فصل ۸ آزمون کای‌دو و کاربردهای آن

۸-۱ مقدمه

آزمون کای‌دو یکی از آزمون‌های مهم آماری است. این آزمون بر اساس آماره‌ای بنا شده است که توسط پیرسون معرفی شده و از این رو آنرا آماره کای‌دو پیرسون نیز می‌نامند. آماره کای‌دو دارای کاربردهای متعددی است که از جمله مهمترین آنها می‌توان به نیکویی برازش و آزمون استقلال اشاره کرد. همچنین آشنایی با مفاهیمی چون استقلال و هم‌توزیعی در این فصل، زمینه را برای ورود به مباحث مربوط به مقایسه دو یا چند جامعه در فصل‌های بعدی فراهم می‌کند.

۸-۲ آزمون کای‌دو برای نیکویی برازش

برای آزمون این فرض که آیا فراوانی‌های مشاهده شده با فراوانی‌های مورد انتظار اختلاف معنی‌دار دارند یا خیر، از آزمونی به نام کای‌دو استفاده می‌شود. اگر فراوانی‌های مشاهده شده با O_i و فراوانی‌های مورد انتظار با E_i نشان داده شوند، در این صورت آماره

$$\chi^۲ = \sum_{i=۱}^{k} \frac{(O_i - E_i)^۲}{E_i} = \sum_{i=۱}^{k} \frac{O_i^۲}{E_i} - n$$

که به آماره کای‌دو پیرسون معروف است، در حالتی که حجم نمونه (n) به اندازه کافی بزرگ باشد دارای توزیع کای‌دو با $k-۱$ درجه آزادی است.

آزمون نیکویی برازش، بررسی سازگاری یا ناسازگاری توزیع مجموعه‌ای از مشاهدات با یک توزیع معلوم است. فرض مقابل، وجود تفاوت معنی‌دار بین این دو توزیع است. مقادیر بزرگ آماره کای‌دو فرض صفر را تضعیف و از فرض مقابل حمایت می‌کند. به عنوان مثال با استفاده از آزمون کای‌دو و با در دست داشتن نمونه‌ای به حجم کافی، می‌توان فرض برنولی بودن توزیع

یک سری مشاهدات، نرمال بودن توزیع قد افراد یک شهر یا پواسن بودن توزیع تعداد تصادفات رانندگی در یک بزرگراه را آزمود.

مثال ۸-۱. سکه‌ای ۲۰۰ مرتبه پرتاب شده و ۱۱۵ بار خط و ۸۵ مرتبه شیر مشاهده شده است. فرض سالم (ناااریب) بودن سکه را در سطح ۵٪ بررسی کنید.

$$O_1 = ۱۱۵, \quad O_2 = ۸۵, \qquad E_1 = E_2 = np = ۲۰۰ \times ۰/۵ = ۱۰۰$$
$$\chi_\circ^{\,۲} = \frac{(۱۱۵-۱۰۰)^۲}{۱۰۰} + \frac{(۸۵-۱۰۰)^۲}{۱۰۰} = ٤/۵, \qquad df = ۲-۱ = ۱$$

با توجه به اینکه مقدار آماره $\chi^۲$ در ناحیه رد فرض صفر قرار می‌گیرد $(\chi^۲_{۰/۰۵,۱} = ۳/۸٤)$، در نتیجه دلیل کافی برای رد فرض صفر در سطح ۰/۰۵ وجود داشته و سکه سالم نیست.

مثال ۸-۲. انتظار می‌رود که گیاهان حاصل از تلاقی دو والد از لحاظ شکل ظاهری در ٤ دسته A، B، C و D به ترتیب با نسبت‌های ۹، ۳، ۳، ۱ قرار گیرند. این در حالی است که فراوانی‌های مشاهده شده در نمونه‌ای به حجم ۱۸۹۸ گیاه برابر ۱۱۷۸، ۲۹۱، ۲۷۳ و ۱۵٦ بوده است. آیا فراوانی‌های مشاهده شده با فراوانی‌های مورد انتظار مطابقت دارند؟

$H_\circ$: نسبت ۱:۳:۳:۹ در بین گیاهان برقرار است

H_1 : نسبت ۱:۳:۳:۹ در بین گیاهان برقرار نیست

	طبقه اول	طبقه دوم	طبقه سوم	طبقه چهارم
O_i	۱۱۷۸	۲۹۱	۲۷۳	۱۵٦
E_i	۱۰٦۷/٦	۳۵۵/۹	۳۵۵/۹	۱۱۸/٦

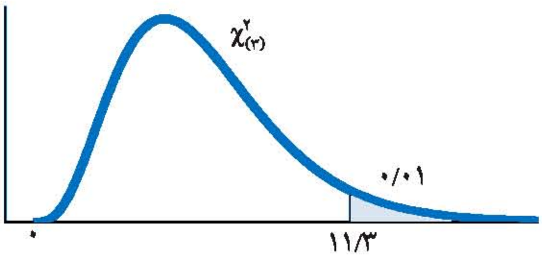
۱۸۹۸×(۹÷۱٦)=۱۰٦۷/٦

۱۸۹۸×(۳÷۱٦)=۳۵۵/۹

۱۸۹۸×(۱÷۱٦)=۱۱۸/٦

$$\chi_\circ^۲ = \frac{(۱۱۷۸-۱۰٦۷/٦)^۲}{۱۰٦۷/٦} + \frac{(۲۹۱-۳۵۵/۹)^۲}{۳۵۵/۹} + \frac{(۲۷۳-۳۵۵/۹)^۲}{۳۵۵/۹} + \frac{(۱۵٦-۱۱۸/٦)^۲}{۱۱۸/٦} = ۵٤/۳۱$$

با توجه به اینکه آماره کای‌دو محاسبه شده $(\chi^{۲}_{\circ})$ در ناحیه رد فرض صفر قرار می‌گیرد $(\chi^{۲}_{۰/۰۱,۳} = ۱۱/۳)$، در نتیجه فراوانی‌های مشاهده شده با فراوانی‌های مورد انتظار، تفاوت معنی‌دار دارد.



نمودار ۸-۱. ناحیه رد در آزمون کای‌دو مربوط به مثال ۸-۲.

جدول ۸-۱. حل مثال ۸-۲ با نرم‌افزار Minitab و خروجی مربوطه.

مراحل:

۱. مقادیر مشاهده شده را در ستون اول و مقادیر مورد انتظار را در ستون دوم صفحه داده‌ها وارد کنید.

۲. وارد مسیر زیر شوید.

Stat > Tables > Chi-Square Goodness-of-Fit test (One Variable)...

۳. در مقابل گزینه Observed counts ستون اول و در مقابل Proportions specified by historical counts ستون دوم را وارد کرده و گزینه Input column را در زیر آن انتخاب کنید.

۴. گزینه OK را انتخاب کنید.

Chi-Square Goodness-of-Fit Test for Observed Counts in Variable: C1

```
                               Test              Contribution
Category  Observed  Proportion  Expected     to Chi-Sq
1             1178      0.5625   1067.63       11.4110
2              291      0.1875    355.88       11.8265
3              273      0.1875    355.88       19.2997
4              156      0.0625    118.63       11.7757

   N  DF   Chi-Sq  P-Value
1898   3  54.3128    0.000
```

خلاصه آزمون نیکویی برازش

فرض صفر $(H_\circ)$: بین توزیع مشاهدات و توزیع مفروض تفاوت معنی‌دار وجود ندارد.

فرض مقابل $(H_۱)$: بین توزیع مشاهدات و توزیع مفروض تفاوت معنی‌دار وجود دارد.

آماره آزمون:
$$\chi^۲ = \sum_{i=۱}^{k} \frac{(O_i - E_i)^۲}{E_i} = \sum_{i=۱}^{k} \frac{O_i^۲}{E_i} - n$$

ناحیه رد:
$$\chi_\circ^۲ \geq \chi_{\alpha,k-۱}^۲$$

درجه آزادی در آزمون $\chi^۲$، تعداد طبقات منهای یک $(k-۱)$ می‌باشد.

البته فرض بر این است که آزمایش از نوع چند جمله‌ای بوده و نمونه مورد بررسی به اندازه کافی بزرگ بوده به طوری که تعداد مورد انتظار در هر طبقه از ۵ کمتر نباشد.

۸-۲-۲ آماره کای‌دو تصحیح شده

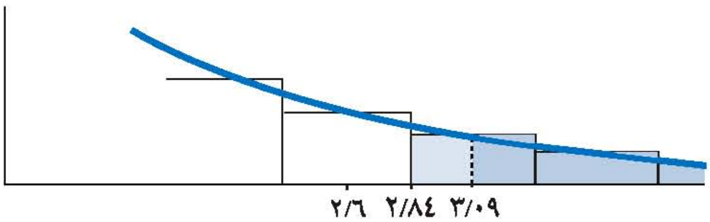
لزوم معرفی کای دو تصحیح شده به وسیله یک مثال در زیر توضیح داده شده است.

مثال ۸-۳. بر اساس نظریه وراثت مندلی تلاقی‌های خاصی از نخود فرنگی، به نسبت ۳ به ۱ نخودفرنگی زرد و سبز می‌دهد. اگر در آزمایشی ۱۹۸ نخودفرنگی سبز و ۵۰ نخودفرنگی زرد بدست آید، آیا این نتایج در سطح ۵٪ با تئوری مطابقت دارد؟

در این مثال مقدار آماره کای‌دو به طور معمول برابر با ۳/۰۹ به دست می‌آید.

$$\chi_\circ^۲ = \frac{(۱۹۸-۱۸٦)^۲}{۱۸٦} + \frac{(۵۰-٦۲)^۲}{٦۲} = ۳/۰۹$$

در این حالت سطح معنی‌داری مشاهده شده برابر با سطح تیره‌تر بر روی توزیع $\chi^۲$ در نمودار ۸-۲ می‌باشد، یعنی احتمال $\chi^۲$ بزرگتر یا مساوی از ۳/۰۹ باشد. ولی این احتمال به دلیلی که در زیر توضیح داده می‌شود زیاد دقیق نیست.



نمودار ۸-۲. مقایسه مقدار احتمال در آزمون χ^2 برای مثال ۸-۲ در دو حالت تصحیح شده و تصحیح نشده.

از آنجا که در این مثال فقط دو پیشامد سبز یا زرد بودن بذر می‌تواند رخ دهد، پس توزیع مربوطه یک توزیع گسسته بوده و مقدار واقعی احتمال مربوطه، سطح روشن‌تر را نیز شامل می‌شود. این در حالی است که توزیع χ^2 یک توزیع پیوسته بوده و تقریب احتمال مورد نظر کوچکتر از حد واقعی به دست می‌آید. می‌توان نشان داد که اگر از یک تلاقی، ۱۹۷ نخودفرنگی سبز و ۵۱ نخودفرنگی زرد بدست آید، مقدار آماره χ^2 این بار ۲/۶۰ خواهد شد. در حقیقت احتمال خطای نوع یک در مورد اول (۱۹۸ نخودفرنگی سبز و ۵۰ نخودفرنگی زرد) برابر با احتمال χ^2 بزرگتر یا مساوی ۲/۸٤ (نقطه وسط ۳/۰۹ و ۲/۶۰) خواهد بود. روش درست محاسبه χ^2 در این مورد که کای‌دو تصحیح شده نام دارد توسط "یتز" به صورت

$$\chi^2 = \sum \frac{(| O_i - E_i | - 0/5)^2}{E_i}$$

پیشنهاد شده که در آن مقدار ۰/۵ از قدر مطلق $O_i - E_i$ کاسته شده است. با استفاده از این رابطه، مقدار آماره χ^2 به درستی برابر با ۲/۸٤ به دست خواهد آمد.

$$\chi_\circ^2 = \frac{(| 198 - 186 | - 0/5)^2}{186} + \frac{(| 50 - 62 | - 0/5)^2}{62} = 2/84$$

چون آماره χ^2 محاسبه شده کوچکتر از $\chi^2_{0/05,1} = 3/84$ می‌باشد، دلیل کافی برای رد فرض صفر وجود نداشته و نتایج در سطح ۵٪ با تئوری مطابقت دارد.

البته تصحیح مذکور در صورتی که تعداد درجات آزادی بزرگتر از ۱ باشد، نتایج را به مقدار قابل توجهی تغییر نمی‌دهد و در عمل فقط برای حالتی که درجه آزادی برابر با یک باشد اعمال می‌شود.

آزمون کای‌دو یک روش ناپارامتری است بدین معنی که در آن هیچ فرضی در مورد توزیع داده‌ها وجود نداشته و لذا یک آزمون ناپارامتری به حساب می‌آید. عیب روشهای ناپرامتری این است که از توان آزمون کمتری برخوردار هستند. به عبارت دیگر در رد $H_{\circ}$ واقعاً غلط توان کمتری دارند. در این مثال از آنجا که فقط دو پیشامد می‌تواند رخ دهد، مقدار احتمال را با استفاده از توزیع نرمال به عنوان تقریب توزیع دوجمله‌ای نیز می‌توان محاسبه نمود.

$$\mu = np = ۲۸٤ \times \frac{۳}{٤} = ۱۸٦$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{۲۸٤ \times \frac{۳}{٤} \times \frac{۱}{٤}} = ٦/۸۲$$

$$\text{مقدار احتمال} = P(z \geq \text{قدر مطلق } z \text{ محاسبه شده} \mid H_{\circ})$$

$$= P(z \geq \frac{۱۹۹/۵ - ۱۸٦}{٦/۸۲}) = P(z \geq ۱/۹۸) = ۰/۰۲٤$$

مشاهده می‌شود در روش اخیر که یک روش پارامتری است، نتیجه مقداری متفاوت با روش کای‌دو بوده به طوری که با توجه به مقدار احتمال، فرض $H_{\circ}$ یعنی مطابقت نتایج با تئوری در سطح ۵٪ رد شده است.

با وجود یک نمونه تصادفی، می‌توان با استفاده از آزمون کای‌دو بررسی نمود که آیا نمونه مذکور از جامعه‌ای نرمال استخراج شده است یا خیر. برای این منظور ابتدا باید داده‌ها در جدولی با k دسته، دسته‌بندی شده و فراوانی‌های مشاهده شده، مشخص شوند. سپس فراوانی مورد انتظار هر دسته با فرض نرمال بودن توزیع محاسبه می‌شود. برای آزمون این فرض که آیا فراوانی‌های مشاهده شده با فراوانی‌های مورد انتظار اختلاف معنی‌دار دارند یا خیر، از آزمون کای‌دو استفاده می‌شود.

مثال ۸-٤. فرض کنید طول ۱۰۰ بوته از یک گونه گیاهی بر حسب سانتی‌متر اندازه‌گیری شده و در جدول زیر آمده است. آیا می‌توان گفت طول بوته در این گونه گیاهی دارای توزیع نرمال است؟

فراوانی	دسته
۱	۸۰-۹۰

۹۰-۱۰۰	۱
۱۰۰-۱۱۰	۳
۱۱۰-۱۲۰	۱۰
۱۲۰-۱۳۰	۱۹
۱۳۰-۱۴۰	۲۱
۱۴۰-۱۵۰	۲۲
۱۵۰-۱۶۰	۱۱
۱۶۰-۱۷۰	۸
۱۷۰-۱۸۰	۲
۱۸۰-۱۹۰	۱
۱۹۰-۲۰۰	۱

برای محاسبه فراوانی مورد انتظار برای هر دسته با فرض نرمال بودن داده‌ها، به میانگین (μ_x) و انحراف معیار (σ_x) نیاز است که به دلیل نامعلوم بودن، توسط مشاهدات نمونه برآورد می‌شوند.

$$\overline{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = ۱۳۸$$
$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^۲ f_i}{\sum f_i - ۱}} = ۱۸/۷۷$$

سپس حد بالای هر دسته را استاندارد کرده و بر اساس آنها فراوانی مورد انتظار در هر دسته بدست می‌آید. برای مثال، عدد ۹۰ به صورت زیر استاندارد می‌شود. واضح است که با دانستن z می‌توان سطح زیر منحنی و سپس فراوانی مورد انتظار (E_i) را برای دسته اول محاسبه نمود.

$$z = \frac{x-\mu}{\sigma} \simeq \frac{x - \overline{x}}{s} = \frac{۹۰ - ۱۳۸}{۱۸/۷۷} = -۲/۵۶$$
$$P(z \leq -۲/۵۶) = ۰/۰۰۵۲$$
$$E_۱ = ۰/۰۰۵۲ \times n = ۰/۰۰۵۲ \times ۱۰۰ = ۰/۵۲$$

فراوانی مورد انتظار را می‌توان به همین ترتیب برای سایر دسته‌ها محاسبه نمود. برای مثال در مورد دسته دوم داریم:

$$z=\frac{x-\mu}{\sigma}\simeq\frac{x-\overline{x}}{s}=\frac{۱۰۰-۱۳۸}{۱۸/۷۷}=-۲/۰۲۴$$
$$P(-۲/۵۶\leq z\leq -۲/۰۲۴)=۰/۰۲۱۷-۰/۰۰۵۲=۰/۰۱۶۵$$
$$E_۲=۰/۰۱۶۵\times n=۰/۰۱۶۵\times ۱۰۰=۱/۶۵$$

جدول ۸-۲. طول ۱۰۰ بوته از یک گونه گیاهی بر حسب سانتی‌متر.

دسته	فراوانی مشاهده شده	z مربوط به حد بالای دسته	فراوانی مورد انتظار (E_i)
۹۰ و کمتر	۱	−۲/۵۶	۰/۵۲
۹۰−۱۰۰	۱	−۲/۰۲	۱/۶۵
۱۰۰−۱۱۰	۳	−۱/۴۹	۴/۶۴
۱۱۰−۱۲۰	۱۰	−۰/۹۶	۱۰/۰۴
۱۲۰−۱۳۰	۱۹	−۰/۴۳	۱۶/۵۱
۱۳۰−۱۴۰	۲۱	۰/۱	۲۰/۴۴
۱۴۰−۱۵۰	۲۲	۰/۶۴	۲۰/۰۹
۱۵۰−۱۶۰	۱۱	۱/۱۷	۱۴/۰۱
۱۶۰−۱۷۰	۸	۱/۷۰	۷/۶۴
۱۷۰−۱۸۰	۲	۲/۲۴	۳/۲۱
۱۸۰−۱۹۰	۱	۲/۷۷	۰/۹۷
۲۰۰ و بیشتر	۱	∞	۰/۲۸

طبقاتی که فراوانی مورد انتظار آنها از ۵ کمتر است، بهتر است با طبقات مجاور ادغام شوند تا فراوانی طبقه حاصل نزدیک ۵ شود.

دسته	۱۱۰ و کمتر	۱۱۰−۱۲۰	۱۲۰−۱۳۰	۱۳۰−۱۴۰	۱۴۰−۱۵۰	۱۵۰−۱۶۰	۱۶۰−۱۷۰	۱۷۰ و بیشتر
فراوانی (O_i)	۵	۱۰	۱۹	۲۱	۲۲	۱۱	۸	۴
z حد بالا	−۱/۴۹	−۰/۹۶	−۰/۴۳	۰/۱	۰/۶۴	۱/۱۷	۱/۷۰	$+\infty$
E_i	۶/۸۱	۱۰/۰۴	۱۶/۵۱	۲۰/۴۴	۲۰/۰۹	۱۴/۰۱	۷/۶۴	۴/۶۴

حال آماره $\chi^۲$ با استفاده از فراوانی‌های مشاهده شده و مورد انتظار محاسبه می‌شود.

$$\chi_\circ{}^۲=\sum\frac{(O_i-E_i)^۲}{E_i}=\frac{(۵-۶/۸۱)^۲}{۶/۸۱}+\frac{(۱۰-۱۰/۰۴)^۲}{۱۰/۰۴}+\dots+\frac{(۴-۴/۶۴)^۲}{۴/۶۴}=۱/۸$$

درجه آزادی برابر با $df=k-p-۱$ است که در آن k برابر با تعداد طبقات و p تعداد پارامترهایی است که از روی نمونه برآورد شده است. با توجه به اینکه دو پارامتر میانگین و

انحراف معیار جامعه از روی نمونه برآورد شده‌اند، درجه آزادی برابر با $df = ۸ - ۲ - ۱ = ۵$ خواهد بود و چون آماره $\chi^۲$ محاسبه شده کوچکتر از $\chi^۲_{۰/۰۵,۵} = ۱۱/۰۷$ می‌باشد، دلیل کافی برای رد فرض صفر وجود نداشته فرض نرمال بودن داده‌ها رد نمی‌شود.

مثال ۸-۵. تعداد ۳۵ نمونه ۱۰۰ گرمی بذر کلزا از یک گونی استخراج شده و تعداد بذرهای علف هرز (x) در هر نمونه شمارش و در جدول زیر آمده است. آیا تعداد بذرهای علف هرز در هر ۱۰۰ گرم بذر کلزا از توزیع پواسن پیروی می‌کند؟

x_i	۰	۱	۲	۳	مساوی یا بیشتر از ٤
فراوانی	۲	٦	۱۰	۱۰	۷

با فرض اینکه داده‌ها از توزیع پواسن پیروی می‌کنند، میانگین (λ) از روی نمونه به صورت

$$\overline{x} = \hat{\lambda} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} = \frac{۸٤}{۳۵} = ۲/٤$$

محاسبه می‌شود. احتمال مشاهده هر کدام از مقادیر x در توزیع پواسن با میانگین ۲/٤ از رابطه $P(x) = \frac{\lambda^x . e^{-\lambda}}{x!}$ محاسبه می‌شود. برای مثال احتمال صفر بودن x برابر با

$$P(x = ۰) = \frac{۲/٤^۰ . e^{-۲/٤}}{۰!} = e^{-۲/٤} = ۰/۰۹۰۷۱۸$$

و فراوانی مورد انتظار برای $x = ۰$ برابر با $۳/۱۷۵ = ۳۵ \times ۰/۰۹۰۷۱۸$ است. به همین ترتیب فراوانی مورد انتظار را می‌توان برای سایر xها به دست آورد.

فراوانی مورد انتظار (E_i)	فراوانی مشاهده شده (O_i)	x_i
۳/۱۷۵	۲	۰
۷/٦۲	٦	۱
۹/۱٤٤	۱۰	۲
۷/۳۱۵	۱۰	۳
۷/۷٤۵	۷	٤ و بیشتر

آماره $\chi^۲$ با استفاده از فراوانی‌های مشاهده شده و مورد انتظار برابر

$$\chi_{\circ}^{۲} = \sum \frac{(O_i - E_i)^{۲}}{E_i} = \frac{(۲ - ۳/۱۷۵)^{۲}}{۳/۱۷۵} + \frac{(٦ - ۷/٦۲)^{۲}}{۷/٦۲} + \cdots + \frac{(۷ - ۷/۷٤۵)^{۲}}{۷/۷٤۵} = ۱/۹۱$$

است. با توجه به اینکه یک پارامتر (میانگین) جامعه از روی نمونه برآورد شده است، لذا درجه آزادی برابر با $۵-۱-۱=۳$ خواهد بود. با توجه به اینکه آماره $\chi^{۲}$ محاسبه شده کوچکتر از $\chi^{۲}_{۰/۰۵,۳} = ۷/۸۱$ می‌باشد، دلیل کافی برای رد فرض صفر وجود نداشته و می‌توان گفت داده‌ها از توزیع پواسن پیروی می‌کنند.

جدول ۸-۳. حل مثال ۸-۵ و خروجی مربوطه در نرم‌افزار Minitab.

مراحل:

۱. xها را در ستون اول صفحه داده‌ها و فراوانی‌ها را در ستون دوم وارد کنید.

۲. وارد مسیر زیر شوید:

Stat > Basic Statistics > Goodness of Fit Test for Poisson …

۳. در مقابل Variable ستون اول (C1) و در مقابل Frequency variable ستون دوم (C2) را انتخاب کنید.

۴. بر روی OK کلیک کنید.

```
Data column: C1
Frequency column: C2

Poisson mean for C1 = 2.4

                     Poisson               Contribution
C1   Observed    Probability  Expected      to Chi-Sq
0           2       0.090718   3.17513       0.434920
1           6       0.217723   7.62031       0.344527
2          10       0.261268   9.14437       0.080061
3          10       0.209014   7.31550       0.985109
>=4         7       0.221277   7.74470       0.071607


 N  N*  DF    Chi-Sq  P-Value
35   0   3  1.91622    0.590
```

```
1 cell(s) (20.00%) with expected value(s) less than 5
```

۸-۳ آزمون کای‌دو برای استقلال

در آزمایش‌های چندجمله‌ای که داده‌ها بر اساس دو ویژگی طبقه‌بندی شده‌اند، می‌توان نتایج را در یک جدول دوطرفه به نام جدول توافقی تنظیم کرد. در این شرایط دو نوع طبقه‌بندی ممکن است مستقل از هم بوده یا اینکه با هم وابستگی داشته باشند. این موضوع را می‌توان از طریق آزمون کای‌دو بررسی نمود.

مثال ۸-٦. برای تعیین اثر یک نوع واکسن در برطرف کردن نوعی بیماری دام، ۲۰۰ دام بیمار انتخاب شده و ۱۰۰ دام مورد تزریق قرار گرفته‌اند. پس از مدتی، از گروه تزریق شده ۷۵ و از گروه تزریق نشده ٦۵ رأس دام بهبود یافته‌اند. آیا سرم مورد استفاده تأثیری در بهبودی دام‌ها داشته است؟ به عبارت دیگر آیا دو نوع طبقه‌بندی مستقل از هم هستند یا اینکه با هم وابستگی دارند؟

	بهبودی دام		
تزریق واکسن	بهبود یافته	بهبودنیافته	جمع
تزریق شده	۷۵	۲۵	۱۰۰
تزریق نشده	٦۵	۳۵	۱۰۰
جمع	۱٤۰	٦۰	۲۰۰

بر مبنای فرض صفر یعنی مستقل بودن دو معیار طبقه‌بندی انتظار می‌رود که کل دام‌های بهبودیافته (٦۵+۷۵) و دام‌های بهبودنیافته (۲۵+۳۵) به طور مساوی در هر طبقه قرار گیرند یعنی برای گروه بهبود یافته (۷۰+۷۰) و برای گروه دیگر (۳۰+۳۰). در نتیجه فراوانی‌های مورد انتظار را می‌توان به صورت زیر به جدول بالا افزود:

	صفت ۱		
صفت ۲	بهبود یافته	بهبودنیافته	جمع
تزریق شده	(۷۰) ۷۵	(۳۰) ۲۵	۱۰۰
تزریق نشده	(۷۰) ٦۵	(۳۰) ۳۵	۱۰۰

جمع	۱٤۰	٦۰	۲۰۰

در این جدول آماره $\chi^۲$ به صورت

$$\chi_\circ^{\,۲} = \frac{(۷۵-۷۰)^۲}{۷۰} + \frac{(٦۵-۷۰)^۲}{۷۰} + \frac{(۲۵-۳۰)^۲}{۳۰} + \frac{(۳۵-۳۰)^۲}{۳۰} = ۲/۳۸$$

محاسبه و با $\chi^۲$ جدول برای درجه آزادی مربوطه مقایسه می‌شود. اگر r تعداد ردیف‌ها و c تعداد ستون‌ها باشد درجه آزادی در جدول دو طرفه برابر با $(r-۱)(c-۱) = ۱$ است. با توجه به اینکه $\chi^۲$ محاسبه شده کوچکتر از $\chi^۲_{۰/۰۵,۱} = ۳/۸٤$ می‌باشد، دلیل کافی برای رد فرض صفر وجود ندارد. در نتیجه دو معیار طبقه‌بندی مستقل از هم بوده و تزریق سرم در بهبودی دام‌ها مؤثر نبوده است.

جدول ۸–٤. مسیر اجرا و خروجی مربوطه در نرم‌افزار Minitab برای مثال ۸–٦.

Stat > Tables > Chi-Square test (Two-Way Table in Worksheet)...

Chi-Square Test: Cured; Not cured

```
Expected counts are printed below observed counts
Chi-Square contributions are printed below expected counts

       Cured  Not cured  Total
    1     75         25    100
       70.00      30.00
       0.357      0.833

    2     65         35    100
       70.00      30.00
       0.357      0.833

Total    140         60    200

Chi-Sq = 2.381; DF = 1; P-Value = 0.123
```

چنانچه در محاسبه فراوانی‌های مورد انتظار از پارامترهای جامعه نیز استفاده شود، درجه آزادی برابر خواهد شد با $k-1$ منهای تعداد پارامترهایی که برای محاسبه آن فراوانی‌ها، مورد استفاده قرار گرفته‌اند.

مثال ۸-۷. سازمان صدا و سیما در یک نظرخواهی نتایج زیر را کسب کرده است. موارد زیر را در سطح اطمینان ۹۵٪ آزمون کنید.

الف) آیا علاقه نسبت به فیلم سینمایی در بین مرد و زن و کودک متفاوت است؟

ب) آیا علاقه افراد نسبت به برنامه‌ها مشابه است؟

	نوع برنامه		
جنس	ورزش	فیلم سینمایی	راز بقا
مرد	۶۰	۱۰۰	۹۰
زن	۴۰	۷۰	۴۰
کودک	۵۰	۸۰	۷۰

الف) در این سؤال فرض صفر به این صورت بیان می‌شود که نسبت مردان طرفدار فیلم سینمایی (p_1)، نسبت زنان طرفدار فیلم سینمایی (p_2) و نسبت کودکان طرفدار فیلم سینمایی (p_3) با هم برابر است، یعنی $H_0 : p_1 = p_2 = p_3 = p$ که در آن p نسبت طرفداران فیلم سینمایی در کل جامعه (مرد، زن و کودک) است و از روی این نمونه به صورت ۲۵۰ تقسیم بر ۶۰۰ برآورد می‌شود که حدوداً برابر ۴۱ درصد است. در صورتی که فرض صفر درست باشد، انتظار می‌رود $0/41 \times 250 = 104/1$ نفر از مردان، $0/41 \times 150 = 62/5$ نفر از زنان و $0/41 \times 200 = 83/3$ نفر از کودکان طرفدار فیلم سینمایی باشند. آماره کای‌دو برابر

$$\chi_0^2 = \frac{(100 - 104/16)^2}{104/16} + \frac{(70 - 62/5)^2}{62/5} + \frac{(80 - 83/33)^2}{83/33} = 1/22$$

است. در این حالت چون یک پارامتر برآورد شده است، یک عدد از درجه آزادی کم می‌شود و درجه آزادی برابر با ۱=۱-۱-۳ خواهد شد. مقدار احتمال برای عدد ۱/۲۲ و درجه آزادی ۱ تقریبا برابر ۰/۲۷ است. لذا با توجه به بزرگ بودن مقدار احتمال، فرض صفر (با هر خطای نوع اولی کمتر از ۰/۲۷) پذیرفته می‌شود.

ب) در این حالت فرض صفر به این صورت است که سطر و ستون جدول از هم مستقل‌اند، به عبارت دیگر علاقه افراد به نوع برنامه ها مستقل از جنسیت آنها (در اینجا مرد، زن و کودک) است. در صورتی که سطر و ستون از هم مستقل باشند، فراوانی مورد انتظار هر خانه برابر است با جمع سطر ضربدر جمع ستون مربوط به آن خانه تقسیم بر تعداد کل (جمع همه خانه‌ها).

پس از اضافه کردن جمع ردیف‌ها و ستون‌ها، فراوانی‌های مورد انتظار را می‌توان به صورت زیر محاسبه و به جدول مربوطه افزود.

جنس	نوع برنامه: ورزش	فیلم سینمایی	راز بقا	جمع
مرد	٦۰ (٦۲/۵)	۱۰۰ (۱۰٤/۱٦)	۹۰ (۸۳/۳۳)	۲۵۰
زن	٤۰ (۳۷/۵)	۷۰ (٦۲/۵)	٤۰ (۵۰/۰)	۱۵۰
کودک	۵۰ (۵۰/۰)	۸۰ (۸۳/۳۳)	۷۰ (٦٦/٦٦)	۲۰۰
جمع	۱۵۰	۲۵۰	۲۰۰	٦۰۰

قبل از محاسبه آماره آزمون می‌توان حدس زد که فرض صفر پذیرفته می‌شود. چون مقادیر مورد انتظار و مقادیر مشاهده شده تا حد زیادی به هم نزدیک هستند. در هر صورت آماره کای‌دو برابر

$$\chi_{\circ}^{۲} = \frac{(٦۰ - ٦۲/۵)^{۲}}{٦۲/۵} + \frac{(۱۰۰ - ۱۰٤/۱٦)^{۲}}{۱۰٤/۱٦} + \cdots + \frac{(۷۰ - ٦٦/٦٦)^{۲}}{٦٦/٦٦} = ٤/۱۷$$

است. مقدار احتمال برای عدد مشاهده شده (٤/۱۷) و درجه آزادی ٤ برابر است با ۰/۳۸، در این مورد نیز فرض صفر با هر آلفایی کمتر از ۰/۳۸ پذیرفته می‌شود.

تمرین‌ها

۸–۱. هزار نفر بر اساس ابتلا یا عدم ابتلا به کوررنگی طبقه‌بندی شده‌اند. آیا در سطح ۵٪ می‌توان گفت که کوررنگی در میان افراد مذکر بیشتر است؟

نوع دید	جنس: مذکر	مؤنث
سالم	٤٤۲	۵۱٤
کوررنگ	۳۸	٦

۸–۲. آزمایشی را با ۱۰۰ گلدان در نظر بگیرید که در هر یک ٦ بذر از یک رقم جو کشت شده و شرایط کشت نیز برای آنها یکسان است. اگر احتمال جوانه‌زنی هر بذر ۰/۸ باشد، انتظار می‌رود که جوانه‌زنی در هر گلدان از یک توزیع دوجمله‌ای پیروی کند. اگر تعداد بذور جوانه زده در هر گلدان به صورت زیر باشد، آیا جوانه‌زنی از توزیع نرمال با p=۰/۸ پیروی کرده است؟

تعداد بذور جوانه‌زده در هر گلدان	۰	۱	۲	۳	٤	۵	٦
تعداد گلدان	۰	۲	۳	۱۲	۱۹	٤۳	۲۱

۸–۳. انتظار می‌رود که گیاهان حاصل از تلاقی بین دو والد از لحاظ شکل ظاهری در ٤ طبقه A، B، C و D با نسبت مورد انتظار ۹، ۳، ۳ و ۱ قرار گیرند. این در حالی است که فراوانی‌ها در ۲۵۰ گیاه ۱۵۰، ٤۲، ۵۰ و ۸ بوده است. آیا فراوانی‌های مشاهده شده با فراوانی‌های مورد انتظار مطابقت دارد؟

۸–۴. می‌خواهیم بدانیم که آیا ارتباطی بین رنگ بذر و رنگ گلبرگ در مزرعه لوبیا وجود دارد یا خیر. اگر این دو صفت مستقل از هم باشند، رنگ گلبرگ هیچ اطلاعی در مورد رنگ بذر به ما نخواهد داد. اگر در نمونه‌ای ۵۰۰ بذری از جامعه رنگ بذر و رنگ گلبرگ به صورت زیر باشد، آیا می‌توان گفت که بین رنگ گلبرگ و رنگ بذر ارتباطی وجود دارد؟

	رنگ بذر			
رنگ گلبرگ	قهوه‌ای تیره	قهوه‌ای	قهوه‌ای روشن	سفید
ارغوانی	۲۱	۳۲	۱۳	٤
بنفش	۵۵	۱۰۲	۷۰	۸
سفید	۱٤	۵۹	۱۱۲	۱۰

۸–۵. در مطالعه اثر نوع خاک بر روی رشد یک گونه گیاهی، نهال‌هایی در سه نوع خاک کاشته شده و میزان رشد آنها اندازه‌گیری شد. آیا میزان رشد در سه نوع خاک متفاوت از هم بوده است؟

	نوع خاک		
میزان رشد	رسی	شنی	سیلتی
کم	۱۵	۱٦	۱۹
متوسط	۳۲	۹	۸
زیاد	۱۷	۳۵	۲٦

۸–۶. در یک نمونه ۱۰۰ تایی از درختان یک جنگل، ٦۵ درخت کاج و ۳۵ درخت سرو وجود داشته است. آیا در سطح $\alpha =$ ۰/۰۵ می‌توان گفت که تعداد درختان کاج در جنگل بیشتر است؟