{n} \end{aligned} \quad (۴-۷۹)$$

نیروی  $\vec{A}$  که در بالا محاسبه گردید، نیروی اعمالی توسط مفصل در  $A$  بر روی ورق می باشد، بنابراین، نیروی مفصلی، که توسط ورق اعمال می شود، (شکل ۴-۲۸) برابر  $-\vec{A}$  می باشد. از عبارت داده شده برای این نیرو، مشاهده می شود که نیروی نامبرده با  $h$  به



صورت خطی تغییر می کند. با فرض اینکه نیروی مفصلی کششی در راستای قائم با  $A_y$  نشان داده شود، آنگاه مقدار اسکالر آن برابر است با:

$$A_y = -\vec{A} \cdot \vec{j} = -\gamma \left[ \frac{1}{3} h + \frac{1}{2} l \sin \theta \right] \underbrace{\hat{n} \cdot \vec{j}}_{\cos \theta} = \frac{1}{4} \gamma \sin 2\theta + \left( \frac{1}{3} \gamma \cos \theta \right) h \quad (4-80)$$

#### ۵-۱۳-۴- کشش حلقه:

اگر حلقه‌ای به شعاع داخلی  $a$  و به ضخامت کم تحت تاثیر فشار هیدرواستاتیک داخلی با شدت ثابت  $q$  قرار گیرد. (شکل ۴-۲۹-الف) یک تنش محیطی به نام کشش در حلقه ایجاد می‌شود. برای تعیین این کشش، ابتدا تعادل نصف حلقه را مطابق شکل (۴-۲۹-ب) مجزا شده در نظر گرفته می‌شود. هر یک از نیروهای  $S$  وارد در نقاط  $A, B$  کشش مورد نظر را نشان می‌دهند که در تمام نقاط محیط حلقه یکسان هستند.

برای اینکه فشار هیدرواستاتیک یک بخش با نیروی برآیند  $Q$  جانشین شود، دو المان از نیم دایره  $AB$  را که نسبت به محور قائم  $Oy$  قرینه می‌باشند، در نظر بگیرید. طول هر یک از این دو المان مطابق شکل،  $dS = a d\theta$  است.

از معادله  $dQ = Q dS$ ، اندازه نیروی وارد بر هر یک از این المان‌ها برابر  $q a d\theta$  می‌باشد. اگر این نیروها به وسیله مولفه‌های افقی و قائم جانشین شوند، مولفه‌های افقی همدیگر را متعادل می‌سازند. بنابراین فقط باید مولفه‌های قائم را در نظر گرفت. برآیند این دو مولفه قائم نیروی قائمی است به اندازه  $2qa \sin \theta d\theta$  که از نقطه  $O$  می‌گذرد.

این استدلال را می‌توان در مورد دو المان دیگر فشار هیدرواستاتیک انجام داد. در نتیجه برآیند کلی فشار گسترده شده را می‌توان با جمع بندی برآیندهای اجزاء نشان داده شده به وسیله عبارت  $2qa \sin \theta d\theta$  برای تمام جفت المان‌های بین  $a, b$  به دست آورد. این جمع بندی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$Q = 2qa \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta d\theta = 2qa [-\cos \theta]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2qa \quad (4-81)$$

بنابراین تقارن موجود کشش حلقه مساوی است با:

$$S = \frac{1}{2} Q = qa \quad (4-82)$$

نتیجه نشان می‌دهد که فشار یکنواخت وارد بر محیط نیم‌دایره معادل است با همین فشار که به طور یکنواخت وارد به قطر  $AB$  این نیم دایره اعمال می‌گردد. به طور کلی می‌توان

ثابت نمود که هر فشار یکنواخت وارد به یک خط دلخواه  $AB$  معادل است با همین فشار که به طور یکنواخت بر وتر  $AB$  وارد می گردد.

برای اثبات این قضیه المان  $dS$  از منحنی  $AB$  در نظر گرفته می شود. شکل (۴-۳۰) نیروی  $qdS$  مربوط به مولفه های افقی و قائم آن تجزیه می شود که به ترتیب عبارتند از:

$$qd\sin\theta = qdS \frac{dy}{dS} = qdy \quad (4-83)$$

$$qd\cos\theta = qdS \frac{dx}{dS} = qdx \quad (4-84)$$

مولفه های برآیند با جمع بندی روابط بالا بدست می آیند.

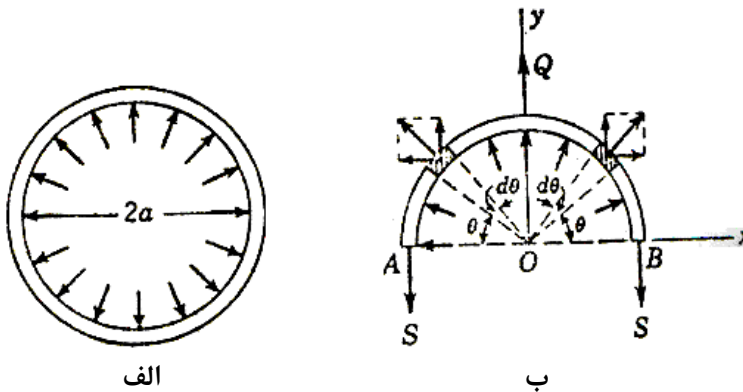
$$X = \int_A^B qdy = q \int_A^B dy = q \cdot BC \quad (4-85)$$

$$Y = \int_A^B qdx = q \int_A^B dx = q \cdot AC \quad (4-86)$$

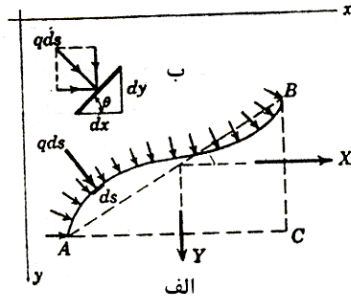
و از این رو می توان نوشت:

$$Q = \sqrt{X^2 + Y^2} = q\sqrt{BC^2 + AC^2} = q \cdot AB \quad (4-87)$$

این قضیه نشان می دهد که توزیع یکنواخت یک نیرو بر روی منحنی  $AB$  با توزیع یکنواخت آن در روی  $AB$  معادل است.



شکل ۴-۲۹



شکل ۴-۳۰