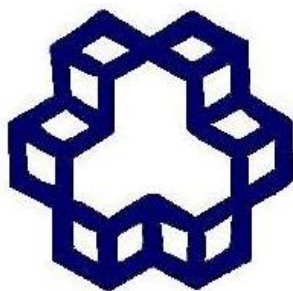


به نام یزدان پاک



K.N.Toosi University Of Technology
Faculty Of Electrical Engineering

پروژه اول درس کنترل تطبیقی

شناسایی سیستم

استاد: دکتر علی خاکی صدیق

یزدان باتمانی

گسسته‌سازی سیستم پیوسته

تابع تبدیل سیستم داده شده بصورت زیر است:

$$H(s) = \frac{(s + 0.5)}{(3s + 1)(s^2 + 0.7s + 1)}$$

با توجه به اینکه روش‌های شناسایی گفته شده، برای سیستم‌های گسسته در زمان ارائه شده‌اند، لازم است که در ابتدا سیستم زمان پیوسته را گسسته کرده و در ادامه از مدل گسسته در زمان استفاده کنیم. برای تعیین مناسب زمان نمونه‌برداری لازم است به محل قطب‌های سیستم پیوسته در زمان دقت کنیم. محل قطب‌های سیستم پیوسته در زمان عبارتند از $-0.35 \pm j0.9367$ و -0.33 . زمان نشست پاسخ پله این سیستم برابر 8.93 ثانیه بوده و با انتخاب زمان نمونه‌برداری $T_s = \frac{8.93}{25} \approx 0.35$ و استفاده از دستور `c2d`، سیستم زمان گسسته زیر حاصل خواهد شد:

$$H(z) = \frac{0.01902z^2 + 0.00189z - 0.015}{z^3 - 2.565z^2 + 2.273z - 0.6965}$$

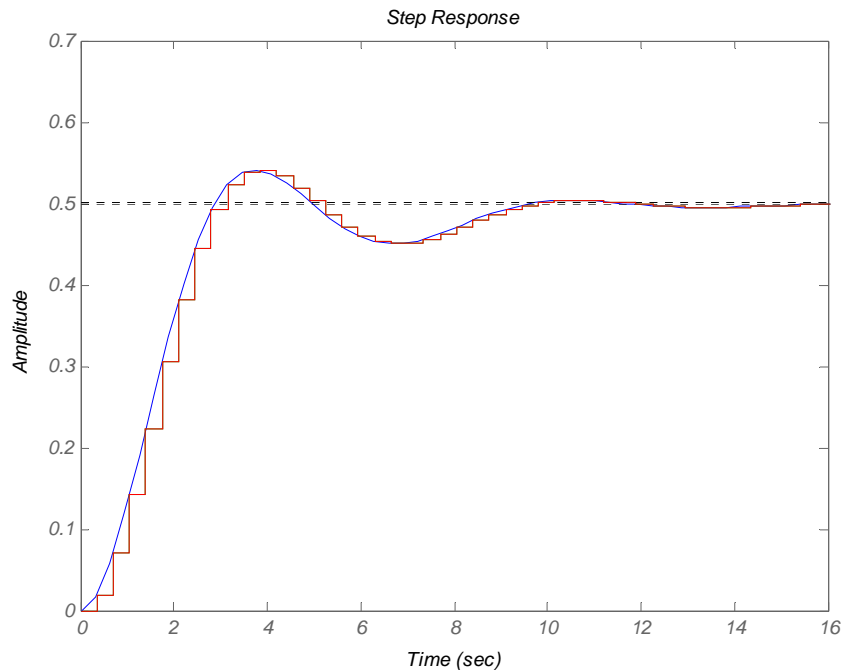
برای این سیستم زمان گسسته مقدار بهره DC برابر $H(z = 1) = 0.5146$ بوده که حدوداً برابر بهره DC سیستم پیوسته در زمان $H(s = 0) = 0.5$ است و می‌تواند معیاری از مناسب بودن زمان نمونه‌برداری انتخاب شده باشد. همان طور که مشاهده می‌شود صفرهای تابع تبدیل گسسته در زمان در 0.9572 و -0.9846 قرار داشته و قطب‌های آن نیز در 0.8899 و $0.8376 \pm j0.2849$ قرار دارند که منجر به یک سیستم زمان گسسته پایدار و حداقل فاز می‌شوند. با توجه به تابع تبدیل بدست آمده می‌توان نوشت:

$$A(q)y(t) = B(q)u(t), \begin{cases} A(q^{-1}) = 1 - 2.565q^{-1} + 2.273q^{-2} - 0.6965q^{-3} \\ B(q^{-1}) = 0.01902q^{-1} + 0.00189q^{-2} - 0.015q^{-3} \end{cases}$$

که می‌توان آنرا بصورت زیر در نظر گرفت:

$$\begin{cases} A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + a_2q^{-2} + a_3q^{-3} \\ B(q^{-1}) = b_1q^{-1} + b_2q^{-2} + b_3q^{-3} \end{cases}$$

در شکل (۱) پاسخ پله سیستم پیوسته در زمان و گسسته در زمان همراه با هم آورده شده‌اند:



شکل (۱): پاسخ پله سیستم پیوسته در زمان و گسسته در زمان.

در ادامه منظور از شناسایی سیستم، بدست آوردن این پارامترها خواهد بود.

شناسایی خارج خط

۱-۱) فرض می‌شود که نویز سفید با واریانس ۰.۱ به خروجی اندازه‌گیری شده اضافه شده باشد. با فرض اینکه مرتبه مدل در نظر گرفته همان مرتبه واقعی سیستم باشد و با استفاده از معادلات زیر، پارامترهای سیستم را شناسایی می‌کنیم.

$$y(t) = \begin{bmatrix} -y(t-1) & -y(t-2) & -y(t-3) & u(t-1) & u(t-2) & u(t-2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} + e(t)$$

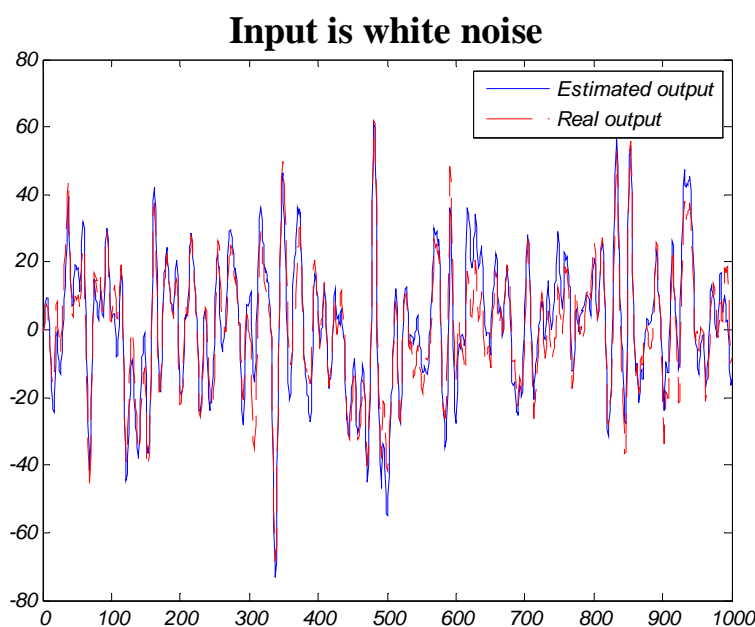
برای اطمینان از PE بودن سیگنال ورودی از نویز سفید با انحراف استاندارد ۱۰۰ به عنوان ورودی استفاده شده است (با توجه به کوچک بودن ضرایب صورت تابع تبدیل این مقدار برای انحراف استاندارد انتخاب شده

است). با توجه به زمان نمونه‌برداری انتخاب شده، تعداد نمونه‌ها برابر هزار نمونه فرض شده است. در این صورت پارامترهای تخمین زده شده با روش LS در جدول یک آورده شده‌اند.

جدول یک: پارامترهای تخمین زده شده با روش LS و برای ورودی نویز سفید.

پارامترها	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
مقدار واقعی	-2.565	2.273	-0.6965	0.01902	0.00189	-0.015
مقدار شناسایی شده	-2.5752	2.2893	-0.7030	0.01893	0.00179	-0.01511

با استفاده از پارامترهای تخمین زده شده، خروجی مدل و خروجی سیستم اصلی برای ورودی مورد استفاده در تخمین پارامترها در شکل (۲) آورده شده است.



شکل (۲): خروجی مدل و خروجی سیستم اصلی برای ورودی نویز سفید.

همان طور که از این شکل مشاهده می‌شود، پاسخ مدل بدست آمده در قیاس با پاسخ سیستم واقعی دارای دقت مناسبی است.

۱-۲) برای بررسی اثر PE بودن سیگنال ورودی بر فرآیند شناسایی از ۴ نوع سیگنال با درجات تحریک مختلف به عنوان ورودی سیستم استفاده خواهد شد.

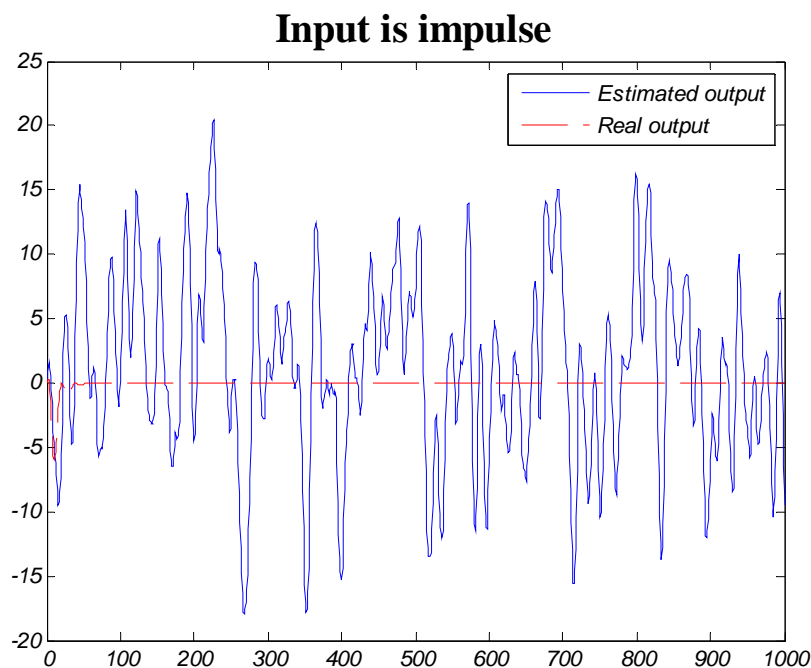
ورودی ضربه

همان طور که می‌دانیم درجه تحریک این ورودی صفر است. بنابراین پیش‌بینی می‌کنیم که با استفاده از این ورودی، تخمین مناسبی از پارامترها حاصل نشود. از آنجا که پارامترهای چند جمله‌ای A توسط نویز سفید تحریک می‌شوند، بنابراین از جانب این پارامترها مشکلی پیش نخواهد آمد. ولی برای پارامترهای چند جمله-ای B با توجه به این که ورودی درجه تحریک مناسبی ندارد، تخمین مناسبی بدست نخواهد آمد. نتایج این تخمین در جدول دو آمده است.

جدول دو: پارامترهای تخمین زده شده با روش LS و برای ورودی ضربه.

پارامترها	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
مقدار واقعی	-2.565	2.273	-0.6965	0.01902	0.00189	-0.015
مقدار شناسایی شده	-2.5437	2.228	-0.6727	0.1985	-0.2391	-0.6419

با توجه به توضیحات داده شده دیده می‌شود که پارامترهای چندجمله‌ای مخرج تقریباً مناسب تخمین زده شده‌اند، در حالی که پارامترهای چندجمله‌ای صورت به خوبی تخمین زده نشده‌اند. در شکل (۳) خروجی واقعی مدل و خروجی مدل بدست آمده آورده شده‌اند.



شکل (۳): خروجی مدل و خروجی سیستم اصلی برای ورودی ضربه.

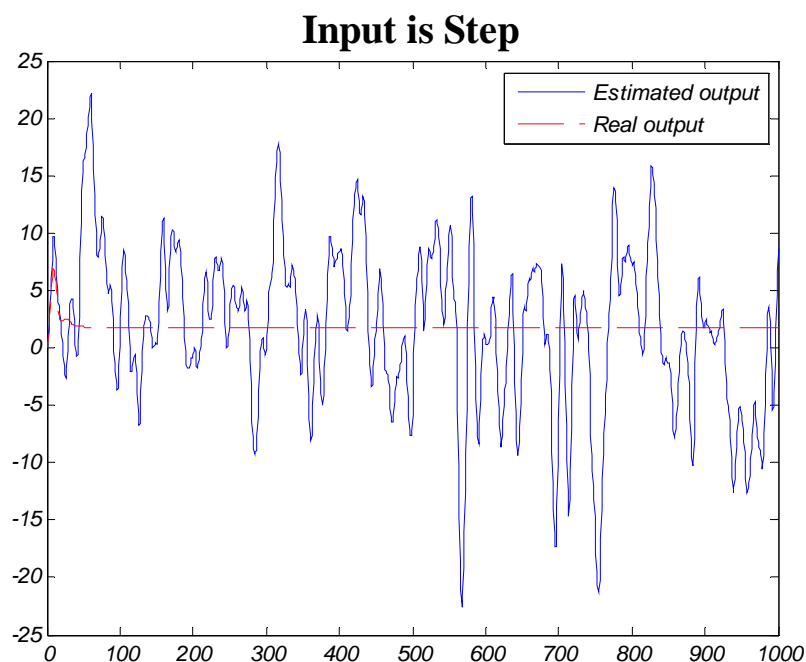
ورودی پله

می‌دانیم که پله PE از مرتبه‌ی یک می‌باشد و برای تخمین ۳ پارامتر در چند جمله‌ای B مناسب نیست و نباید انتظار تخمین خوبی از این ورودی داشته باشیم. در جدول سه پارامترهای تخمین زده شده با استفاده از این ورودی و روش LS آورده شده‌اند.

جدول سه: پارامترهای تخمین زده شده با روش LS و برای ورودی پله.

پارامترها	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
مقدار واقعی	-2.565	2.273	-0.6965	0.01902	0.00189	-0.015
مقدار شناسایی شده	-2.5611	2.2603	-0.6871	-0.0210	0.5458	-0.5233

مشاهده می‌شود که تخمین پارامترهای چندجمله‌ای B به درستی انجام نشده است. در شکل (۴) خروجی واقعی مدل و خروجی مدل بدست آمده آورده شده‌اند.



شکل (۴): خروجی مدل و خروجی سیستم اصلی برای ورودی پله.

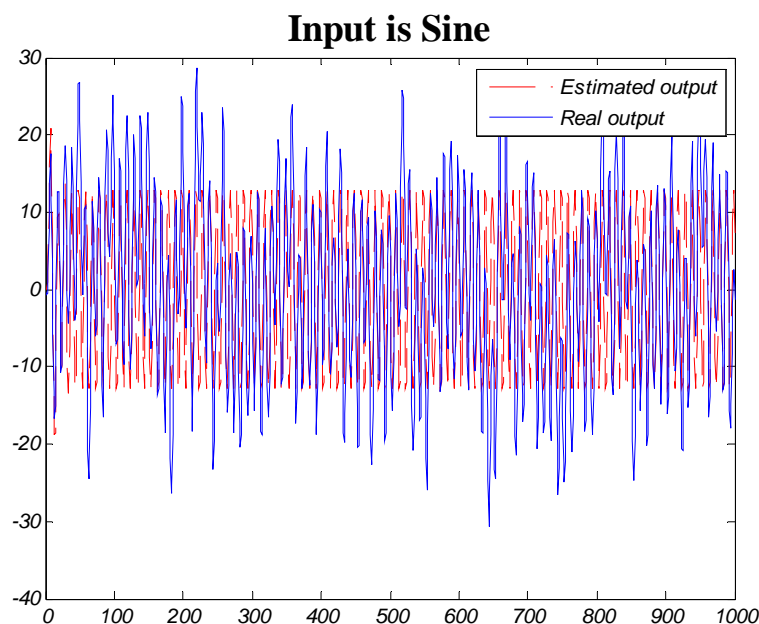
ورودی سینوسی

سیگنال سینوسی PE از مرتبه‌ی ۲ می‌باشد و مرتبه لازم جهت تخمین مناسب پارامترهای این مسئله را دارا نمی‌باشد. نتایج این تخمین در جدول چهار آمده است.

جدول چهار: پارامترهای تخمین زده شده با روش LS و برای ورودی سینوسی.

پارامترها	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
مقدار واقعی	-2.565	2.273	-0.6965	0.01902	0.00189	-0.015
مقدار شناسایی شده	-2.6035	2.3373	-0.7233	-0.0149	0.0078	-0.020

مشاهده می‌شود که تخمین پارامترهای چندجمله‌ای B به درستی انجام نشده است. در شکل (۵) خروجی واقعی مدل و خروجی مدل بدست آمده آورده شده‌اند.



شکل (۵): خروجی مدل و خروجی سیستم اصلی برای ورودی سینوسی.

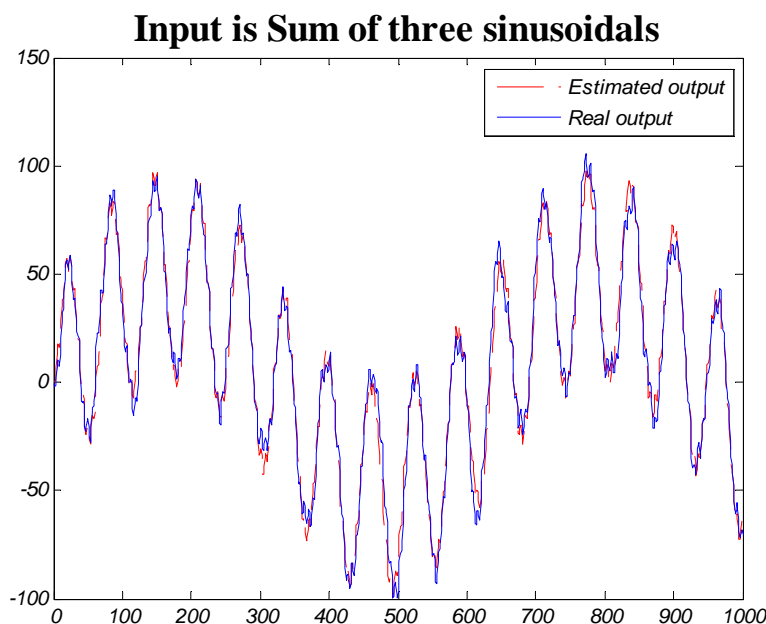
ورودی مجموع سه سینوسی

می‌دانیم که این ورودی PE از مرتبه ۶ می‌باشد، بنابراین انتظار می‌رود با این ورودی بتوان تمام پارامترهای مدل را بدرستی تخمین زد. در جدول پنج پارامترهای تخمین‌زده شده با استفاده از این ورودی و روش LS آورده شده‌اند.

جدول پنج: پارامترهای تخمین زده شده با روش LS و برای ورودی مجموع سه سینوسی.

پارامترها	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
مقدار واقعی	-2.565	2.273	-0.6965	0.01902	0.00189	-0.015
مقدار شناسایی شده	-2.528	2.2113	-0.6688	-0.01891	0.0026	-0.0144

مشاهده می‌شود که با این ورودی که از مرتبه لازم PE می‌باشد پارامترهای چندجمله‌ای صورت همچون پارامترهای چندجمله‌ای مخرج به درستی تخمین زده می‌شوند و تخمین سازگاری برای آنها حاصل می‌شود. در شکل (۶) خروجی واقعی مدل و خروجی مدل بدست آمده آورده شده‌اند.



شکل (۶): خروجی مدل و خروجی سیستم اصلی برای ورودی مجموع سه سینوسی.

۳-۱) یکی از مراحل مهم شناسایی سیستم‌های دینامیکی، تعیین مرتبه سیستم است. در این قسمت به دنبال آن هستیم تا با تغییر دادن درجه مدلی که برای سیستم در نظر گرفته شده است تاثیر درجه مدل را در شناسایی بررسی کنیم. برای این منظور درجه مدل را به مقادیر ۱، ۲، ۴، ۵ و ۶ تغییر می‌دهیم. برای مقایسه بین درجات مختلف تابع معیار زیر را انتخاب می‌کنیم. بدین معنی که هر کدام از مدل‌ها که در آن، این تابع معیار مقدار کمتری داشته باشد، تخمین بهتری از سیستم را بدست می‌دهد.

$$V = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N (y(t) - \hat{y}(t))^2$$

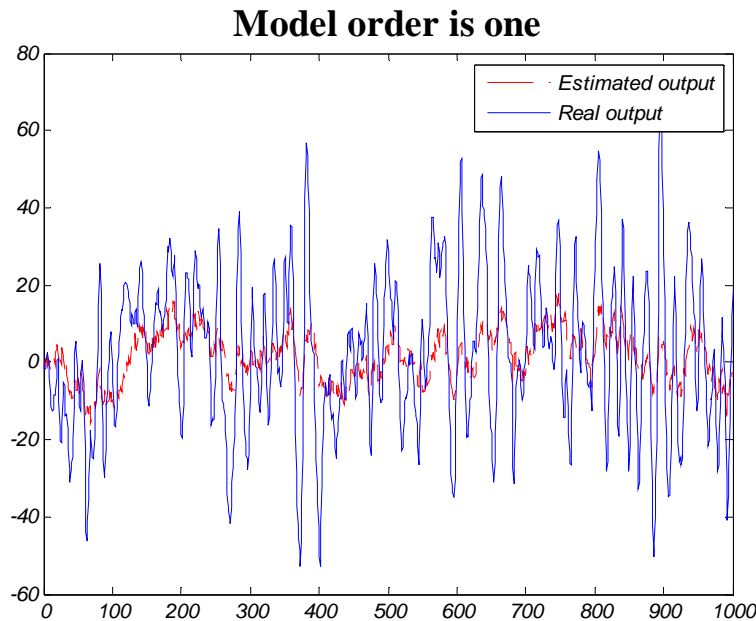
برای این کار ورودی سیستم را نویز سفید با انحراف استاندارد ۱۰۰ انتخاب کرده و خروجی ناشی از این ورودی را ثبت می‌کنیم. کماکان خروجی سیستم را نویزی فرض کرده‌ایم. سپس برای این داده‌ها، مدل‌های مرتبه ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ را بدست می‌آوریم. پس از بدست آوردن هر مدل، همان ورودی را به مدل اعمال کرده و خروجی مدل را بدست آورده و سپس تابع معیار متناظر با آن را بدست می‌آوریم.

مدل درجه یک

ابتدا مدل را درجه یک انتخاب می‌کنیم و تخمین را برای پارامترهای سیستم انجام می‌دهیم. برای مدل درجه یک، معادله مدل بصورت زیر می‌باشد:

$$y(t) = -a_1 y(t-1) + b_1 u(t-1)$$

تخمین بدست آمده برای پارامترهای این مدل برابر $a_1 = -0.9571, b_1 = 0.0194$ بوده و خروجی مدل همراه با خروجی سیستم بصورت شکل (۷) خواهند بود.



شکل (۷): خروجی مدل مرتبه اول و خروجی سیستم اصلی برای ورودی نویز سفید.

مشاهده می‌شود که مدل درجه یک نتوانسته است سیستم را به خوبی مدل کند و بنابراین این سیستم با مدل درجه ۱ قابل مدل شدن نمی‌باشد.

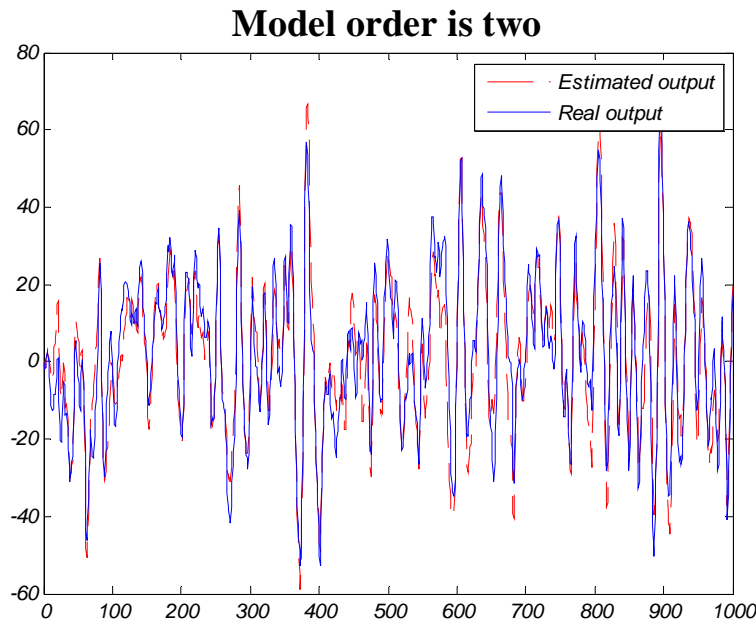
مدل درجه دو

حال مدل را درجه دو انتخاب کرده و تخمین را برای پارامترهای سیستم انجام می‌دهیم. برای مدل درجه دو، معادله مدل بصورت زیر می‌باشد:

$$y(t) = -a_1 y(t-1) - a_2 y(t-2) + b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2)$$

تخمین بدست آمده برای پارامترهای این مدل برابر $a_1 = -1.708, a_2 = 0.793, b_1 = 0.0187, b_2 = 0.018$

بوده و خروجی مدل همراه با خروجی سیستم بصورت شکل (۸) خواهند بود.



شکل (۸): خروجی مدل مرتبه دوم و خروجی سیستم اصلی برای ورودی نویز سفید.

مشاهده می‌شود که خروجی مدل و خروجی سیستم تفاوت زیادی با هم نداشته و بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که مدل درجه دو برای سیستم مدل مناسبی بوده است.

مدل درجه سه

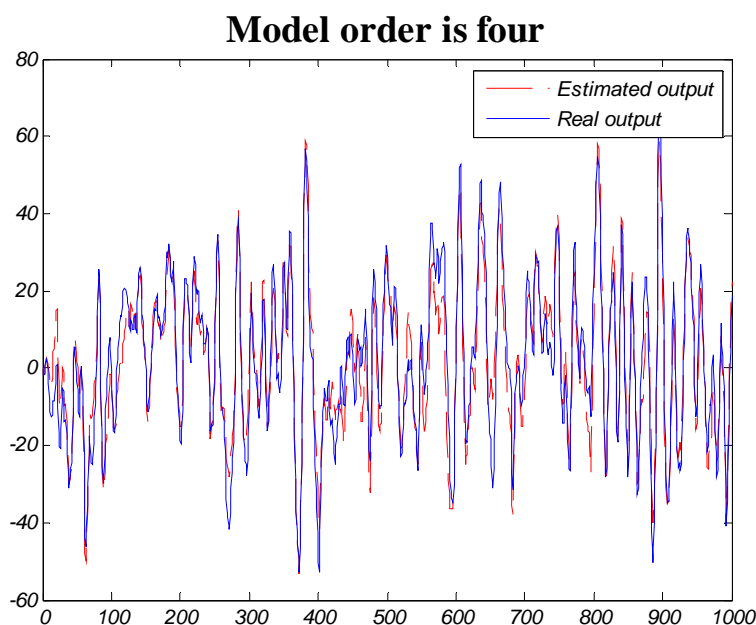
اکنون مرتبه مدل را برابر سه فرض می‌کنیم که همان مرتبه سیستم اصلی است. با این مدل، پارامترها تخمین زده شده بصورت جدول یک بوده و خروجی مدل و سیستم بصورت شکل (۲) خواهد بود.

مدل درجه چهار

اکنون مدل‌های مرتبه بالاتر سیستم اصلی را در نظر می‌گیریم. همان طور که می‌دانیم این مدل‌ها بدلیل داشتن پارامترهای بیشتر، توانایی مدل کردن بهتر سیستم را دارا می‌باشند. برای این منظور ابتدا مدل مرتبه چهار را در نظر می‌گیریم. تخمین پارامترهای این مدل بصورت زیر بوده و پاسخ این مدل در شکل (۹) آورده شده است.

$$a_1 = -2.436, a_2 = 1.969, a_3 = -0.445, a_4 = -0.072$$

$$b_1 = 0.0187, b_2 = 0.0044, b_3 = -0.0141, b_4 = -0.0012$$



شکل (۹): خروجی مدل مرتبه چهار و خروجی سیستم اصلی برای ورودی نویز سفید.

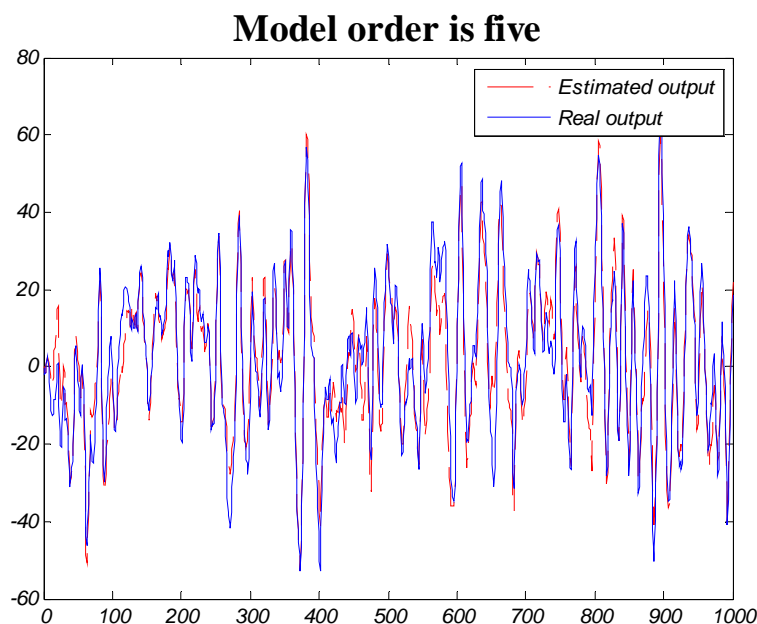
مشاهده می‌شود که خروجی مدل و خروجی سیستم تفاوت زیادی با هم نداشته و بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که مدل درجه چهار برای مدل کردن سیستم، مدل مناسبی بوده است.

مدل درجه پنج

برای سیستم مرتبه پنج نیز همین کار انجام شده است. در زیر پارامترهای تخمین زده شده آورده و در شکل (۱۰) پاسخ مدل مرتبه پنج با استفاده از این پارامترهای تخمینی آورده شده است.

$$a_1 = -2.327, a_2 = 2.009, a_3 = -1.070, a_4 = 0.671, a_5 = -0.267$$

$$b_1 = 0.0187, b_2 = 0.0065, b_3 = -0.0078, b_4 = -0.00336, b_5 = -0.00577$$



شکل (۱۰): خروجی مدل مرتبه پنج و خروجی سیستم اصلی برای ورودی نویز سفید.

با توجه به این شکل مشاهده می‌شود که مدل درجه پنج برای مدل کردن سیستم، مدل مناسبی بوده است.

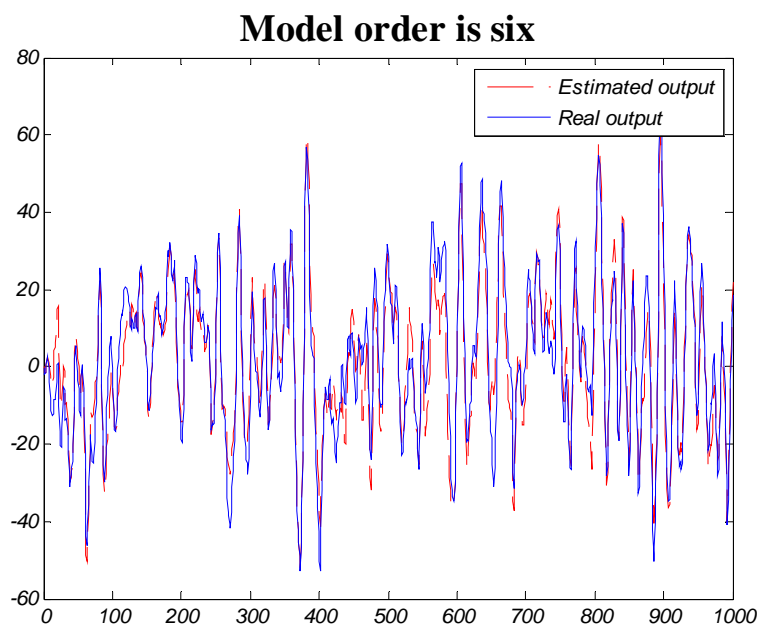
مدل درجه شش

در پایان برای این سیستم، یک مدل مرتبه شش نیز در نظر گرفته می‌شود. برای این مدل، پارامترهای تخمین زده شده در زیر آورده شده است.

$$a_1 = -2.461, a_2 = 2.457, a_3 = -1.504, a_4 = 0.637, a_5 = -0.012, a_6 = -0.101$$

$$b_1 = 0.0186, b_2 = 0.0040, b_3 = -0.0061, b_4 = 0.0016, b_5 = -0.0071, b_6 = -0.00216$$

در شکل (۱۱) پاسخ سیستم اصلی و این مدل (مدل مرتبه شش) با استفاده از این پارامترهای تخمینی آورده شده‌اند.



شکل (۱۱): خروجی مدل مرتبه شش و خروجی سیستم اصلی برای ورودی نویز سفید.

برای انجام مقایسه بهتر بین مدل‌های در نظر گرفته، مقادیر تابع معیار برای این شش مدل در جدول شش آورده شده‌اند.

جدول شش: مقادیر تابع معیار برای این شش مدل و ورودی نویز سفید.

مرتبه مدل	۱	۲	۳	۴	۵	۶
تابع معیار	300780.9	57047.3	44978.3	44791.9	45456.6	45373

از این جدول می‌توان مشاهده کرد که با افزایش درجه مدل، مقدار تابع معیار کمتر خواهد شد.

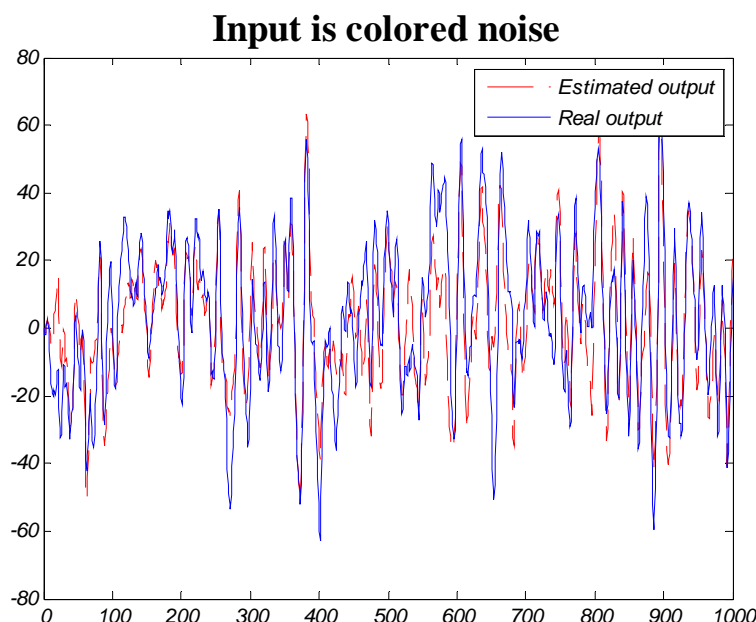
لازم است در اینجا به این نکته اشاره شود که در مدل‌های مرتبه بالاتر امکان ویژه شدن ماتریس $\varphi^T \varphi$ وجود دارد. در واقع با توجه به طبیعت تصادفی نویز موجود در خروجی و نیز نویز سفید اعمال شده به عنوان ورودی، برای برخی از اجراهای برنامه نوشته شده، ماتریس $\varphi^T \varphi$ ویژه خواهد شد. نتایج ارائه شده در فوق، برای ورودی‌ای است که منجر به ویژه شدن ماتریس $\varphi^T \varphi$ نشده است.

۴-۱) همان طور که می‌دانیم وجود نویز سفید در تخمین پارامترها با روش LS منجر به یک تخمین بدون بایاس از پارامترها خواهد شد. این موضوع را در بخش اول و با توجه به جدول یک می‌توان مشاهده کرد. وجود نویز رنگی در شناسایی پارامترها با روش LS باعث تخمینی بایاس دار از پارامترها خواهد شد. برای ایجاد نویز رنگی، فرض می‌کنیم که نویز سفید از یک فیلتر بصورت $1 + c_1 q^{-1}$ عبور کرده باشد. در این حالت با انجام تخمین LS پارامترها بصورت جدول هفت بدست می‌آیند. این نتایج برای همان نویز سفیدی که در خروجی بخش اول وجود داشت ($e(t)$) و همان ورودی نویز سفید بخش اول که برای شناسایی استفاده شد ($u(t)$) آورده شده است. واریانس نویز سفید ۰.۱ فرض شده است.

جدول هفت: پارامترهای تخمین زده شده با روش LS و برای نویز با واریانس ۰.۱.

پارامترها	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
مقدار واقعی	-2.565	2.273	-0.6965	0.01902	0.00189	-0.015
مقدار شناسایی شده	-2.6289	2.3861	-0.7503	0.01889	0.00073	-0.0159

برای این حالت مقدار تابع معیار معرفی شده در بخش قبل برابر 103090 است که در مقایسه با مقدار تابع معیار بخش اول (44978.3) بسیار بزرگتر است. در شکل (۱۲) خروجی ناشی از مدل بدست آمده در این حالت آورده شده است. مشاهده می‌شود که رنگی بودن نویز تخمین را دچار اشکال نموده و تخمین‌های بایاس‌داری ایجاد می‌شوند.



شکل (۱۲): خروجی مدل و خروجی سیستم اصلی برای ورودی نویز رنگی.

در حالتی که ورودی فیلتر نویز، نویز سفید با واریانس یک باشد، نتایج حاصل از تخمین با فرض وجود فیلتر و نیز بدون وجود فیلتر در جدول هشت آورده شده است.

جدول هشت: پارامترهای تخمین زده شده با روش LS و برای نویز با واریانس یک.

پارامترها	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3
مقدار واقعی	-2.565	2.273	-0.6965	0.01902	0.00189	-0.015
مقدار شناسایی شده با فرض سفید بودن نویز	-2.543	2.229	-0.674	0.0188	0.0025	-0.0144
مقدار شناسایی شده با فرض رنگی بودن نویز	-2.691	2.511	-0.813	0.0187	0.00018	-0.0167

برای حالتی که فیلتر نویز وجود داشته باشد (نویز رنگی) مقدار تابع معیار برابر 1.206×10^6 است که در بزرگتر از مقدار تابع معیار در حالت عدم وجود فیلتر نویز (نویز سفید) که برابر 486730 است.

از این دو بررسی نتیجه می‌شود که در هر دو حالت (برای هر دو مقدار واریانس) روش LS زمانی تخمین‌های بدون بایاس مناسبی خواهد داشت که نویز موجود در خروجی سفید باشد. (البته اگر بقیه شرایط مانند ورودی با درجه تحریک مناسب، ساختار مدل و ... مناسب انتخاب شده باشند!!!)

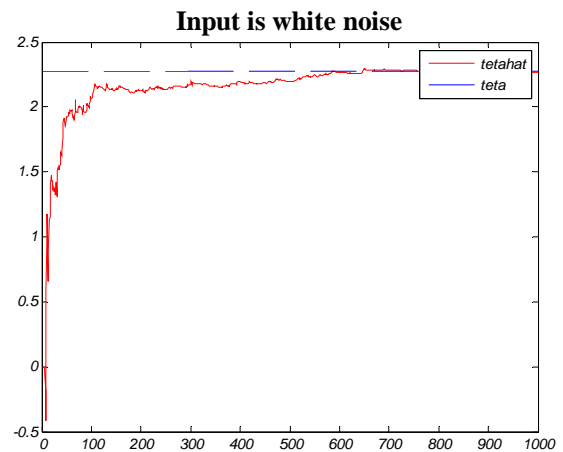
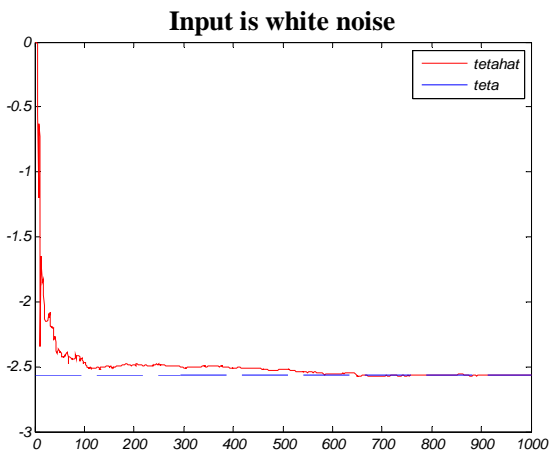
شناسایی روی خط

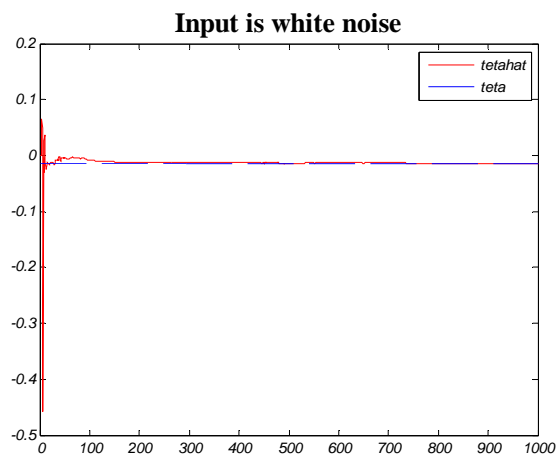
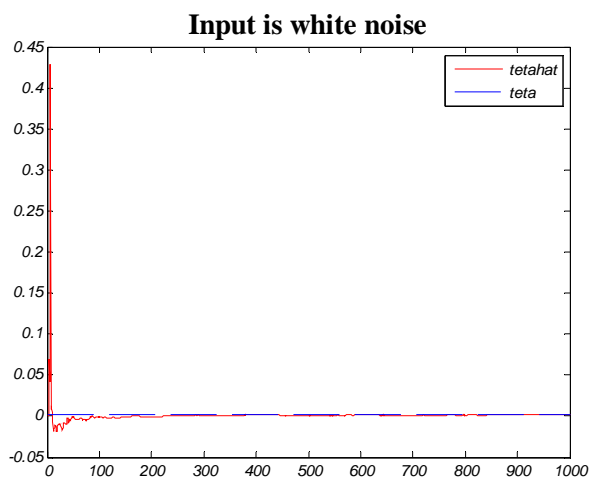
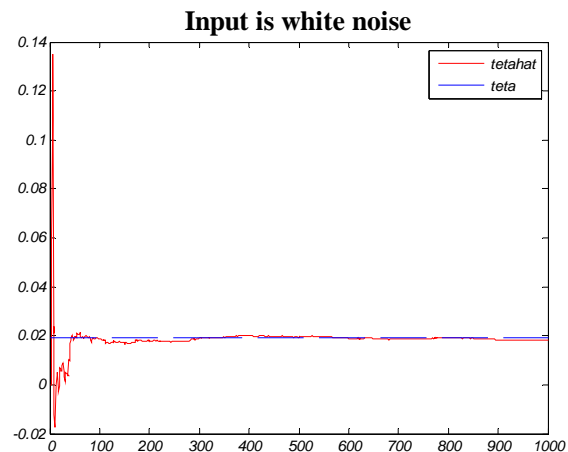
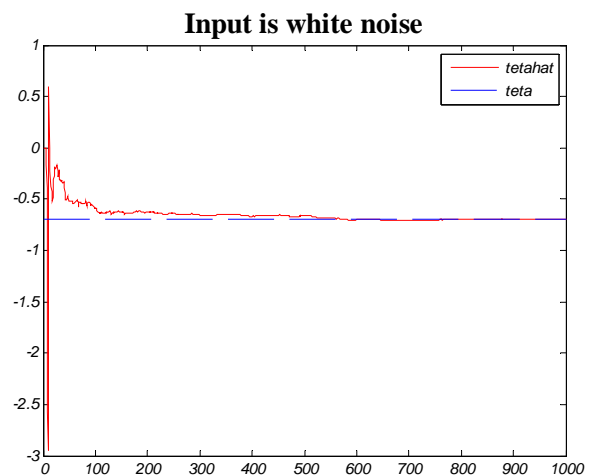
۲-۱) مانند مسئله شناسایی خارج خط فرض می‌شود که نویز سفید با واریانس ۰.۱ به خروجی اندازه‌گیری شده اضافه شده باشد. با فرض اینکه مرتبه مدل در نظر گرفته همان مرتبه واقعی سیستم باشد، پارامترهای سیستم را بصورت روی خط و با روش RLS شناسایی می‌کنیم.

جهت اطمینان از PE بودن، ورودی را نویز سفید با واریانس ۱۰۰ انتخاب می‌نماییم. شرایط اولیه را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\hat{\theta}_0 = 0; P_0 = 10^5 I$$

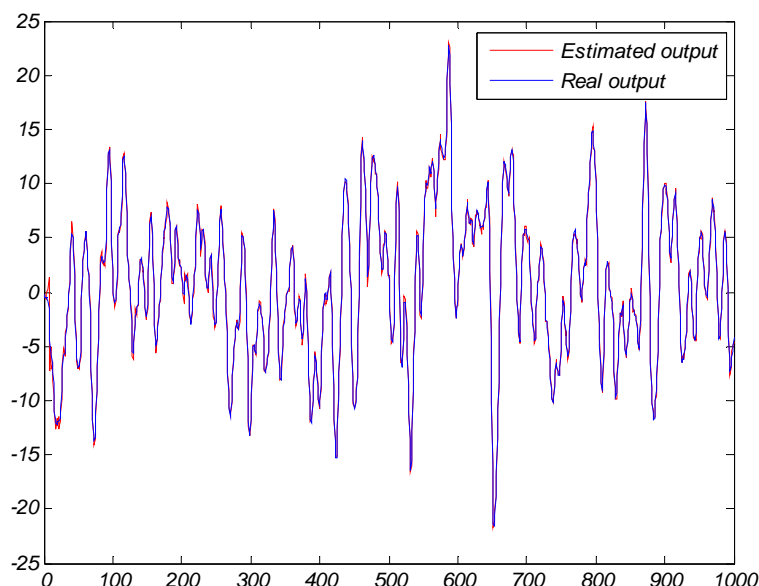
در این صورت تخمین پارامترها بصورت شکل‌های (۱۳) انجام می‌شود.





شکل (۱۳): تخمین پارامترها با روش RLS و برای نویز سفید و مدل مرتبه سه.

خروجی مدل همراه با خروجی واقعی مدل در شکل (۱۴) آورده شده است.



شکل (۱۴): خروجی مدل مرتبه سه و سیستم اصلی با روش RLS و برای ورودی نویز سفید.

از شکل‌های (۱۳) و (۱۴) مشخص است که رابطه‌ی خاصی بین همگرایی پارامترها و همگرایی خروجی وجود ندارد.

۲-۲) برای مشاهده تاثیر PE بودن، سیگنال‌های مختلف را به عنوان ورودی انتخاب می‌کنیم. در مرحله اول فرض می‌شود که خروجی بدون نویز باشد. سپس در مرحله دوم فرض می‌کنیم که نویز سفید با واریانس ۰.۱ در خروجی وجود داشته باشد.

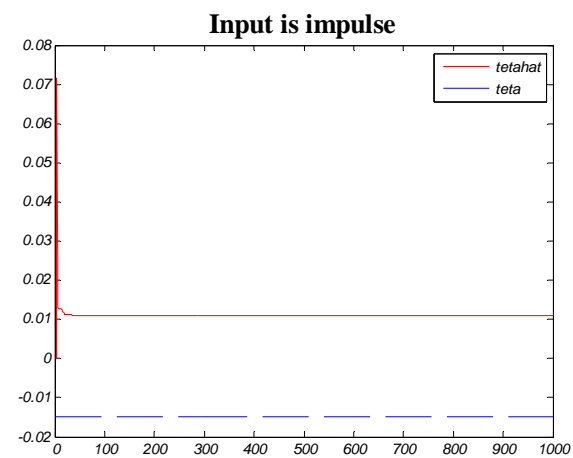
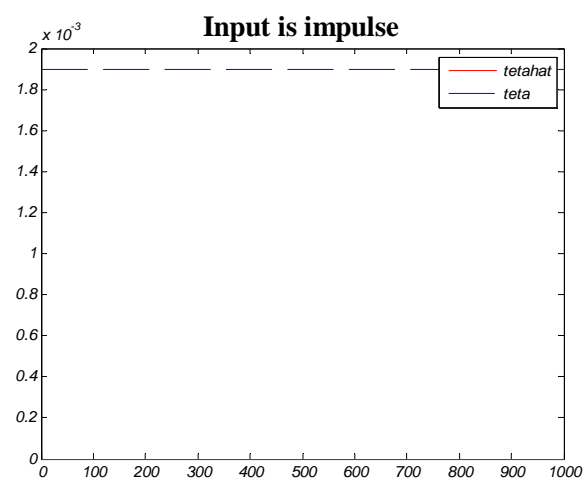
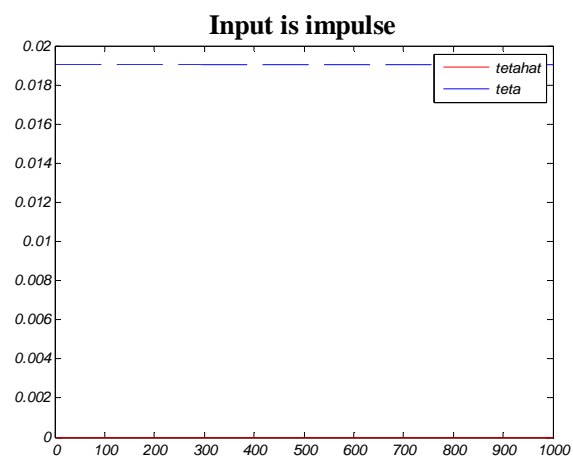
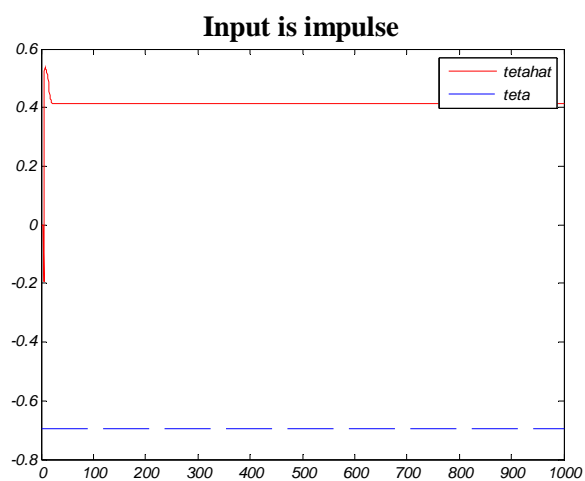
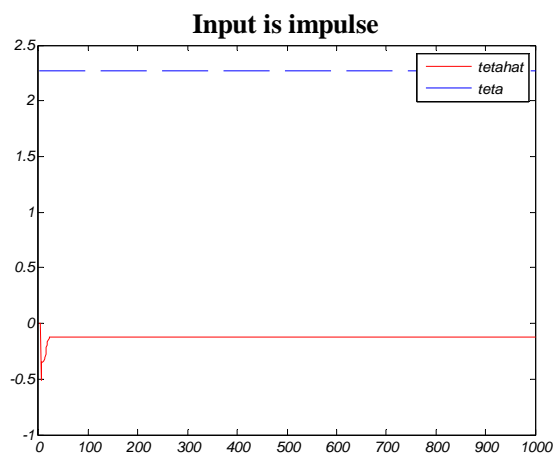
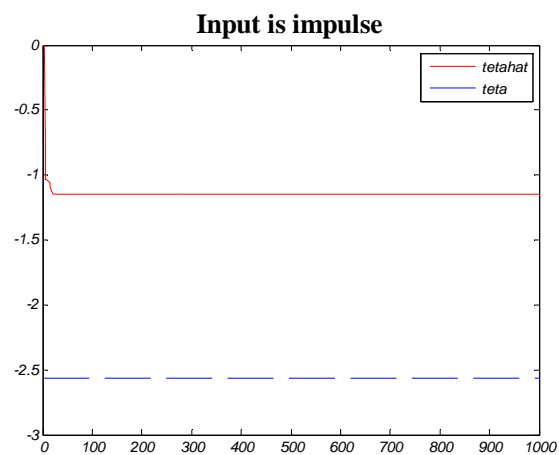
مرحله اول: همان طور که گفته شد در این حالت خروجی را بدون نویز فرض می‌کنیم.

ورودی ضربه

شرایط اولیه را بصورت زیر در نظر گرفته‌ایم.

$$\hat{\theta}_0 = 0; P_0 = 10^5 I$$

شناسایی پارامترها به صورت اشکال (۱۵) انجام می‌شود.



شکل (۱۵): تخمین پارامترها با روش RLS و برای ورودی ضربه و خروجی بدون نویز.

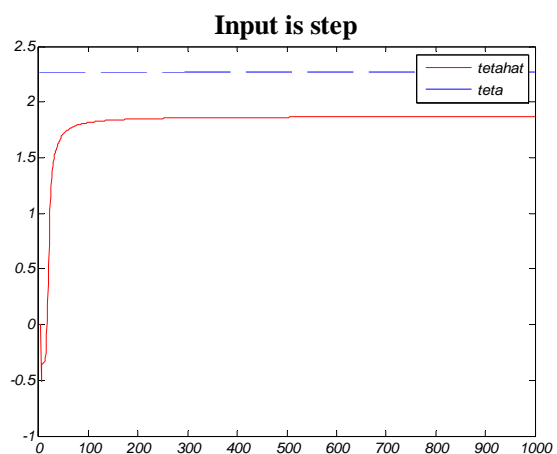
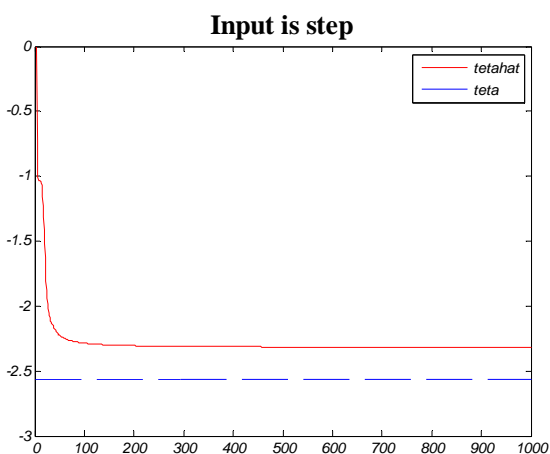
در روش on-line نیز مشاهده می‌شود که ورودی ضربه به دلیل این که PE از مرتبه لازم نیست قادر به شناسایی هیچ یک از پارامترها نمی‌باشد.

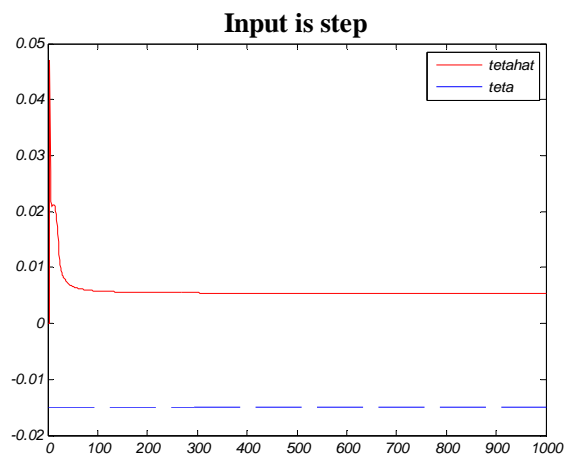
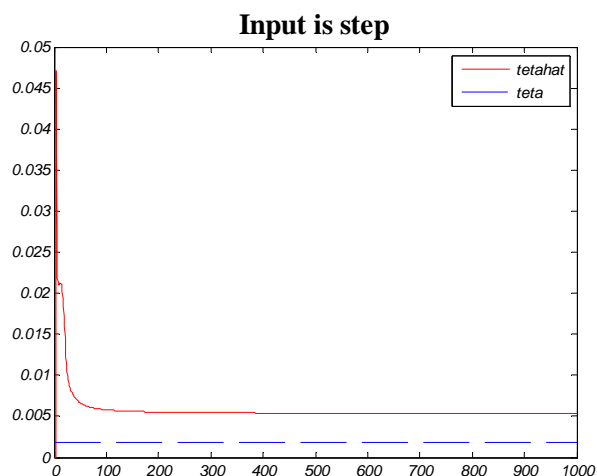
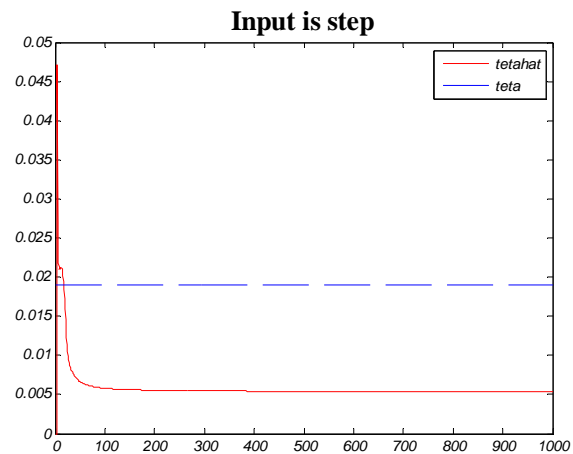
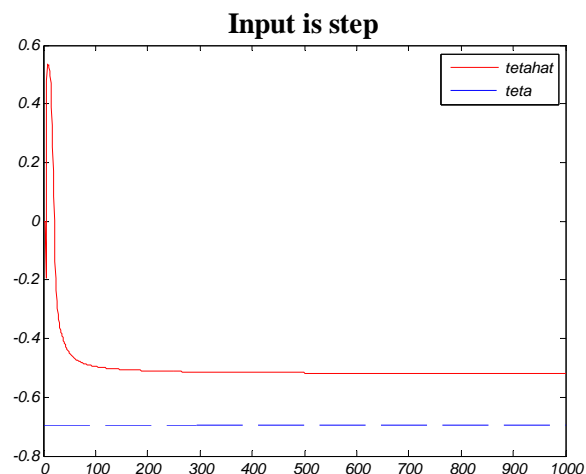
ورودی پله

در این مرحله نیز ورودی پله که PE از مرتبه‌ی لازم نیست را به عنوان ورودی انتخاب می‌کنیم. همچنان که در حالت off-line مشاهده کردیم در اینجا نیز انتظار می‌رود که تخمین مناسبی از پارامترهای مدل نداشته باشیم. شرایط اولیه را بصورت زیر در نظر گرفته‌ایم.

$$\hat{\theta}_0 = 0; P_0 = 10^5 I$$

شناسایی پارامترها به صورت اشکال زیر انجام می‌شود.





شکل (۱۶): تخمین پارامترها با روش RLS و برای ورودی پله و خروجی بدون نویز.

مشاهده می‌شود که در روش on-line نیز ورودی پله به دلیل این که PE از مرتبه لازم نیست قادر به شناسایی پارامترها نمی‌باشد.

ورودی سینوسی

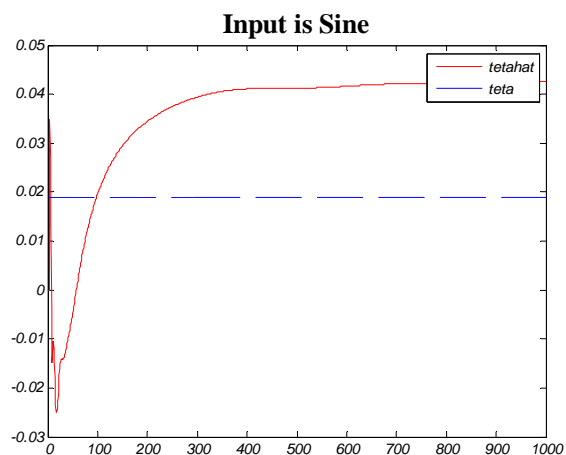
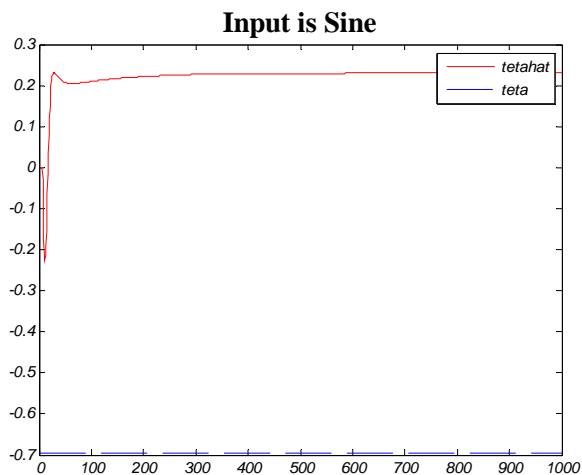
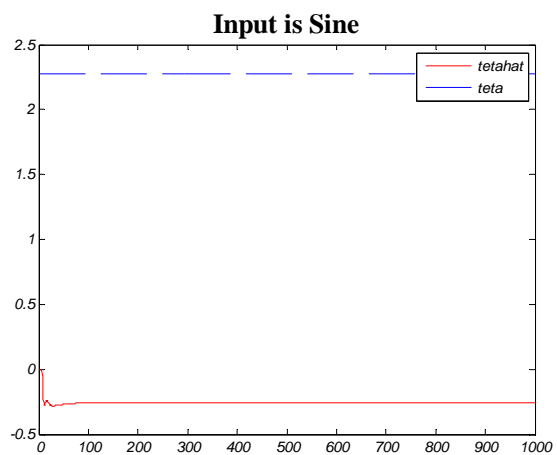
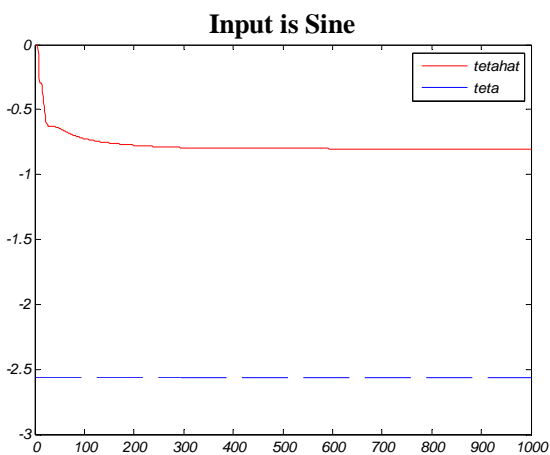
به عنوان ورودی دیگر سیگنال سینوسی را انتخاب می‌کنیم.

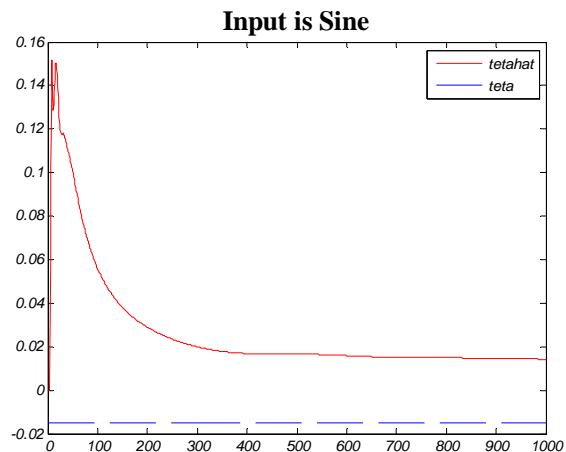
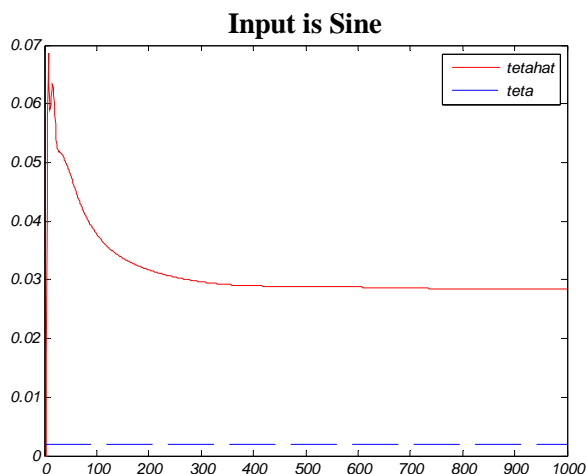
$$u(t) = \sin(x)$$

این ورودی نیز PE از مرتبه مناسب نمی‌باشد. همچنان که در حالت off-line مشاهده کردیم در اینجا نیز انتظار می‌رود که تخمین مناسبی از پارامترهای مدل نداشته باشیم. شرایط اولیه را بصورت زیر در نظر گرفته-ایم.

$$\hat{\theta}_0 = 0; P_0 = 10^5 I$$

شناسایی پارامترها به صورت اشکال (۱۷) انجام می‌شود.





شکل (۱۷): تخمین پارامترها با روش RLS و برای ورودی سینوسی و خروجی بدون نویز.

مشاهده می‌شود که ورودی سینوسی به دلیل این که PE از مرتبه لازم نیست قادر به شناسایی پارامترها نمی‌باشد.

ورودی مجموع دو سینوسی

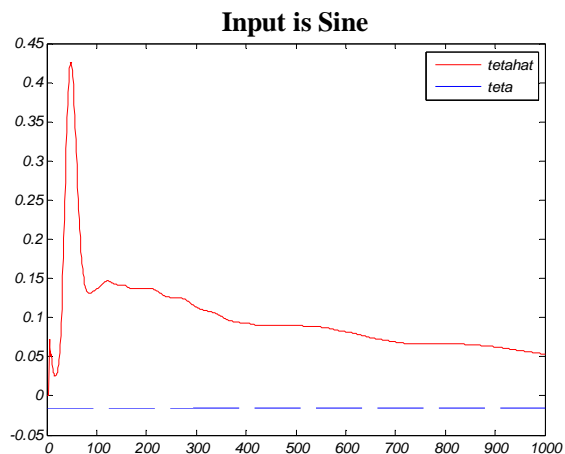
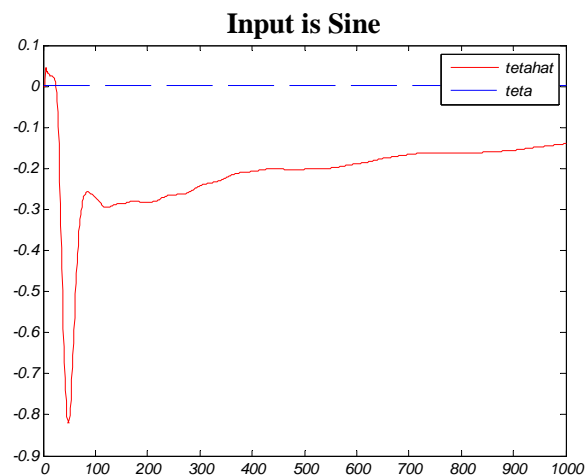
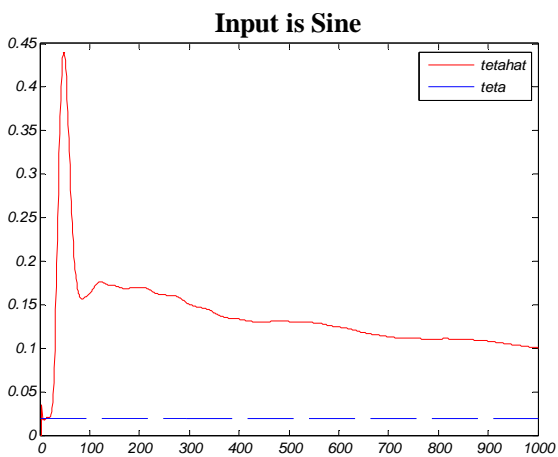
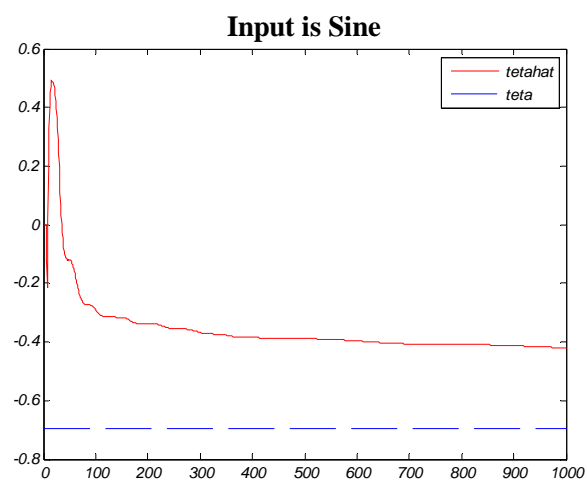
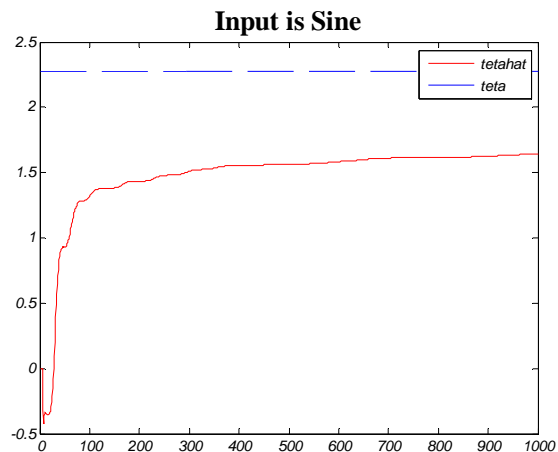
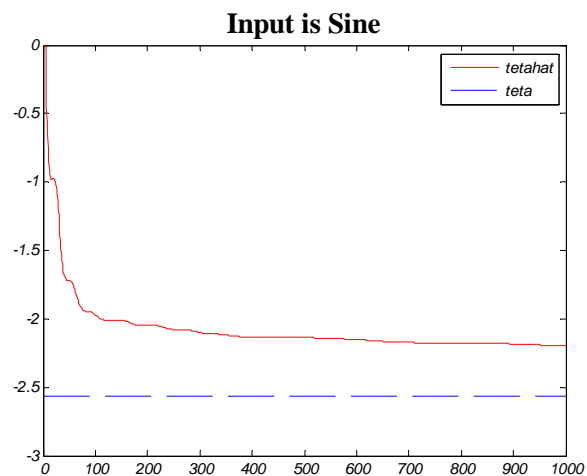
به عنوان ورودی دیگر مجموع دو سیگنال سینوسی را انتخاب می‌کنیم.

$$u(t) = \sin(x) + \sin(10x)$$

با توجه به تعداد پارامترهای مورد نیاز برای تخمین (شش پارامتر)، این ورودی PE از مرتبه مناسب نمی‌باشد (از مرتبه ۴ است). همچنان که در حالت off-line مشاهده کردیم در اینجا نیز انتظار می‌رود که تخمین مناسبی از پارامترهای مدل داشته باشیم. شرایط اولیه را بصورت زیر در نظر گرفته‌ایم.

$$\hat{\theta}_0 = 0; P_0 = 10^5 I$$

شناسایی پارامترها به صورت اشکال (۱۸) انجام می‌شود.



شکل (۱۸): تخمین پارامترها با روش RLS و برای ورودی مجموع دو سینوسی و خروجی بدون نویز.

همان طور که مشاهده می‌شود برای این ورودی تخمین‌های بدست آمده، تخمین‌های نامناسبی هستند.

ورودی مجموع سه سینوسی

به عنوان ورودی دیگر مجموع سه سیگنال سینوسی را انتخاب می‌کنیم.

$$u(t) = \sin(x) + \sin(10x) + \sin(100x)$$

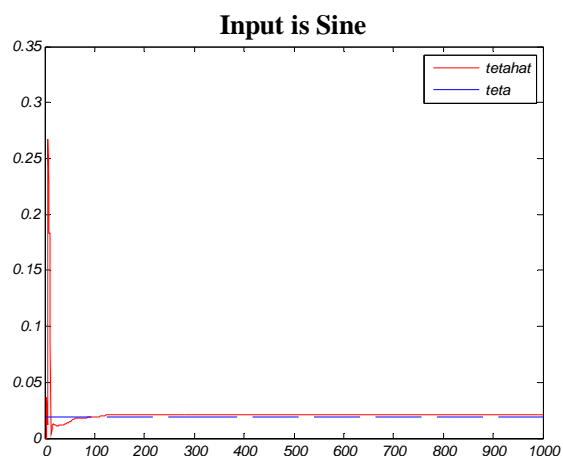
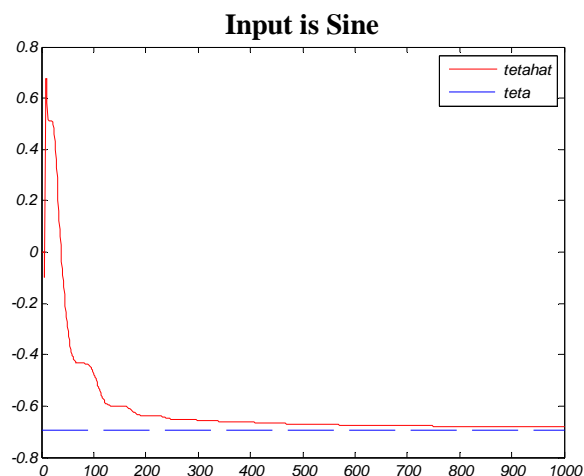
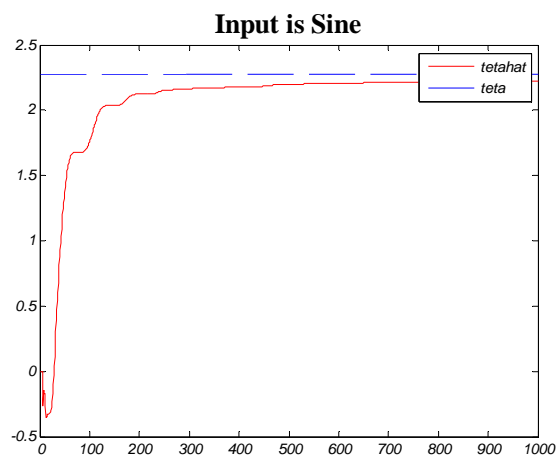
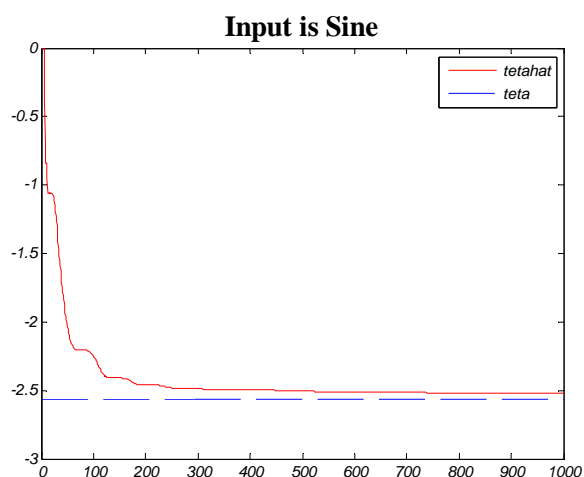
با توجه به تعداد پارامترهای مورد نیاز برای تخمین (شش پارامتر)، این ورودی PE از مرتبه مناسب می‌باشد

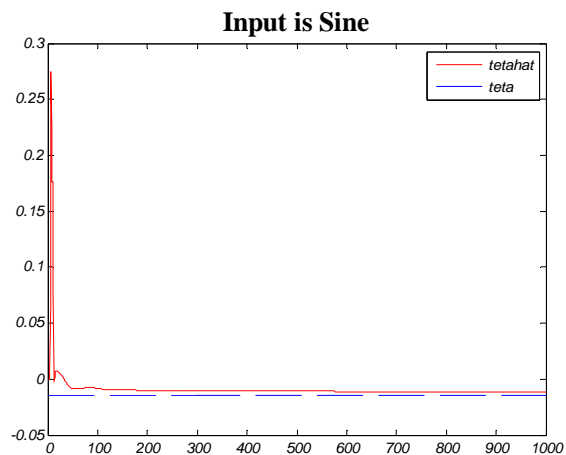
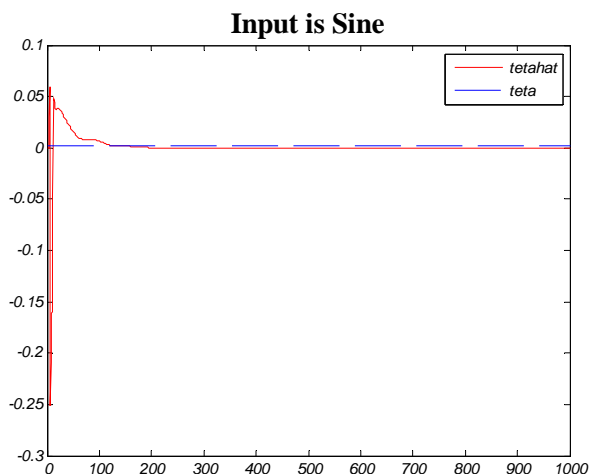
(از مرتبه شش است). همچنان که در حالت off-line مشاهده کردیم در اینجا نیز انتظار می‌رود که تخمین

مناسبی از پارامترهای مدل داشته باشیم. شرایط اولیه را بصورت زیر در نظر گرفته‌ایم.

$$\hat{\theta}_0 = 0; P_0 = 10^5 I$$

شناسایی پارامترها به صورت اشکال (۱۹) انجام می‌شود.





شکل (۱۹): تخمین پارامترها با روش RLS و برای ورودی مجموع سه سینوسی و خروجی بدون نویز.

همان طور که مشاهده می شود برای این ورودی تخمین های بدست آمده، تخمین های مناسبی هستند.

مرحله دوم: همان طور که گفته شد در این حالت خروجی را همراه با نویز سفید با واریانس ۰.۱

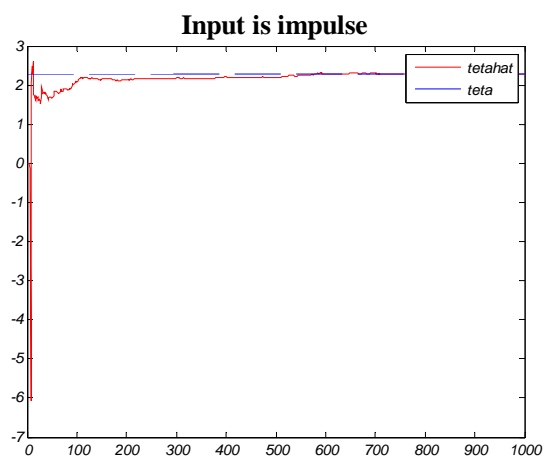
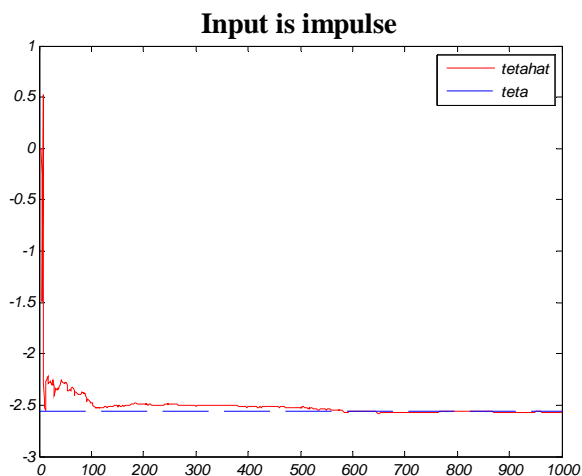
فرض می کنیم.

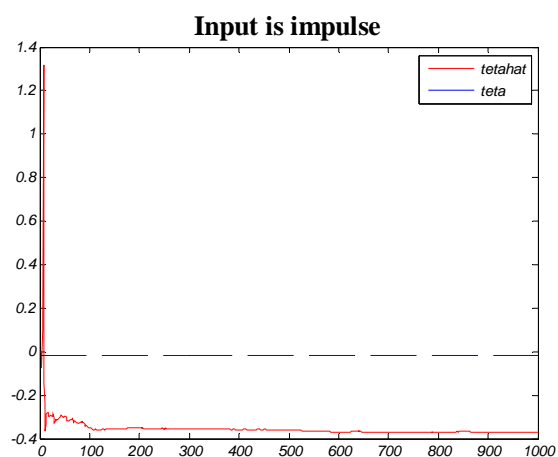
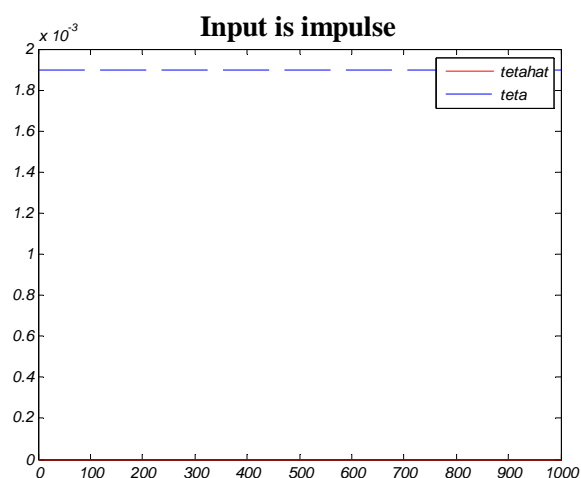
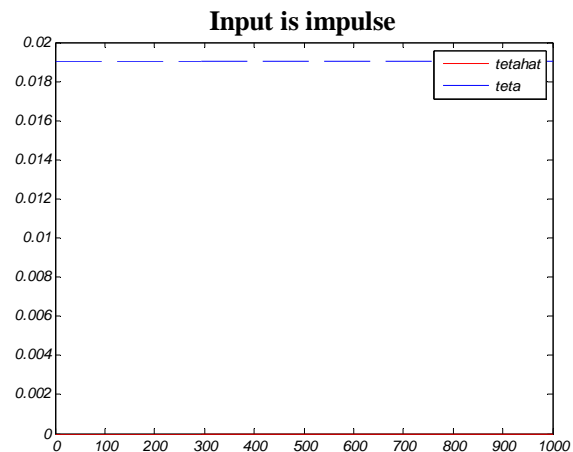
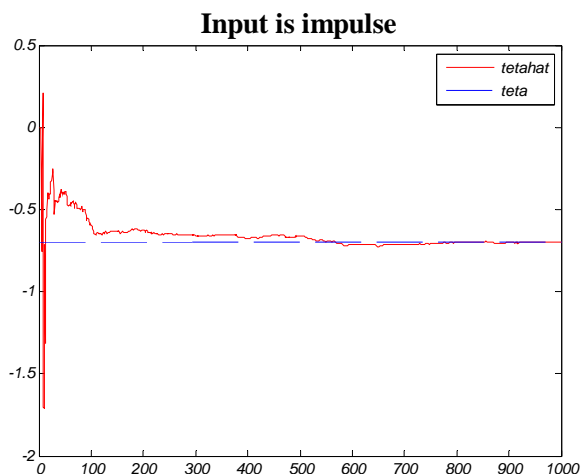
ورودی ضربه

شرایط اولیه را بصورت زیر در نظر گرفته ایم.

$$\hat{\theta}_0 = 0; P_0 = 10^5 I$$

شناسایی پارامترها به صورت اشکال (۲۰) انجام می شود.





شکل (۲۰): تخمین پارامترها با روش RLS و برای ورودی ضربه و خروجی همراه با نویز سفید.

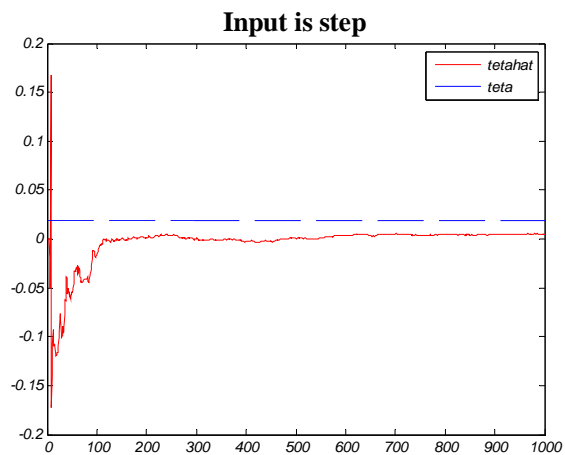
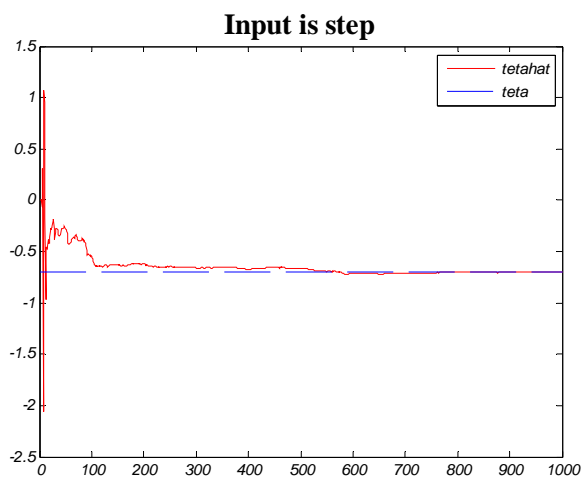
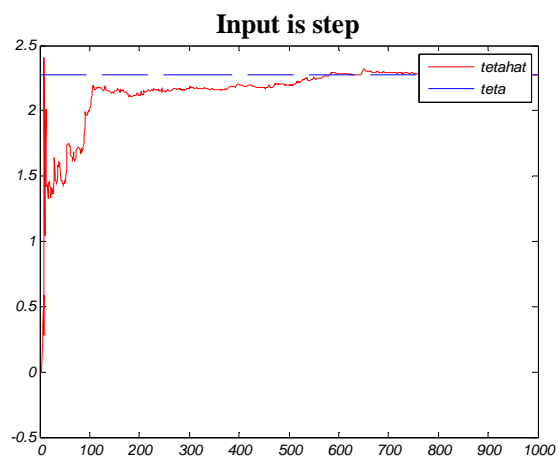
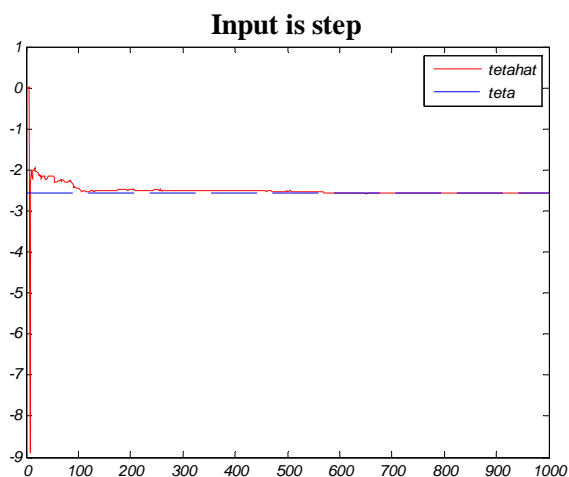
در روش on-line نیز مشاهده می‌شود که ورودی ضربه به دلیل این که PE از مرتبه لازم نیست قادر به شناسایی پارامترهای چندجمله‌ای $B(q^{-1})$ نمی‌باشد. در حالی که پارامترهای $A(q^{-1})$ به درستی به مقدار واقعی خود همگرا می‌شوند که دلیل آن وجود نویز سفید در خروجی سیستم است. توجه شود که در حالتی که در خروجی اندازه‌گیری شده نویز وجود نداشت، ورودی ضربه قادر به شناسایی هیچ کدام از پارامترهای مدل نمی‌باشد.

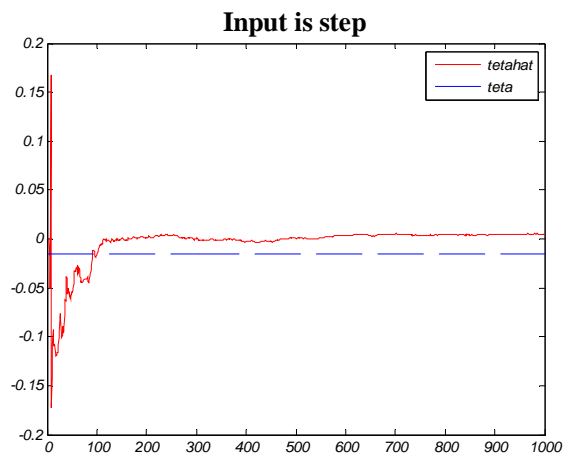
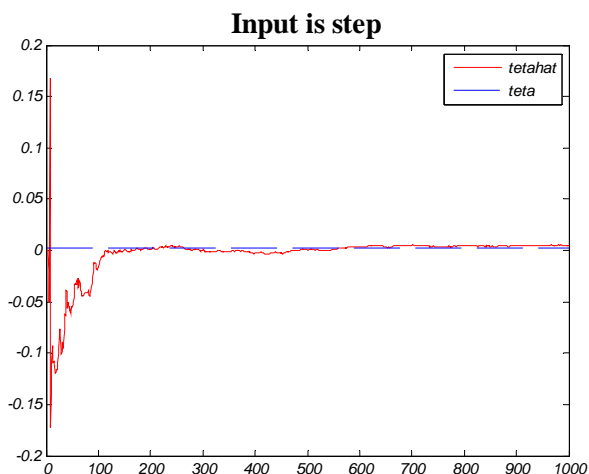
ورودی پله

در این مرحله نیز ورودی پله که PE از مرتبه‌ی لازم نیست را به عنوان ورودی انتخاب می‌کنیم. همچنان که در حالت off-line مشاهده کردیم در اینجا نیز انتظار می‌رود که تخمین مناسبی از پارامترهای مدل نداشته باشیم. شرایط اولیه را بصورت زیر در نظر گرفته‌ایم.

$$\hat{\theta}_0 = 0; P_0 = 10^5 I$$

شناسایی پارامترها به صورت اشکال (۲۱) انجام می‌شود.





شکل (۲۱): تخمین پارامترها با روش RLS و برای ورودی پله و خروجی همراه با نویز سفید.

در روش on-line نیز مشاهده می‌شود که ورودی پله به دلیل این که PE از مرتبه لازم نیست قادر به شناسایی پارامترهای چندجمله‌ای $B(q^{-1})$ نمی‌باشد. در حالی که پارامترهای $A(q^{-1})$ به درستی به مقدار واقعی خود همگرا می‌شوند که دلیل آن وجود نویز سفید در خروجی سیستم است.

ورودی سینوسی

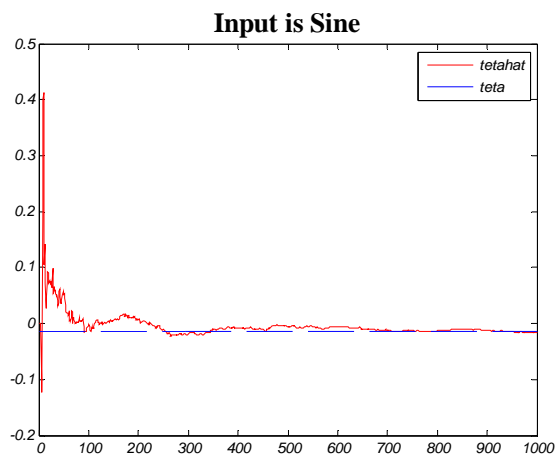
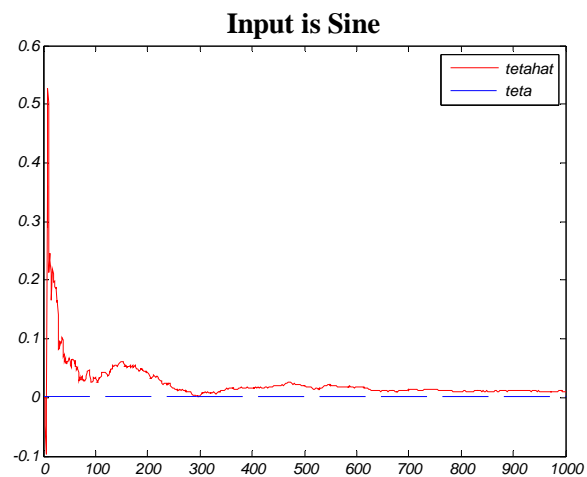
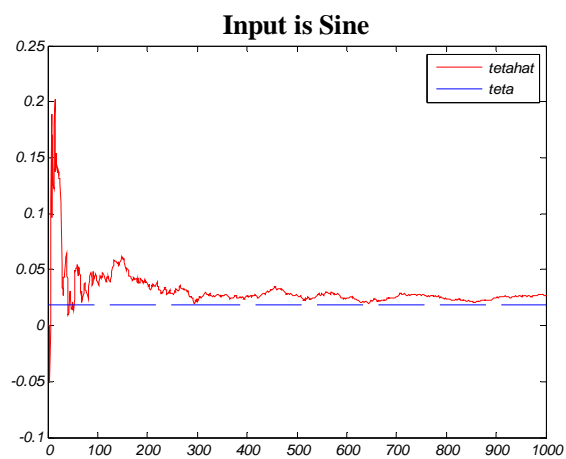
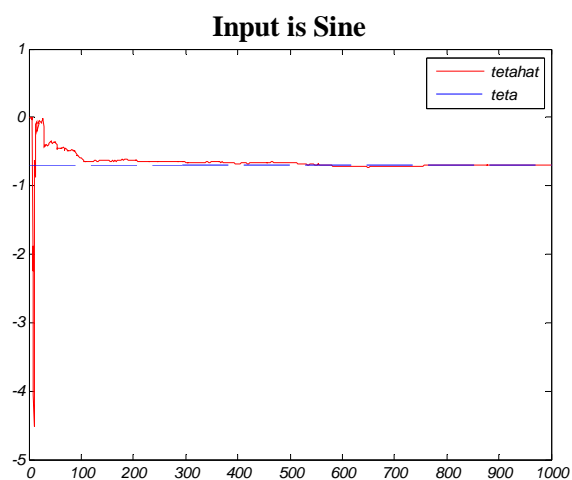
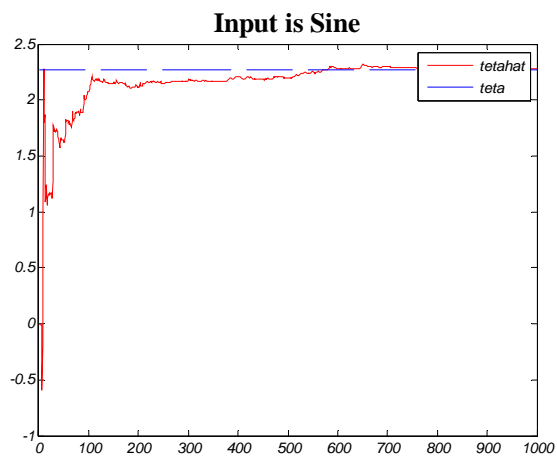
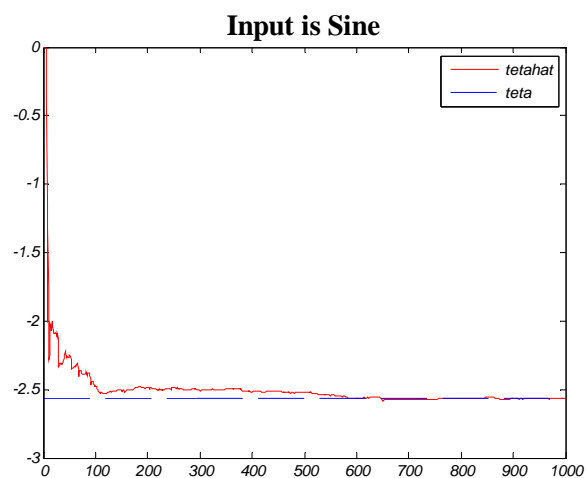
به عنوان ورودی دیگر سیگنال سینوسی را انتخاب می‌کنیم.

$$u(t) = \sin(x)$$

این ورودی نیز PE از مرتبه مناسب نمی‌باشد. همچنان که در حالت off-line مشاهده کردیم در اینجا نیز انتظار می‌رود که تخمین مناسبی از پارامترهای مدل نداشته باشیم. شرایط اولیه را بصورت زیر در نظر گرفته-ایم.

$$\hat{\theta}_0 = 0; P_0 = 10^5 I$$

شناسایی پارامترها به صورت اشکال (۲۲) انجام می‌شود.



شکل (۲۲): تخمین پارامترها با روش RLS و برای ورودی سینوسی و خروجی همراه با نویز سفید.

مشاهده می‌شود که ورودی سینوسی به دلیل این که PE از مرتبه لازم نیست قادر به شناسایی پارامترها نمی‌باشد.

ورودی مجموع دو سینوسی

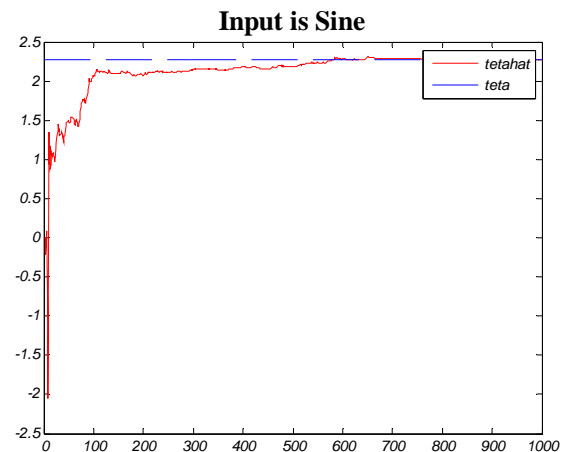
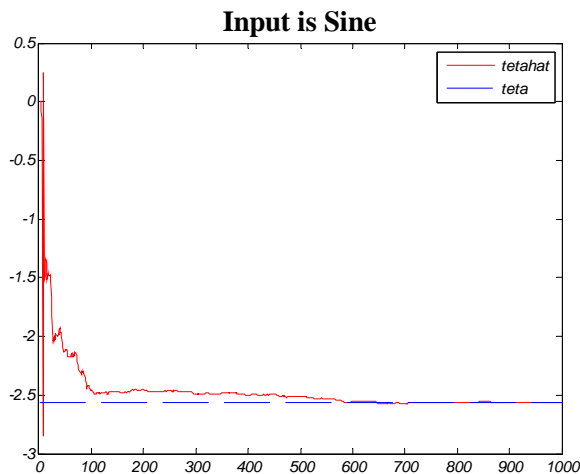
به عنوان ورودی دیگر مجموع دو سیگنال سینوسی را انتخاب می‌کنیم.

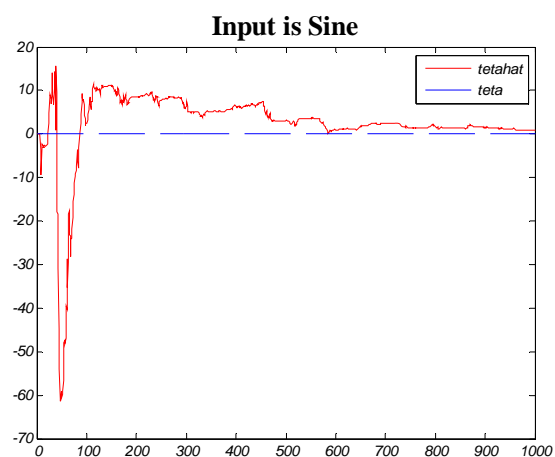
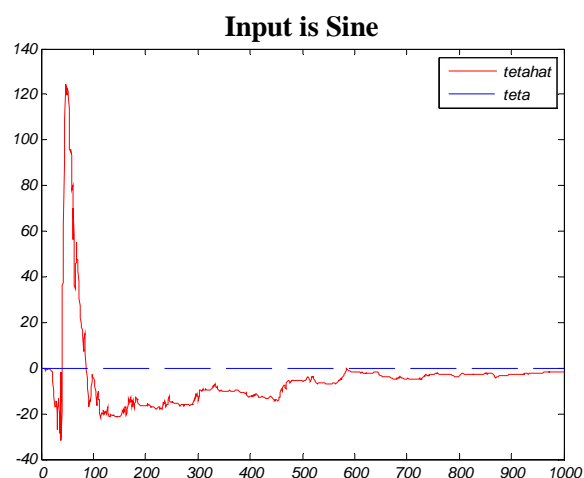
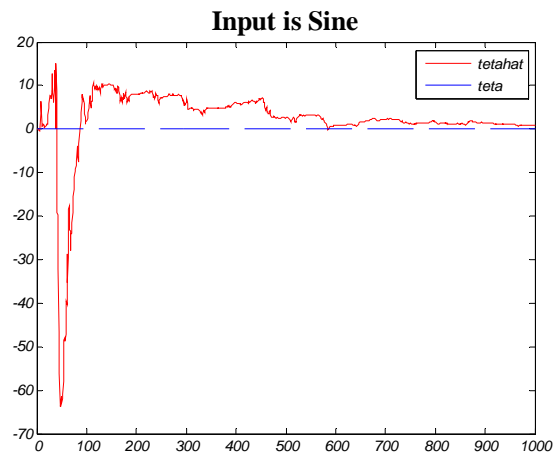
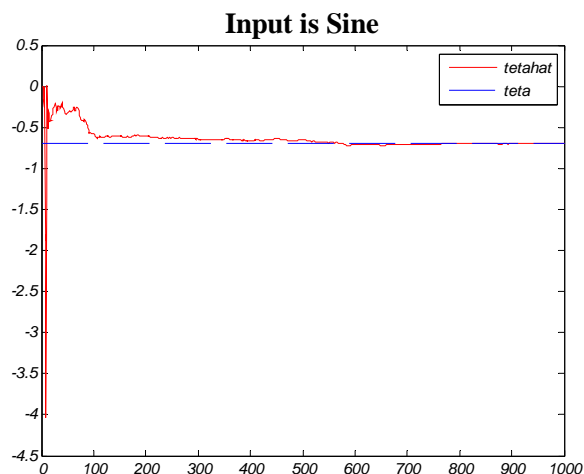
$$u(t) = \sin(x) + \sin(10x)$$

با توجه به وجود نویز سفید در خروجی پارامترهای $A(q^{-1})$ در تعداد پارامترهای تخمین زده محاسبه نشده و تعداد پارامترهای مورد نیاز برای تخمین سه پارامتر خواهند بود. مجموع دو سینوسی با فرکانس‌های مختلف، ورودی PE از مرتبه ۴ است. بنابراین انتظار می‌رود که تخمین مناسبی از پارامترهای مدل داشته باشیم. شرایط اولیه را بصورت زیر در نظر گرفته‌ایم.

$$\hat{\theta}_0 = 0; P_0 = 10^5 I$$

شناسایی پارامترها به صورت اشکال (۲۳) انجام می‌شود.





شکل (۲۳): تخمین پارامترها با روش RLS و برای ورودی مجموع دو سینوسی و خروجی همراه با نویز سفید.

از این بررسی‌ها می‌توان نتیجه گرفت که برای حالتی که در خروجی اندازه‌گیری شده نویز سفید وجود

نداشته باشد، نیاز به ورودی با PE بیشتری برای شناسایی درست پارامترها خواهیم داشت.

حال بدنبال نشان دادن شرایط اولیه بر روی تخمین پارامترها هستیم. برای این منظور اثر تغییر شرایط اولیه

پارامترها بر روی تخمین و اثر ماتریس کواریانس اولیه بر روی تخمین را جداگانه بررسی می‌کنیم.

می‌دانیم که مقادیری که پارامترهای تخمین به آن همگرا می‌شوند مستقل از مقدار اولیه پارامترهاست و

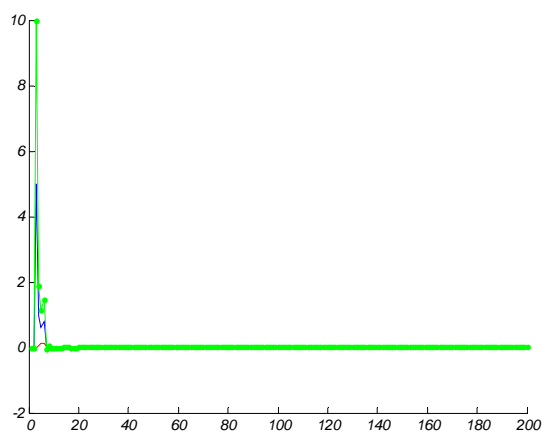
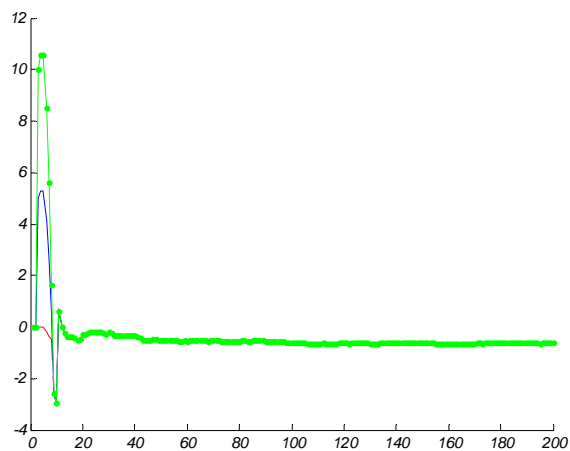
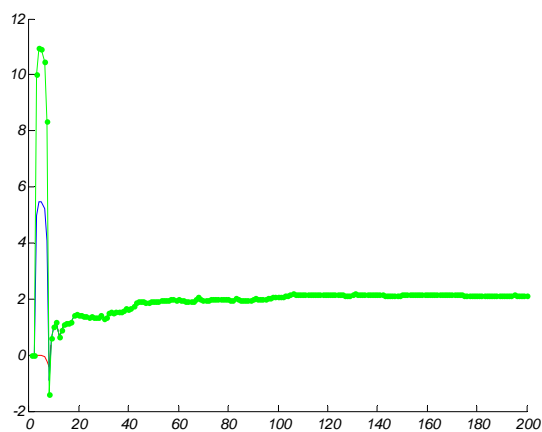
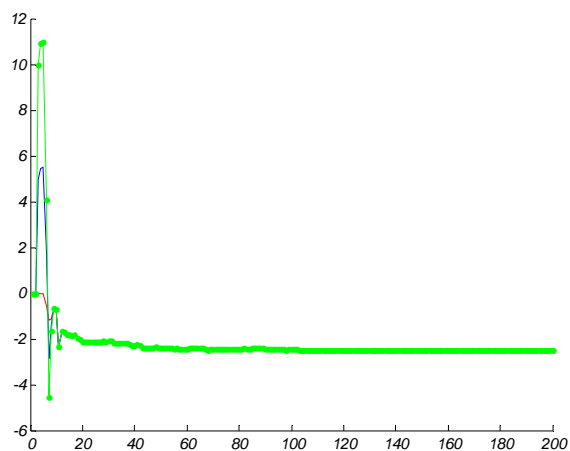
بستگی به مقدار اولیه پارامترها ندارد. ضمناً می‌دانیم که هر چه شرایط اولیه از مقادیر واقعی دورتر باشد زمان

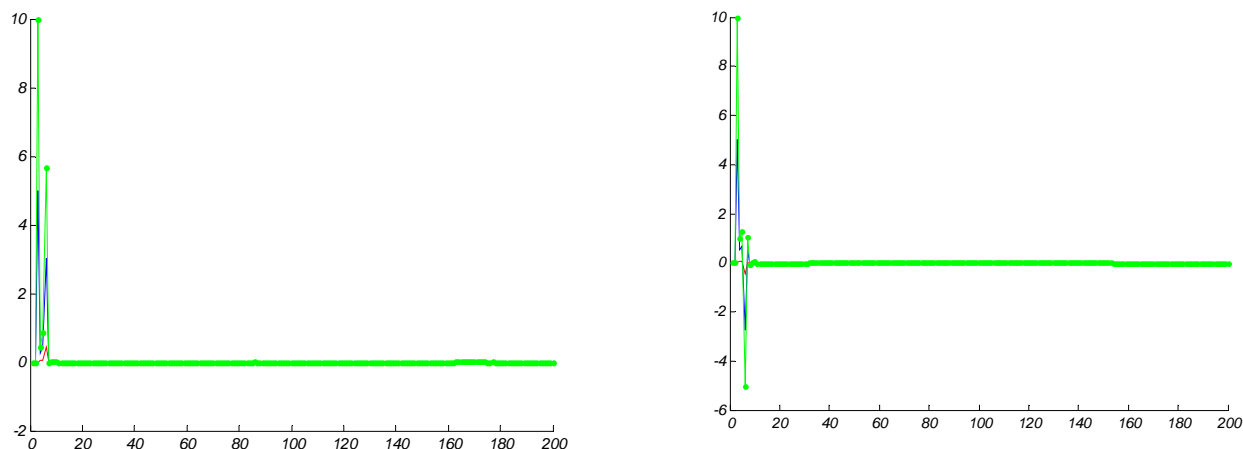
لازم برای همگرایی به مقادیر واقعی بیشتر خواهد بود. برای بررسی این موضوعات مقدار اولیه پارامترها را

تغییر داده و صحت آنها را بررسی می‌کنیم. در هر مرحله، مقادیر اولیه این پارامترها را برابر یکی از ستون‌های ماتریس زیر قرار خواهیم داد.

$$\theta_0 = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 10 \\ 0 & 5 & 10 \end{bmatrix}$$

ضمناً $P_0 = 10^{10}I$ در اشکال (۲۴) نمودار تخمین پارامترها برای این شرایط اولیه آورده شده‌اند. (به منظور نشان دادن بهتر اشکال تنها ۲۰۰ تکرار اول آنها آورده شده‌اند).





شکل (۲۴): نمودار تخمین پارامترها برای شرایط اولیه متفاوت.

همانطور که دیده می‌شود همه نمودارها با یک مقدار همگرا شده و در ضمن مشاهده می‌شود که زمان همگرایی پارامترها با دور شدن شرایط اولیه از مقادیر واقعی افزایش می‌یابد. بنابراین اگر شرایط اولیه به مقادیر واقعی نزدیک باشند، الگوریتم سریعتر همگرا خواهد شد. نتایج این تخمین‌ها و تابع معیار متناظر با آنها در جدول نه آمده است.

جدول نه: نتایج تخمین‌ها و تابع معیار متناظر با آنها برای شرایط اولیه متفاوت.

پارامترها	a_1	a_2	a_3	b_1	b_2	b_3	v
$\hat{\theta}_0 = 0$	-2.561	2.263	-0.689	0.0182	0.0019	-0.0138	189.3
$\hat{\theta}_0 = 5I$	-2.561	2.263	-0.689	0.0182	0.0019	-0.0138	5074.9
$\hat{\theta}_0 = 10I$	-2.561	2.263	-0.689	0.0182	0.0019	-0.0138	18208

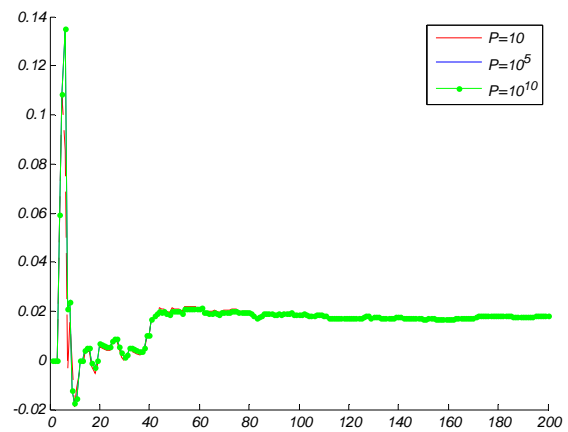
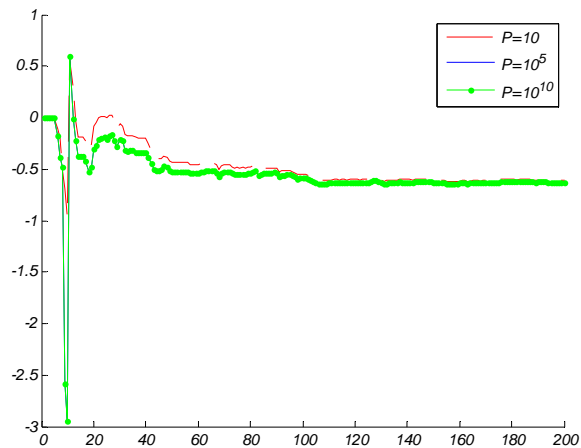
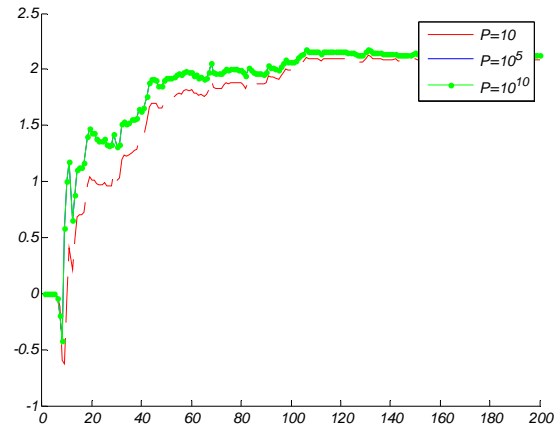
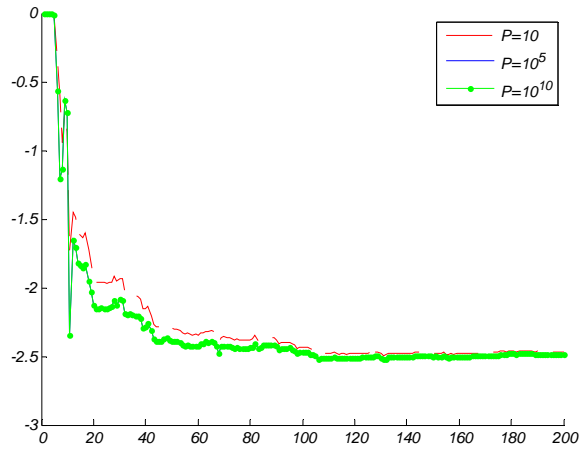
همان طور که مشاهده می‌شود با دور شدن شرایط اولیه پارامترها از مقدار واقعی آنها، مقدار تابع معیار نیز افزایش می‌یابد، اما مقادیر همگرایی پارامترها تغییری نداشته است.

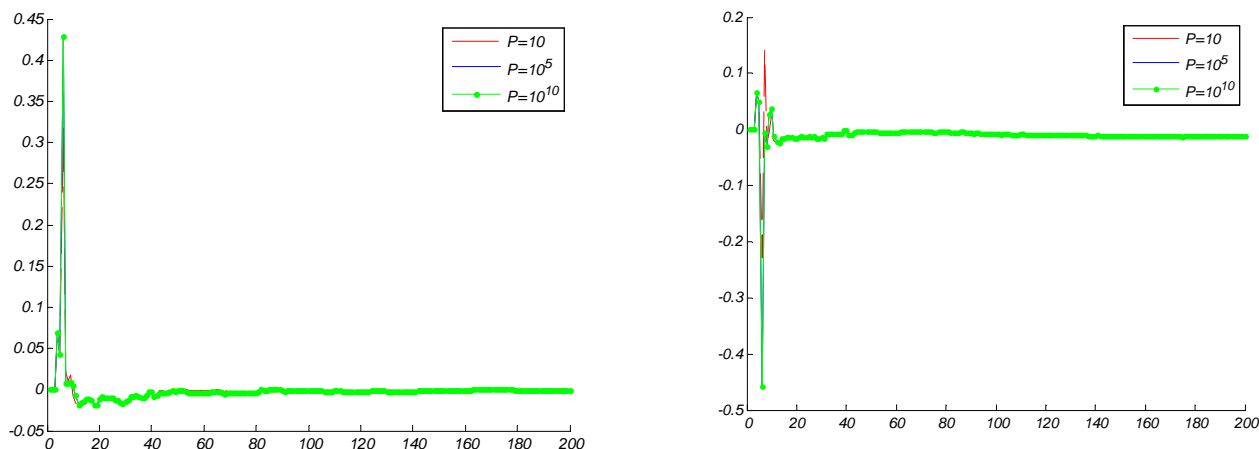
حال به بررسی اثر ماتریس کواریانس اولیه می‌پردازیم. برای این منظور سه حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$P_0 = 10I, P_0 = 10^5I, P_0 = 10^{10}I$$

ضمناً $\hat{\theta}_0 = \bar{0}$ در اشکال (۲۵) نمودار تخمین پارامترها برای این ماتریس‌های کواریانس اولیه آورده شده‌اند.

(به منظور نشان دادن بهتر اشکال تنها ۲۰۰ تکرار اول آنها آورده شده‌اند.)





شکل (۲۵): نمودار تخمین پارامترها برای ماتریس‌های کواریانس اولیه متفاوت.

همانطور که دیده می‌شود همه نمودارها با یک مقدار همگرا شده و در ضمن مشاهده می‌شود که زمان همگرایی پارامترها با بزرگتر شدن ماتریس کواریانس اولیه کمتر می‌شود.

۲-۳ در تمام قسمت‌های مربوط به مطالعه اثر مدل جهت اطمینان از PE بودن ورودی، ورودی را نویز سفید با واریانس ۱۰۰ انتخاب کرده‌ایم. همچنین شرایط اولیه را بصورت زیر در نظر می‌گیریم:

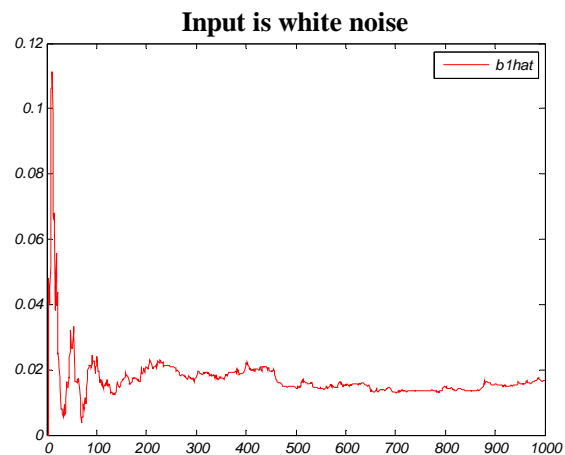
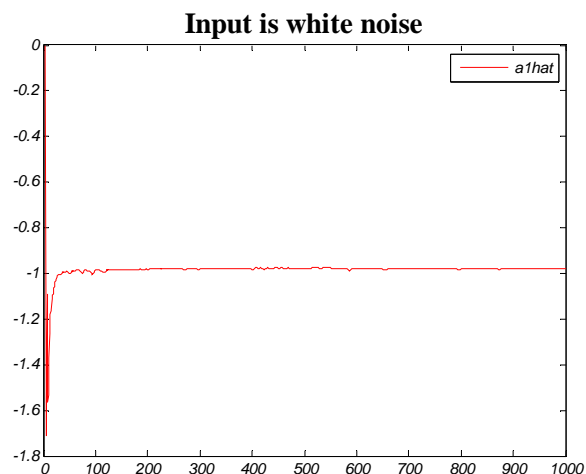
$$\hat{\theta}_0 = 0; P_0 = 10^5 I$$

به منظور مقایسه بین مدل‌های در نظر گرفته از تابع معیار $V = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N (y(t) - \hat{y}(t))^2$ استفاده شده است.

نتایج در جدول ده آورده شده است.

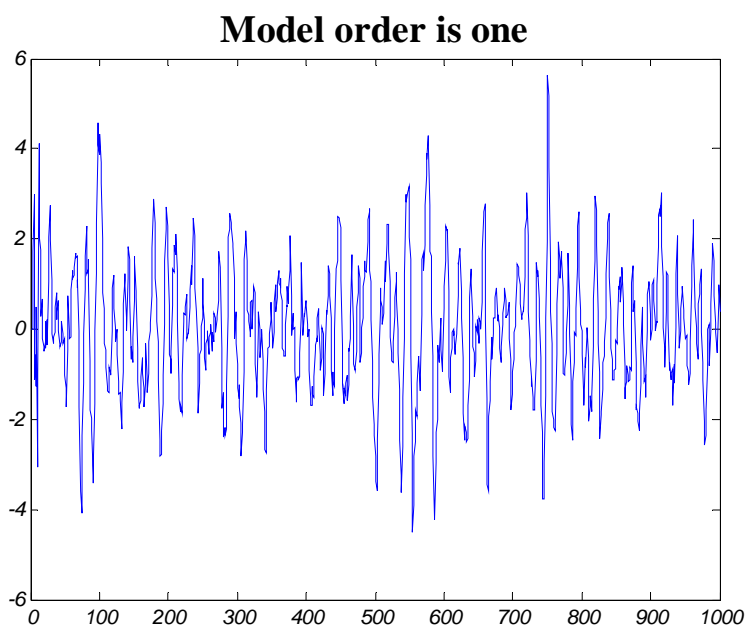
مدل درجه ۱

با در نظر گرفتن یک مدل درجه ۱ برای مدل و تخمین دو پارامتر آن نتایج بصورت شکل (۲۶) خواهد بود.



شکل (۲۶): نمودار تخمین پارامترهای مدل مرتبه یک با ورودی نویز سفید.

در شکل (۲۷) نمودار خطا $(y(t) - \hat{y}(t))$ برای این مدل آورده شده است:



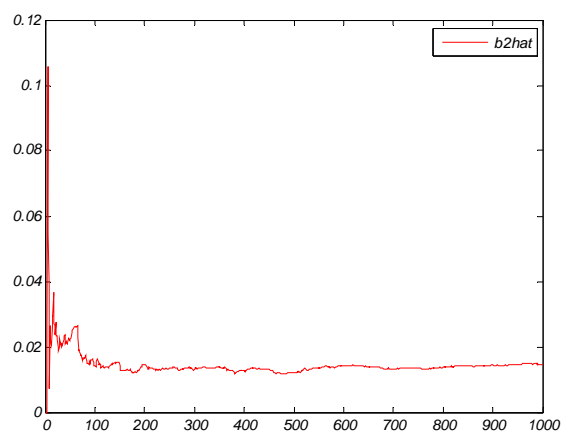
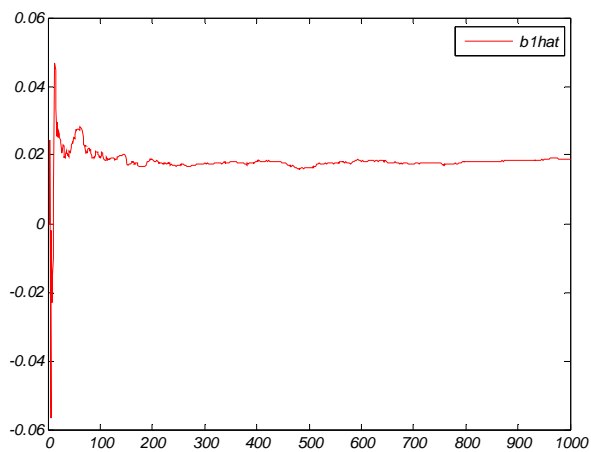
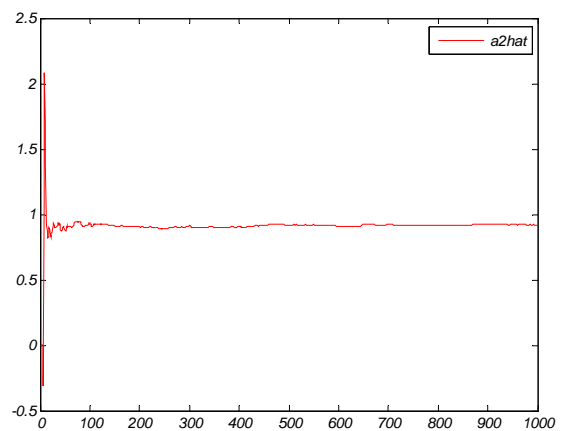
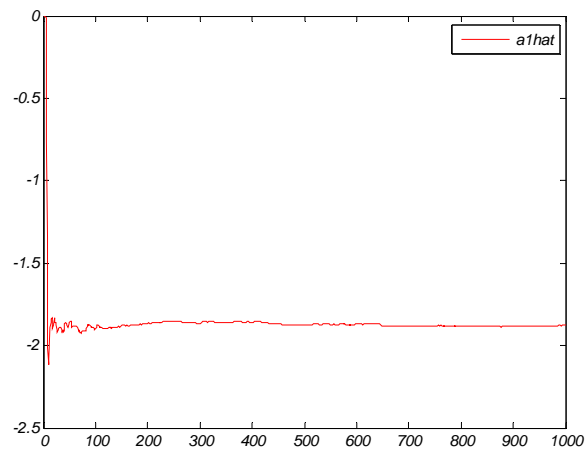
شکل (۲۷): نمودار خطای تخمین بین خروجی مدل مرتبه یک و خروجی سیستم اصلی با ورودی نویز سفید برای شناسایی.

مشاهده می‌شود که برای این مدل خطای تخمین زیاد است.

مدل درجه ۲

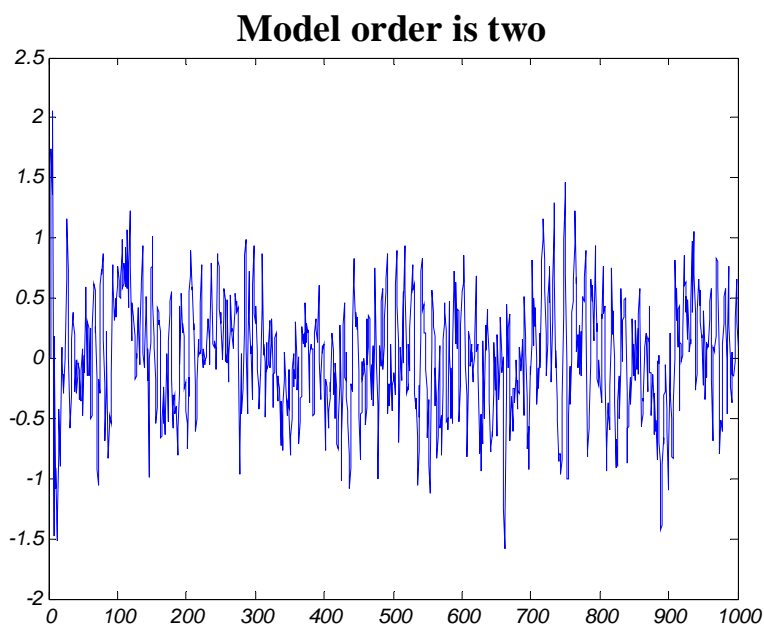
حال مدل را درجه دو انتخاب کرده و تخمین را برای پارامترهای سیستم انجام می‌دهیم. تخمین بدست آمده

برای پارامترهای این مدل در شکل (۲۸) آمده‌اند.



شکل (۲۸): نمودار تخمین پارامترهای مدل مرتبه دوم با ورودی نویز سفید.

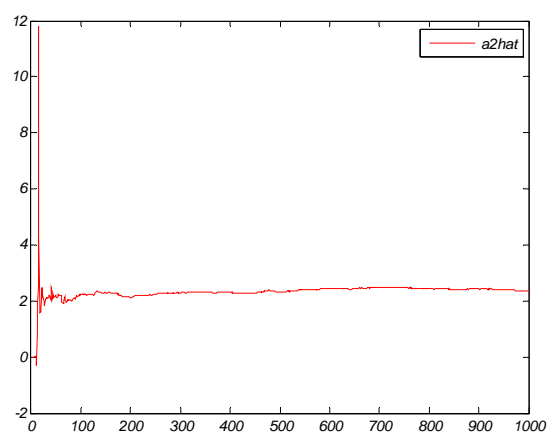
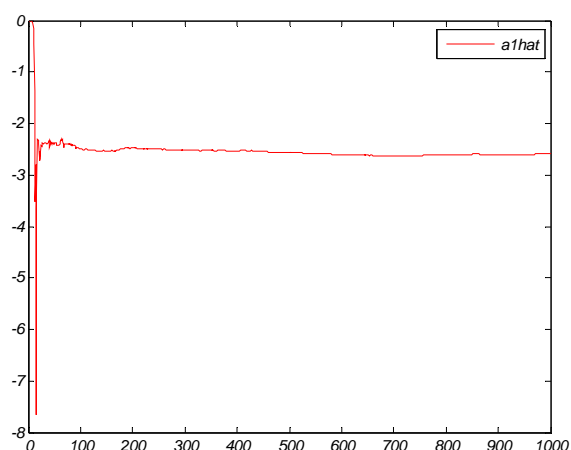
در شکل (۲۹) نمودار خطا $(y(t) - \hat{y}(t))$ برای این مدل آورده شده است:

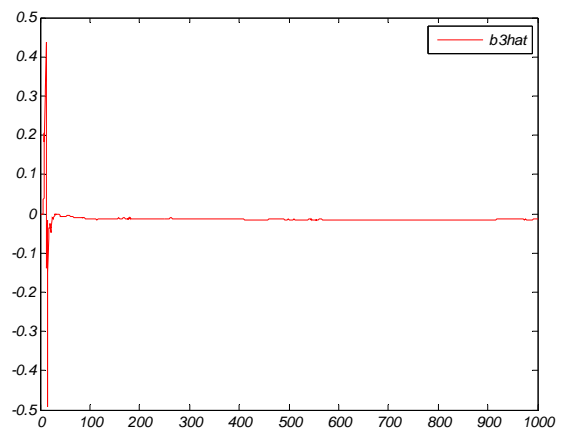
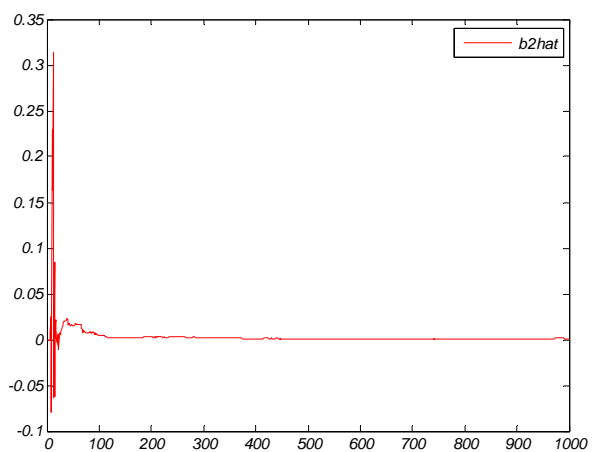
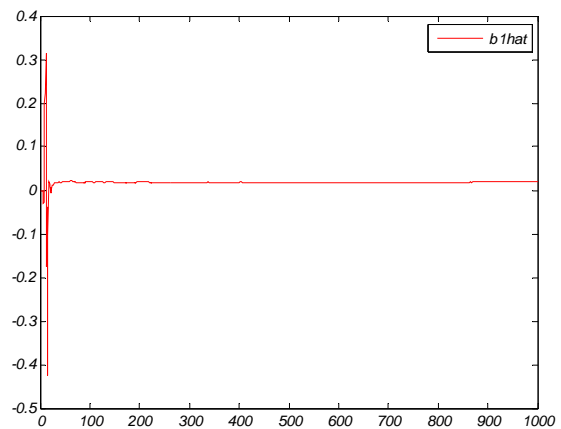
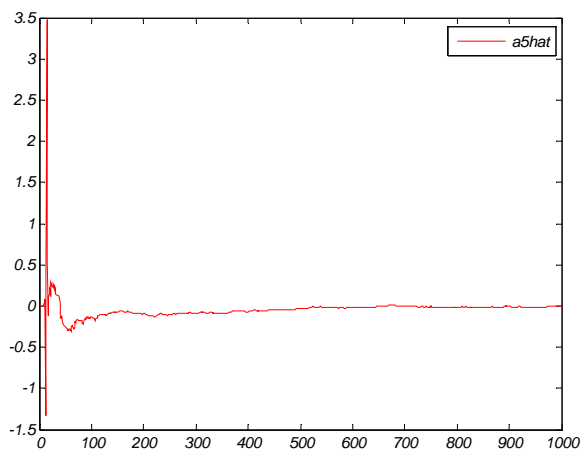
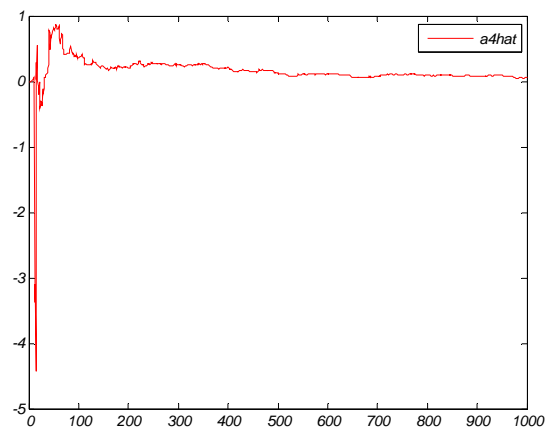
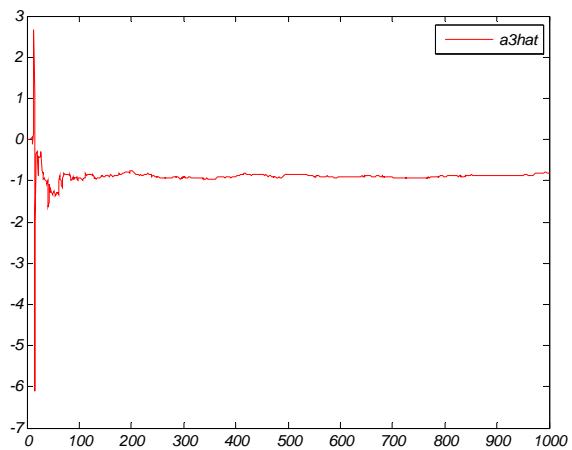


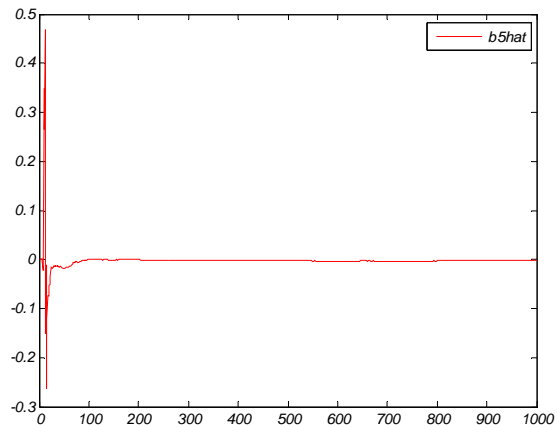
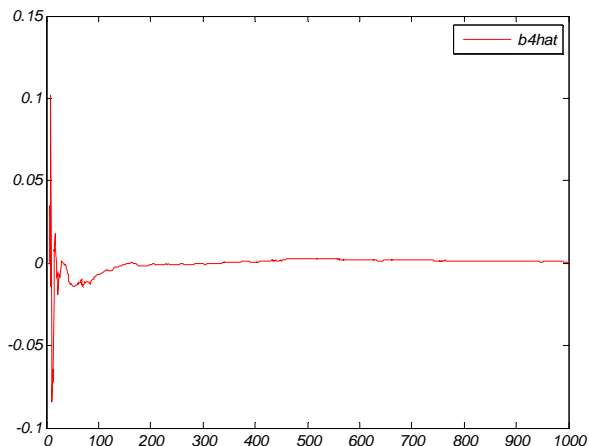
شکل (۲۹): نمودار خطای تخمین بین خروجی مدل مرتبه دوم و خروجی سیستم اصلی با ورودی نویز سفید برای شناسایی.

مشاهده می‌شود که برای این مدل خطای تخمین مناسب (کم) است.

اکنون مدل‌های مرتبه بالاتر سیستم اصلی را در نظر می‌گیریم. همان طور که می‌دانیم این مدل‌ها بدلیل داشتن پارامترهای بیشتر، توانایی مدل کردن بهتر سیستم را دارا می‌باشند. برای این منظور ابتدا مدل مرتبه پنج را در نظر می‌گیریم. تخمین پارامترهای این مدل بصورت شکل (۳۰) خواهد بود.

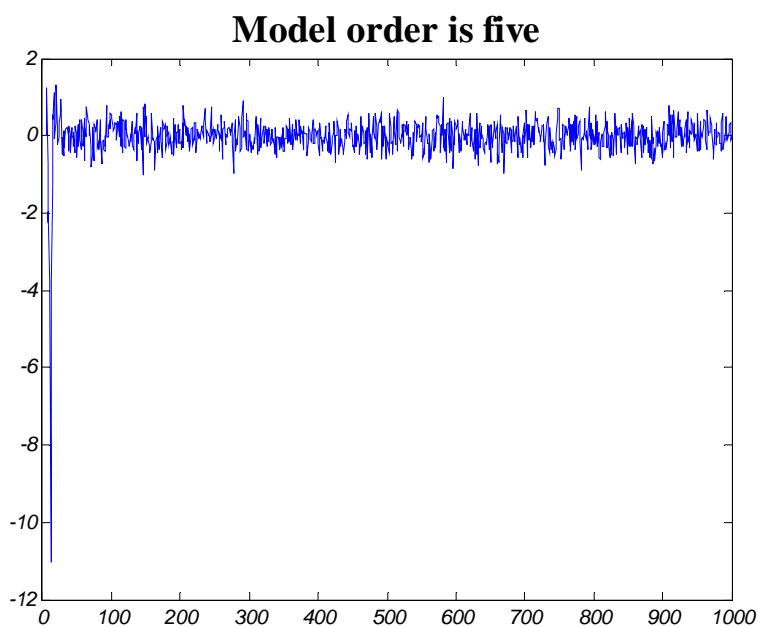






شکل (۳۰): نمودار تخمین پارامترهای مدل مرتبه پنج با ورودی نویز سفید.

لازم است که به این نکته توجه شود که در این مدل تمامی پارامترهای سیستم $(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2)$ و (b_3) به مقدار واقعی خود همگرا شده‌اند و پارامترهای اضافی که در این مدل در نظر گرفته شده‌اند (a_4, a_5, b_4) و (b_5) در نهایت به مقدار خیلی کوچک و نزدیک به صفر میل کرده‌اند و این موضوع نشان می‌دهد که این پارامترها در این مدل اضافی می‌باشند. در شکل (۳۱) نمودار خطا $(y(t) - \hat{y}(t))$ برای این مدل درجه پنج آورده شده است:



شکل (۳۱): نمودار خطای تخمین بین خروجی مدل مرتبه پنج و خروجی سیستم اصلی با ورودی نویز سفید برای شناسایی.

مشاهده می‌شود که برای این مدل خطای تخمین مناسب (کم) است.

برای سیستم مرتبه ده نیز همین کار انجام شده است. بدلیل تعداد زیاد پارامترها در این مدل از آوردن نمودار این پارامترها صرف نظر شده است. برای این مدل نیز پارامترهای اضافی مقادیر بسیار کوچکی به خود می‌گیرند. در شکل (۳۲) نمودار خطا $(y(t) - \hat{y}(t))$ برای این مدل آورده شده است:



شکل (۳۲): نمودار خطای تخمین بین خروجی مدل مرتبه ده و خروجی سیستم اصلی با ورودی نویز سفید برای شناسایی.

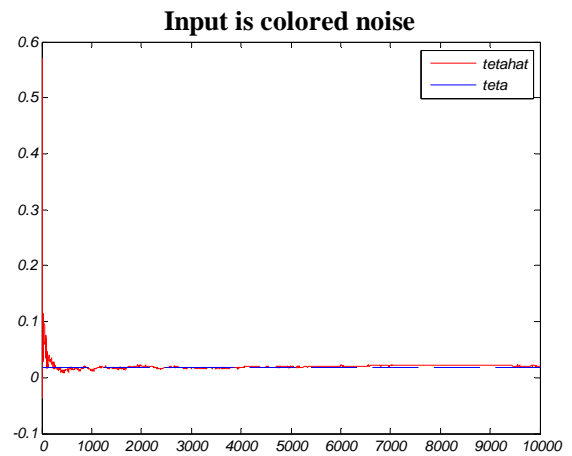
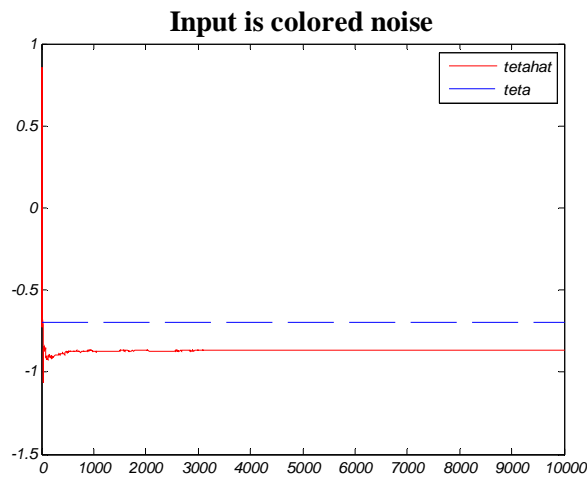
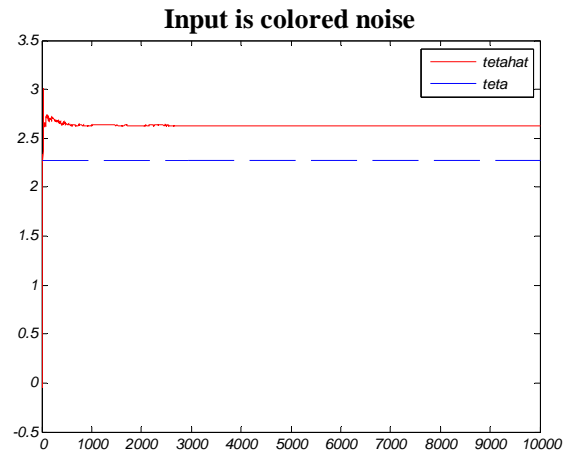
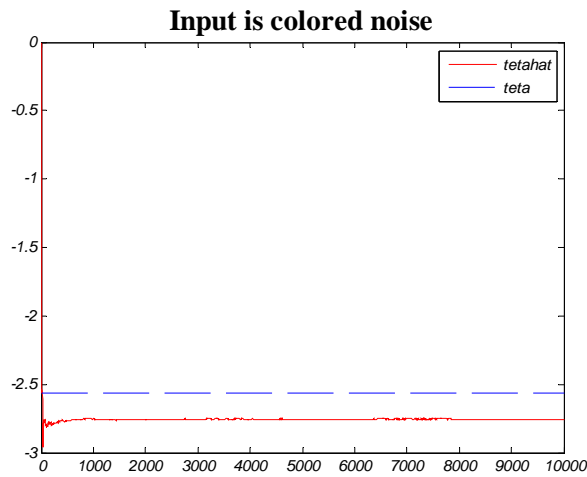
همان طور که گفته شد برای انجام مقایسه بهتر بین مدل‌های در نظر گرفته، مقادیر تابع معیار برای این پنج مدل و مدل درجه سه در جدول ده آورده شده‌اند.

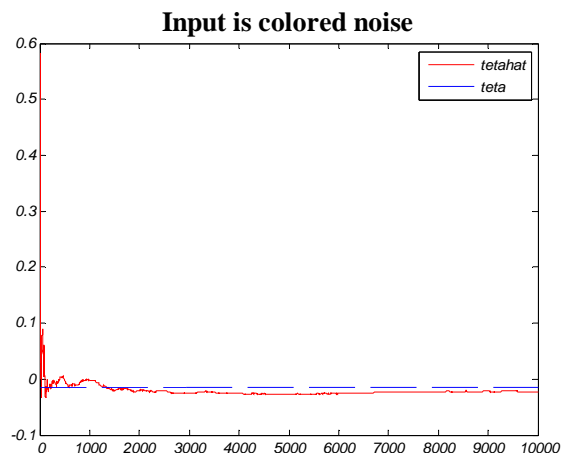
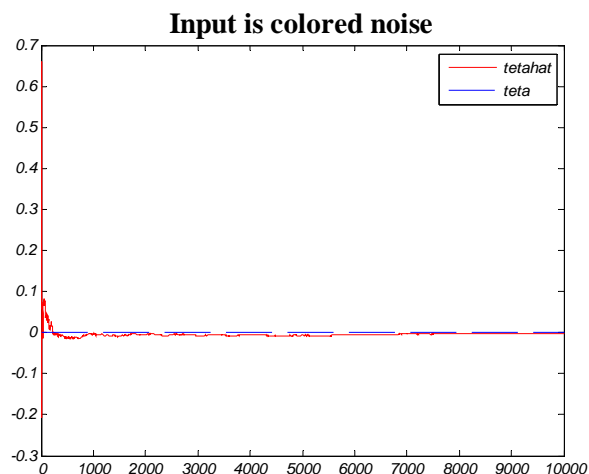
جدول ده: مقادیر تابع معیار برای مدل‌های در نظر گرفته.

مرتبۀ مدل	۱	۲	۳	۵	۱۰
تابع معیار	1716.65	246.31	128.05	147.47	150.06

از این جدول می‌توان مشاهده کرد که مدل درجه یک نمی‌تواند مدلی مناسب برای سیستم باشد. اما سایر مدل‌ها می‌توانند بخوبی برای این سیستم مورد استفاده قرار گیرند.

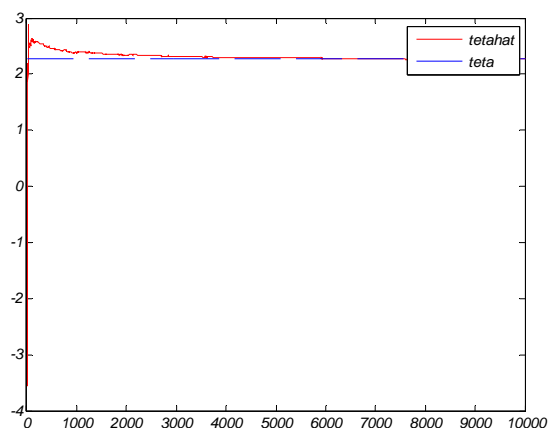
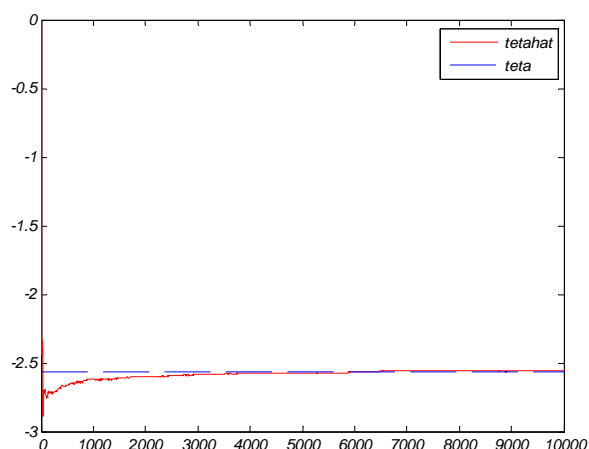
۲-۴) برای داشتن نویز رنگی نویز سفید را ابتدا از یک فیلتر عبور داده و سپس به سیستم اعمال می‌کنیم. همان طور که می‌دانیم در صورتی که به خروجی سیستم نویز رنگی اضافه شده باشد، تخمین بدست آمده از روش RLS دارای بایاس خواهد بود. برای فیلتر $C(q^{-1}) = 1 + 0.5q^{-1}$ و با فرض داشتن نویز سفید با واریانس ۰.۱ در ورودی فیلتر و استفاده از نویز سفید با واریانس ۱۰۰ به عنوان ورودی شناسایی سیستم، نتایج تخمین بصورت شکل (۳۳) می‌باشد (تعداد نمونه‌ها برابر ده هزار نمونه است):

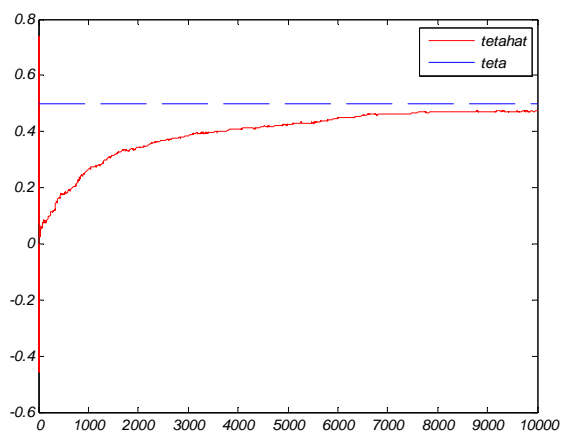
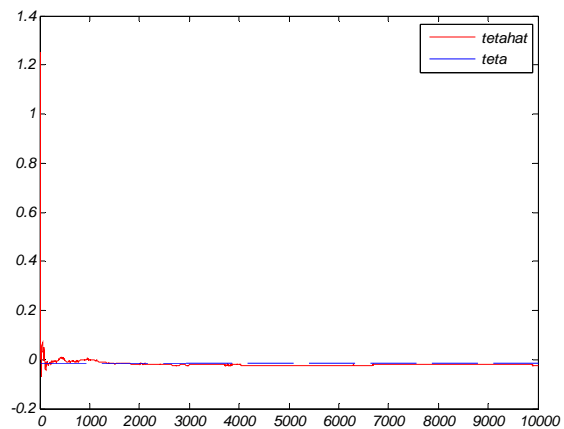
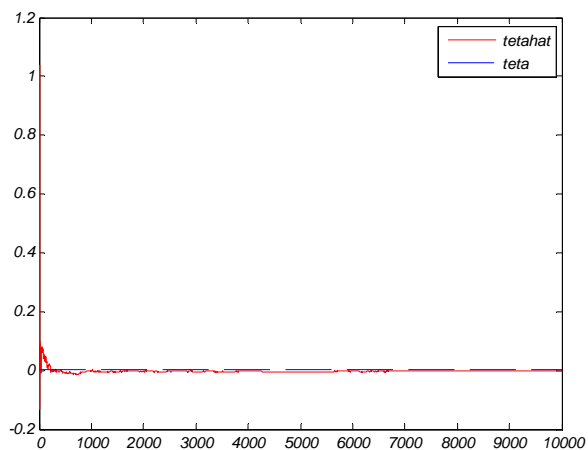
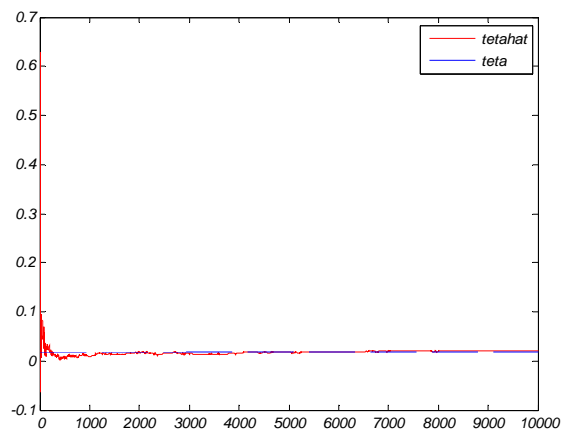
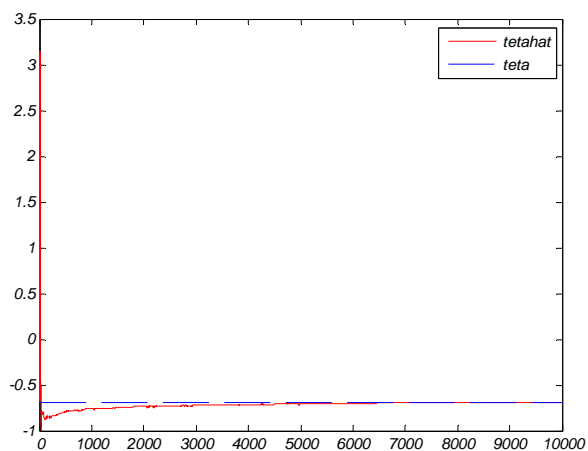




شکل (۳۳): نمودار تخمین پارامترهای مدل با روش RLS و با وجود نویز رنگی در خروجی و ورودی شناسایی نویز سفید.

همان طور که انتظار داشتیم به دلیل سفید نبودن نویز تخمین‌ها دارای بایاس بوده و مناسب نمی‌باشند. در حالتی که نویز رنگی باشد از الگوریتم ELS استفاده خواهیم کرد. با استفاده از این الگوریتم نه تنها می‌توان پارامترهای سیستم را تخمین زد، که می‌توان پارامترهای فیلتر نویز را نیز شناسایی کرد. با فرض نویز سفید با واریانس ۱۰۰ به عنوان ورودی شناسایی سیستم و با فرض نویز سفید در ورودی فیلتر با واریانس ۰.۱ و عبور آن از فیلتر $C(q^{-1}) = 1 + 0.5q^{-1}$ تخمین انجام شده توسط ELS بصورت شکل (۳۴) می‌باشد.





شکل (۳۴): نمودار تخمین پارامترهای مدل و فیلتر نویز با روش ELS و با وجود نویز رنگی در خروجی و ورودی شناسایی نویز سفید.

مشاهده می‌شود که پارامترهای مدل و فیلتر نویز بنحو مناسبی تخمین زده شده‌اند. به منظور خلاصه کردن گزارش از آوردن نمودار تخمین پارامترها برای حالتی که نویز سفید با واریانس ۱ از فیلتر $C(q^{-1}) = 1 + 0.5q^{-1}$ عبور کند، نیاورده شده‌اند. در جدول یازده مقادیر تابع معیار برای این چهار حالت آورده شده است.

جدول یازده: مقادیر تابع معیار

نوع نویز	White	Colored_RLS	Colored_ELS
$\sigma^2 = 0.1$	1031.03	1197.10	1097.22
$\sigma^2 = 1$	10242.08	11813.52	10427.32

همان طور که مشاهده می‌شود در حالتی که واریانس نویز سفید بیشتر بوده و از یک فیلتر عبور داده می‌شود، مجموع مربعات خطای آن نیز بیشتر است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که الگوریتم RLS در تخمین پارامترهای سیستمی که خروجی آن در معرض نویز رنگی می‌باشد با مشکل مواجه می‌شود.

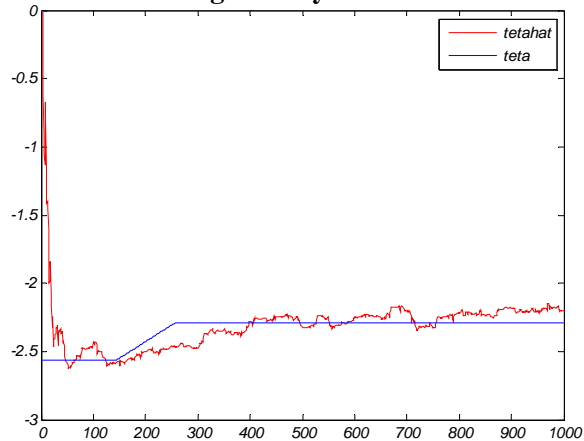
۵-۲) حال می‌خواهیم پارامترهای متغیر را تخمین بزنیم. برای این کار دو حالت پیش رو خواهیم داشت. پارامترها یا به آهستگی تغییر می‌کنند و یا تغییرات آنها ناگهانی می‌باشد. برای هر کدام نیز می‌توان دو راه حل به کار برد. استفاده از فاکتور فراموشی و یا رست کردن ماتریس کوواریانس. هر کدام از این حالت‌ها را جداگانه بررسی می‌کنیم.

تغییر آهسته پارامترها

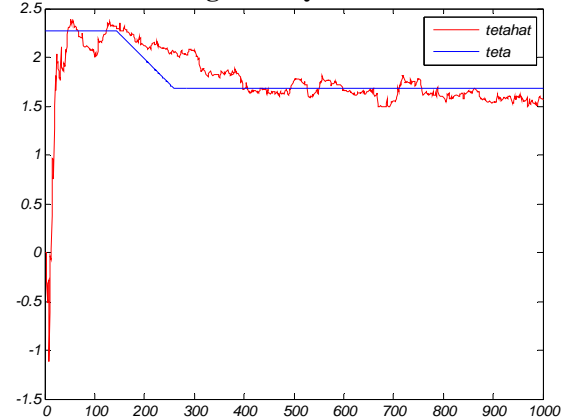
در بسیاری از سیستم‌ها پارامترهای سیستم متغیر با زمان هستند. لذا لازم است تغییر پارامترها در مدلی که برای سیستم در نظر می‌گیریم لحاظ شود. در سیستم داده شده، فرض می‌کنیم که در زمان حدود ۵۰ ثانیه که معادل نمونه ۱۴۳_ام است سه پارامتر a_1 ، a_2 و a_3 تغییر کنند. فرض کنیم که در مدت زمان ۴۰ ثانیه این سه پارامتر بصورت خطی با زمان تغییر کرده و به $a_1 = -2.287$ ، $a_2 = 1.685$ و $a_3 = -0.3887$ برسند. برای این تغییر پارامترها، سیستم کماکان پایدار می‌ماند.

ابتدا با استفاده از روش RLS با فاکتور فراموشی پارامترهای مدل را تخمین می‌زنیم. مدل را یک مدل درجه ۳ در نظر می‌گیریم. فاکتور فراموشی را برابر ۰.۹۹ فرض کنیم. در شکل (۳۵) پارامترهای ناشی از این تخمین آورده شده است:

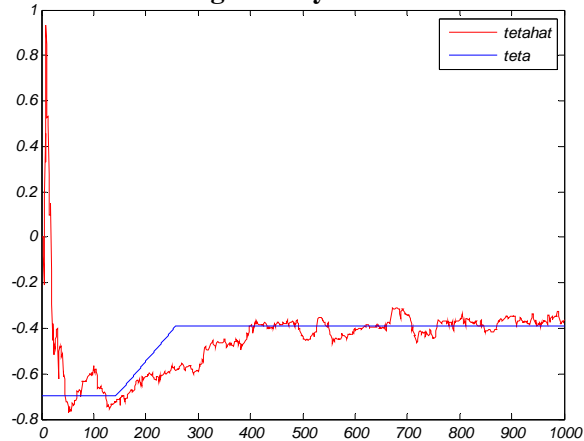
Parameters change Slowly and RLS with $\lambda = 0.99$



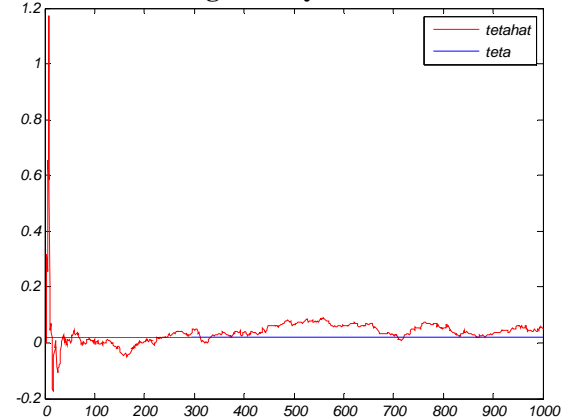
Parameters change Slowly and RLS with $\lambda = 0.99$



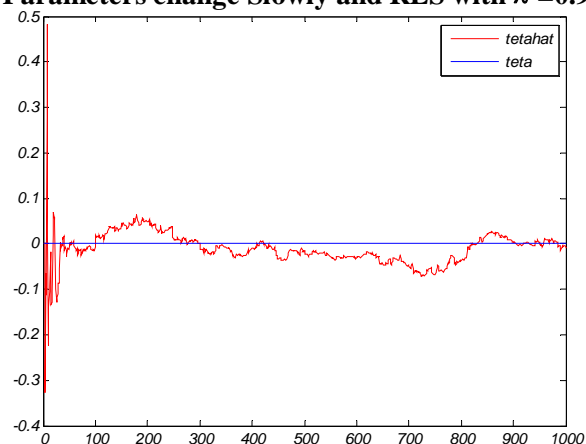
Parameters change Slowly and RLS with $\lambda = 0.99$



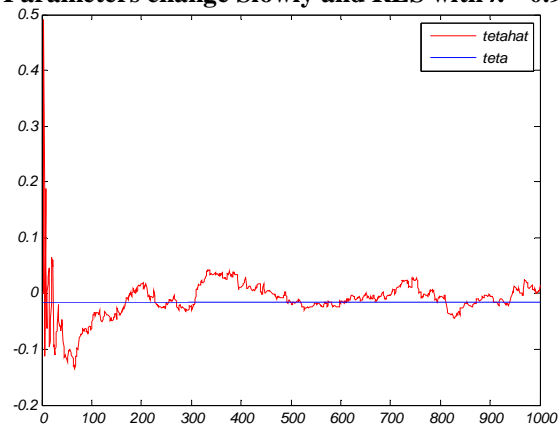
Parameters change Slowly and RLS with $\lambda = 0.99$



Parameters change Slowly and RLS with $\lambda = 0.99$



Parameters change Slowly and RLS with $\lambda = 0.99$

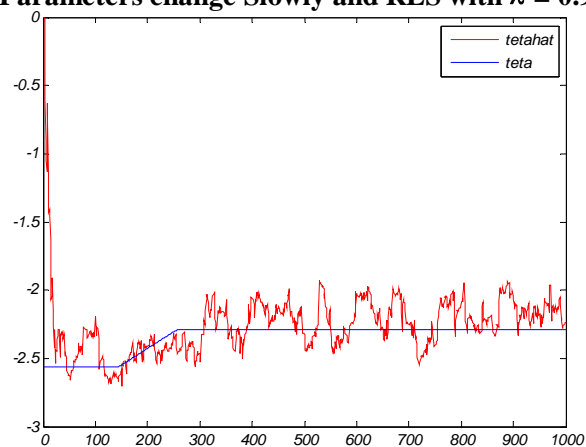


شکل (۳۵): نمودار تخمین پارامترها با روش RLS با فاکتور فراموشی را برابر ۰.۹۹ و با وجود تغییر آهسته در پارامترهای سیستم و ورودی نویز سفید.

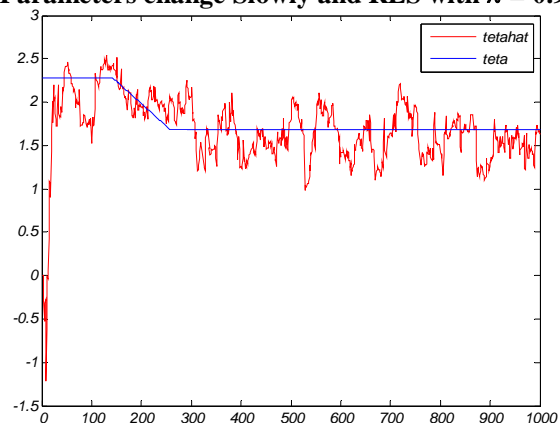
مشاهده می شود که با استفاده از فاکتور فراموشی سه پارامتر متغیر با زمان به درستی تخمین زده می شوند.

برای فاکتور فراموشی را برابر ۰.۹۵ تخمین های شکل (۳۶) بدست می آیند.

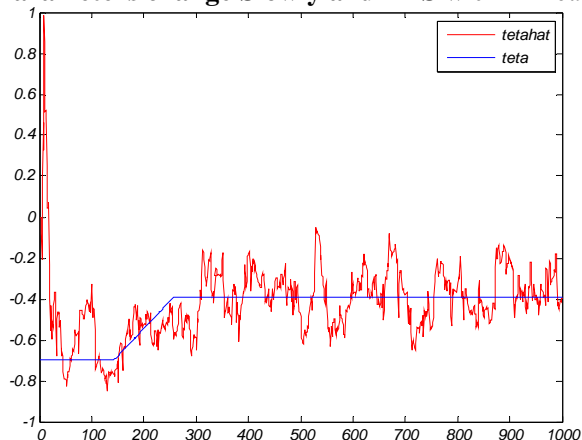
Parameters change Slowly and RLS with $\lambda = 0.95$



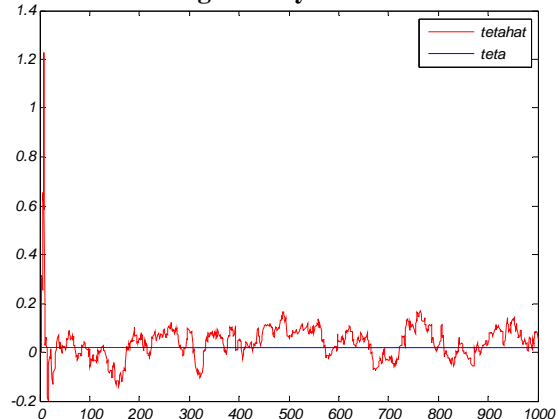
Parameters change Slowly and RLS with $\lambda = 0.95$



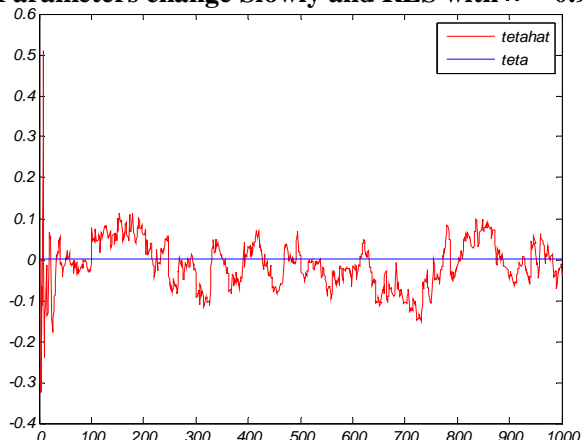
Parameters change Slowly and RLS with $\lambda = 0.95$



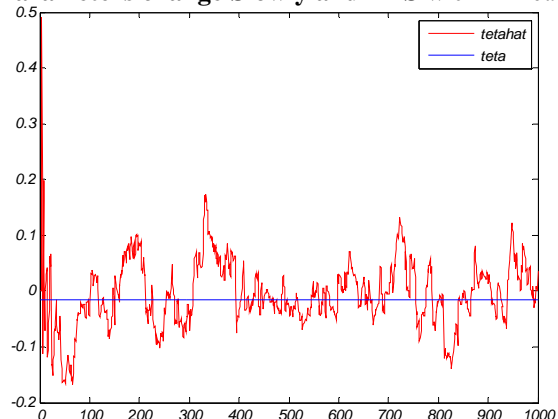
Parameters change Slowly and RLS with $\lambda = 0.95$



Parameters change Slowly and RLS with $\lambda = 0.95$



Parameters change Slowly and RLS with $\lambda = 0.95$



شکل (۳۶): نمودار تخمین پارامترها با روش RLS با فاکتور فراموشی را برابر ۰.۹۵ و با وجود تغییر آهسته در پارامترهای سیستم و ورودی نویز سفید.

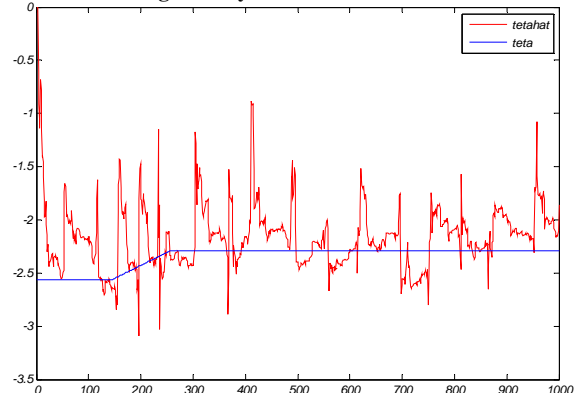
مشاهده می‌شود که استفاده از فاکتور فراموشی باعث نوسان در تخمین‌ها می‌شود و هر چه مقدار این فاکتور کوچکتر باشد، نوسان پارامترهای تخمین زده شده نیز بیشتر خواهد بود.

حال برای همین تغییرات پارامترهای سیستم را با استفاده از روش ریست کردن ماتریس کوواریانس تخمین خواهیم زد. برای این منظور دو روش متفاوت را دنبال خواهیم کرد. در روش اول با در نظر گرفتن یک سطح آستانه برای trace ماتریس کوواریانس (مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس کوواریانس)، زمانی که trace ماتریس کوواریانس از این سطح کمتر باشد، این ماتریس به مقدار اولیه خود ریست می‌شود. در شکل

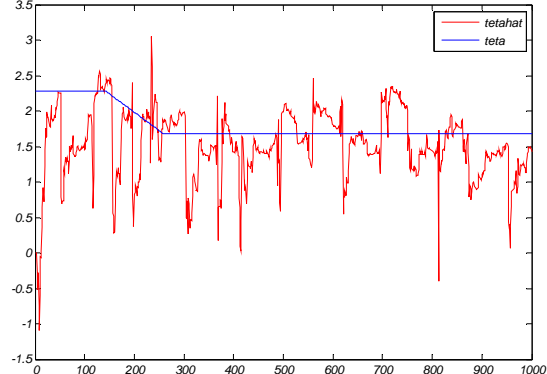
(۳۷) نمودار تخمین پارامترها برای زمانی که این سطح آستانه برابر ۱ فرض شده و نیز نمودار trace ماتریس

کواریانس در شکل (۳۸) آورده شده‌اند. ماتریس کواریانس اولیه را برابر $P_0 = 100I$ فرض کرده‌ایم.

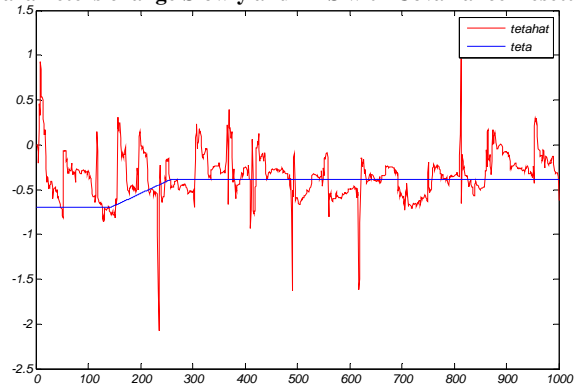
Parameters change Slowly and RLS with Covariance Resetting



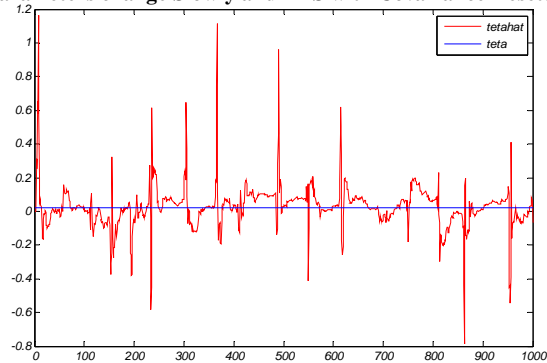
Parameters change Slowly and RLS with Covariance Resetting



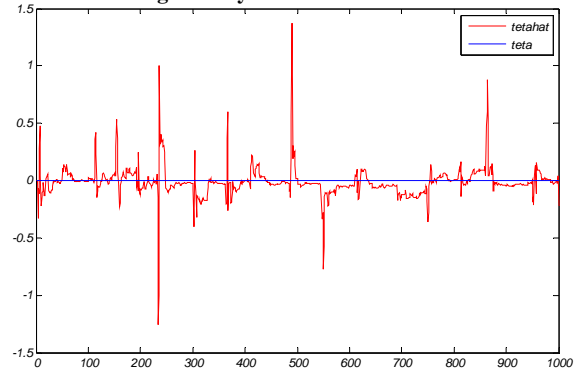
Parameters change Slowly and RLS with Covariance Resetting



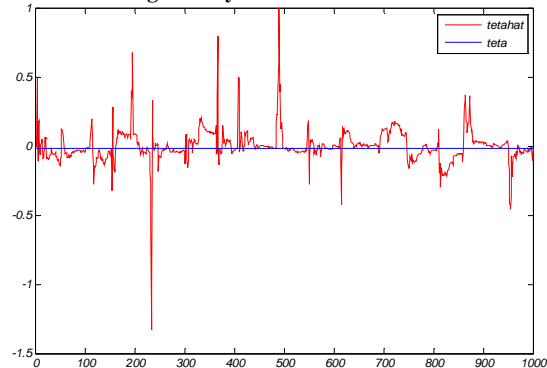
Parameters change Slowly and RLS with Covariance Resetting



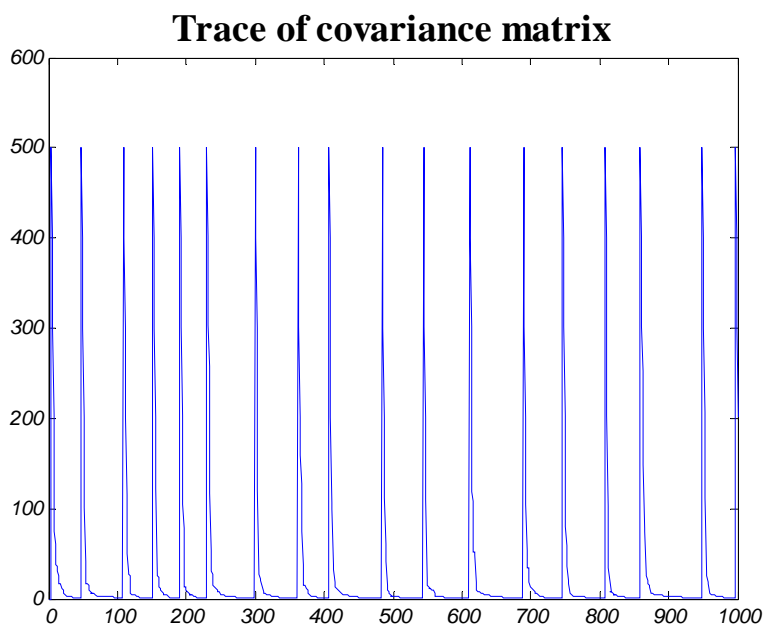
Parameters change Slowly and RLS with Covariance Resetting



Parameters change Slowly and RLS with Covariance Resetting



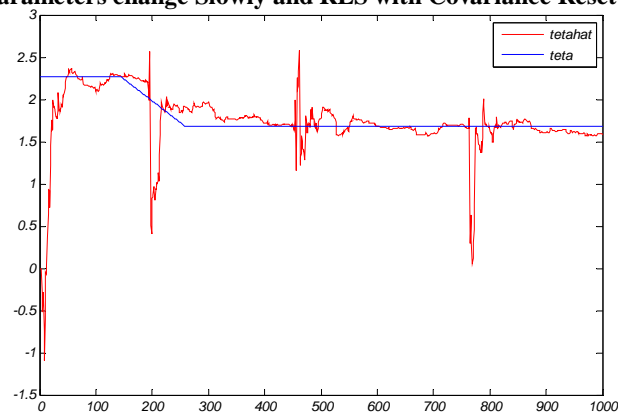
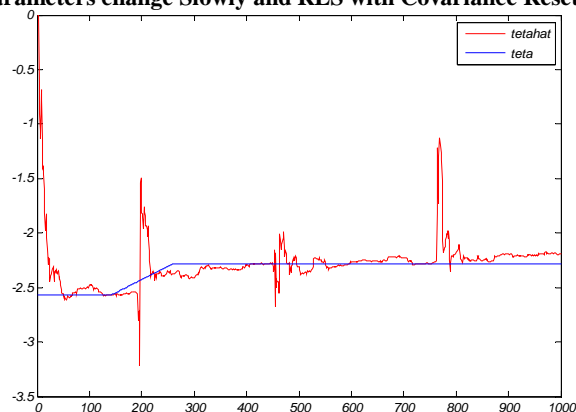
شکل (۳۷): نمودار تخمین پارامترها با روش RLS و ریست کردن ماتریس کواریانس با سطح آستانه یک برای trace ماتریس کواریانس و با وجود تغییر آهسته در پارامترهای سیستم و ورودی نویز سفید.



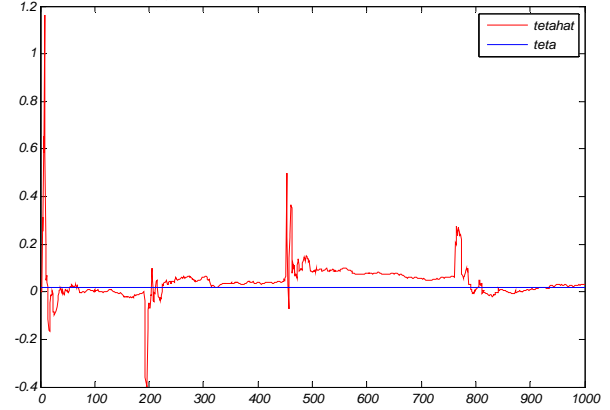
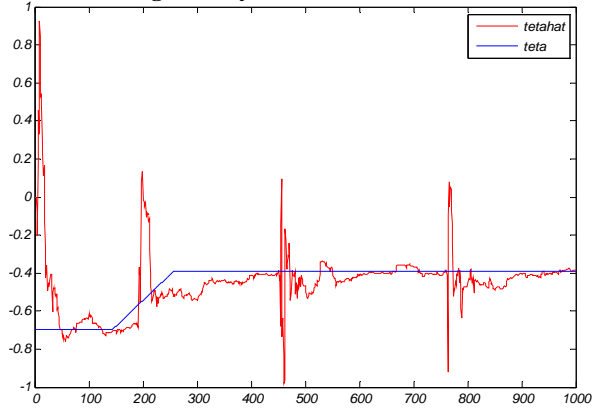
شکل (۳۸): trace ماتریس کواریانس.

همان طور که از این شکل‌ها مشخص است به علت انتخاب نامناسب سطح آستانه و ریست شدن‌های پیاپی ماتریس کواریانس، تخمین مناسبی از پارامترها حاصل نشده است. در شکل (۳۹) نمودار تخمین پارامترها برای زمانی که این سطح آستانه برابر ۰.۲ فرض شده و نیز نمودار trace ماتریس کواریانس در شکل (۴۰) آورده شده‌اند. ماتریس کواریانس اولیه را برابر $P_0 = 100I$ فرض کرده‌ایم.

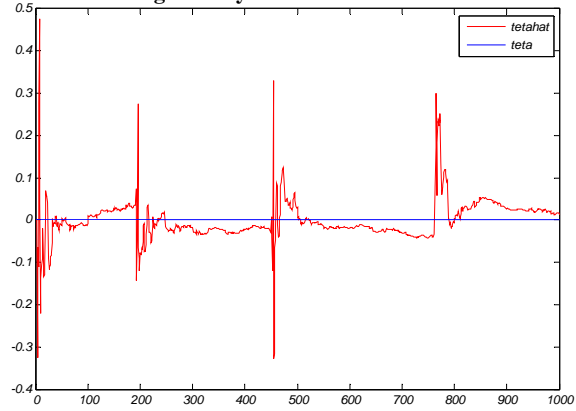
Parameters change Slowly and RLS with Covariance Resetting



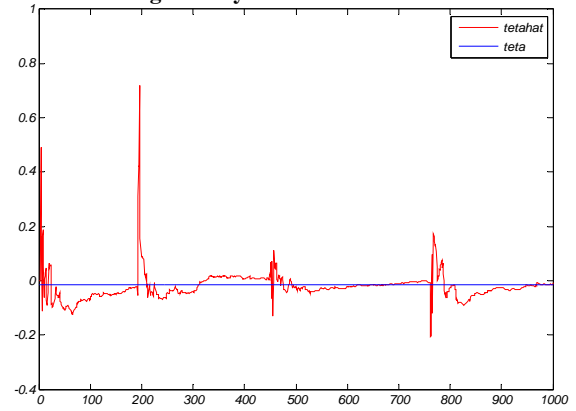
Parameters change Slowly and RLS with Covariance Resetting Parameters change Slowly and RLS with Covariance Resetting



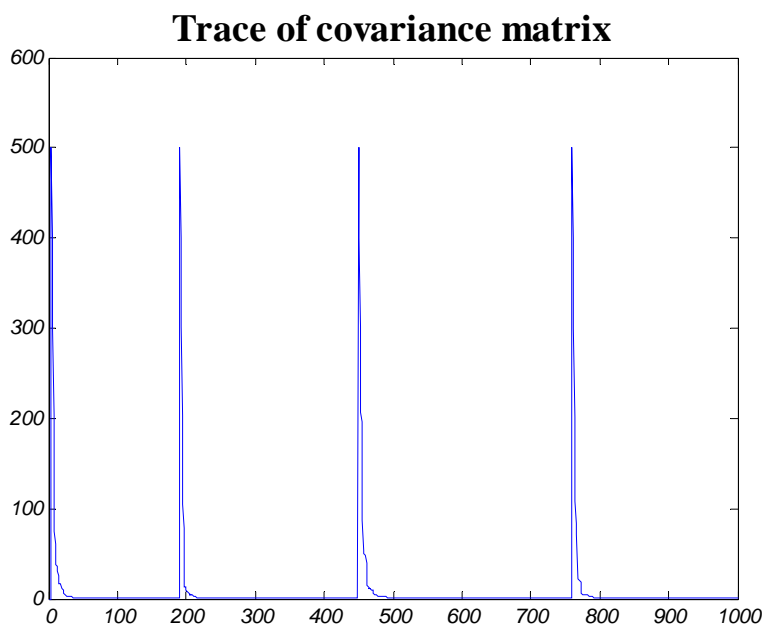
Parameters change Slowly and RLS with Covariance Resetting



Parameters change Slowly and RLS with Covariance Resetting

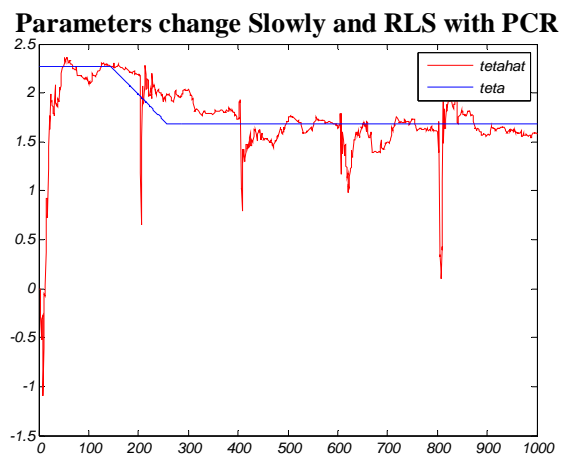
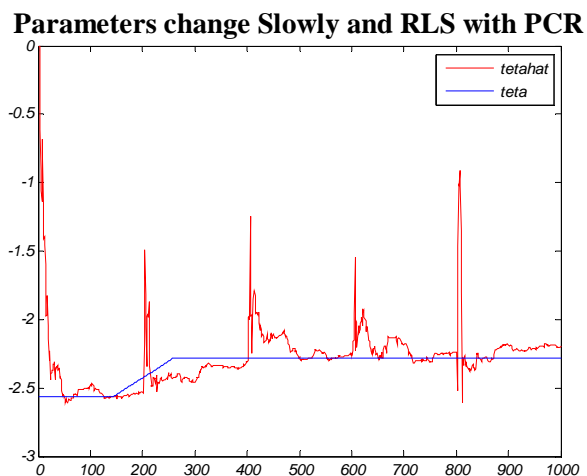


شکل (۳۹): نمودار تخمین پارامترها با روش RLS و ریست کردن ماتریس کواریانس با سطح آستانه ۰.۲ برای trace ماتریس کواریانس و با وجود تغییر آهسته در پارامترهای سیستم و ورودی نویز سفید.

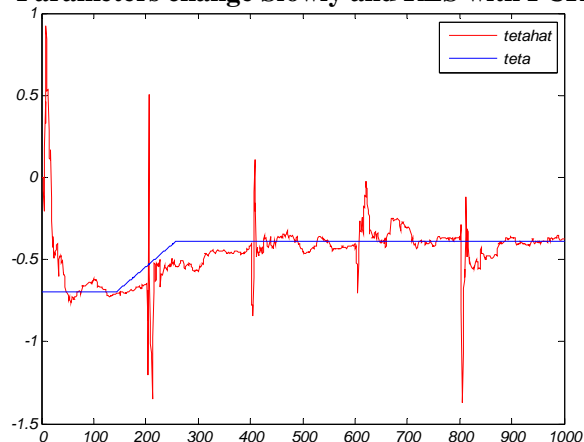


شکل (۴۰): نمودار trace ماتریس کواریانس.

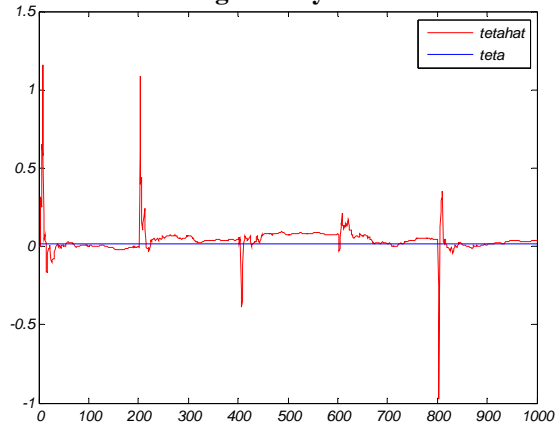
مشاهده می‌شود که با کاهش سطح آستانه trace ماتریس کواریانس، تخمین پارامترها مناسب‌تر صورت گرفته است. بنابراین انتخاب سطح آستانه می‌تواند نکته‌ی مهمی در استفاده از این روش باشد. در روش دوم بدون توجه به وضعیت ماتریس کواریانس و در فواصل زمانی منظمی این ماتریس را به مقدار اولیه خود ریست می‌کنیم. با انتخاب ماتریس کواریانس اولیه برابر $P_0 = 100I$ و ریست کردن ماتریس برای هر ۲۰۰ نمونه، پارامترهای تخمین زده شده در شکل (۴۱) آورده شده است.



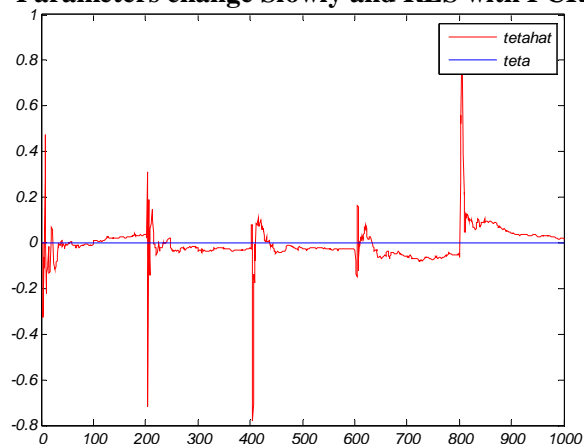
Parameters change Slowly and RLS with PCR



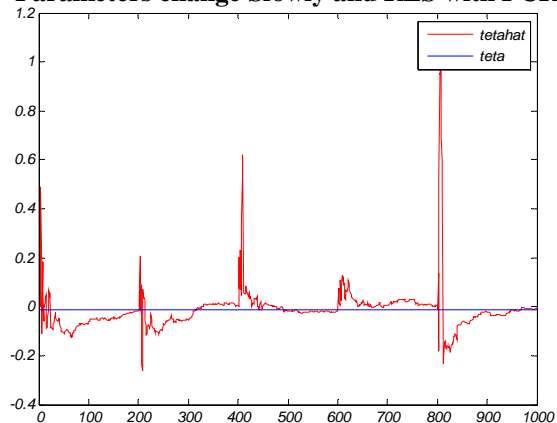
Parameters change Slowly and RLS with PCR



Parameters change Slowly and RLS with PCR



Parameters change Slowly and RLS with PCR



شکل (۴۱): نمودار تخمین پارامترها با روش RLS و ریست کردن ماتریس کواریانس برای هر ۲۰۰ نمونه و با وجود تغییر آهسته در پارامترهای سیستم و ورودی نویز سفید.

از این شکل مشاهده می‌شود که ریست کردن متناوب ماتریس کواریانس برای دنبال کردن پارامترهای متغیر مفید می‌باشد. اما اشکال عمده این روش این است که همواره ریست کردن انجام می‌شود.

تغییر ناگهانی پارامترها

حال برای همان تغییر پارامترهای بخش تغییر آهسته، اما با فرض تغییر ناگهانی این پارامترها مراحل قبلی را تماماً انجام می‌دهیم!!! در سیستم داده شده، فرض می‌کنیم که در زمان حدود ۵۰ ثانیه که معادل نمونه ۱۴۳ ام است، سه پارامتر a_1 ، a_2 و a_3 بطور ناگهانی به $a_1 = -2.287$ ، $a_2 = 1.685$ و

$a_3 = -0.3887$ تغییر کنند. همان طور که گفته شد برای این تغییر پارامترها، سیستم کماکان پایدار

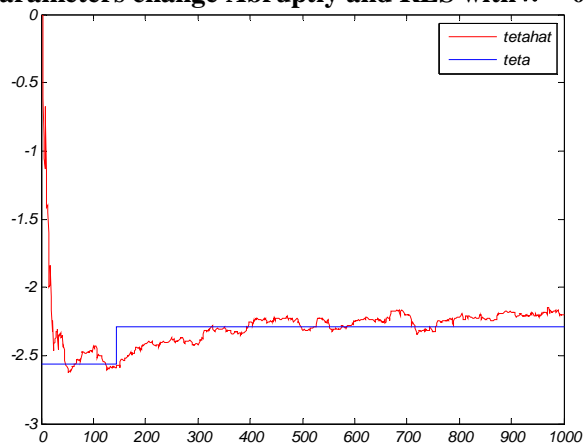
می ماند.

ابتدا با استفاده از روش RLS با فاکتور فراموشی پارامترهای مدل را تخمین می زنیم. مدل را یک مدل درجه

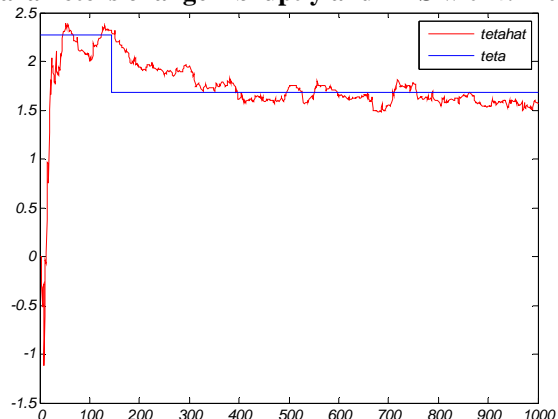
۳ در نظر می گیریم. فاکتور فراموشی را برابر ۰.۹۹ فرض کنیم. در شکل (۴۲) پارامترهای ناشی از این تخمین

آورده شده است:

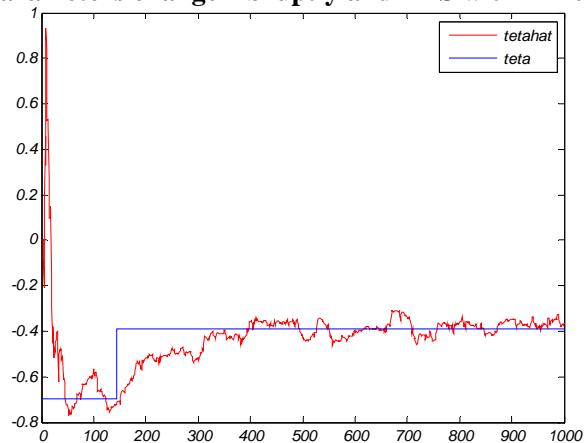
Parameters change Abruptly and RLS with $\lambda = 0.99$



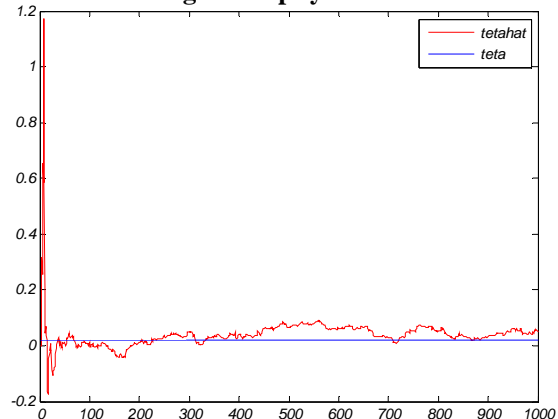
Parameters change Abruptly and RLS with $\lambda = 0.99$



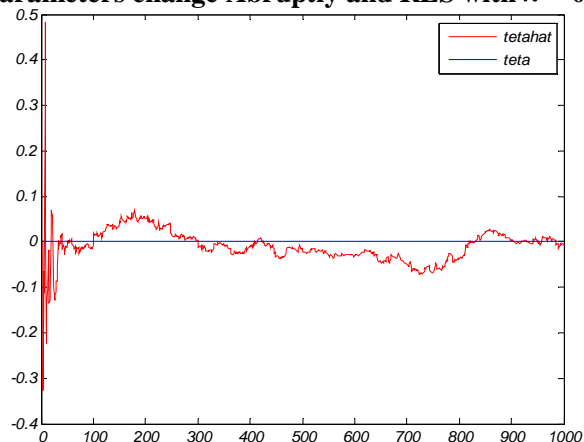
Parameters change Abruptly and RLS with $\lambda = 0.99$



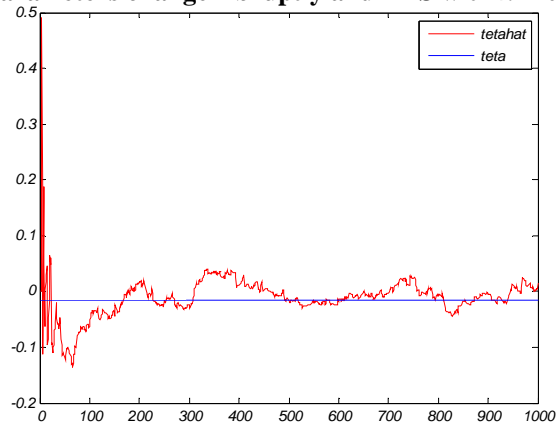
Parameters change Abruptly and RLS with $\lambda = 0.99$



Parameters change Abruptly and RLS with $\lambda = 0.99$



Parameters change Abruptly and RLS with $\lambda = 0.99$

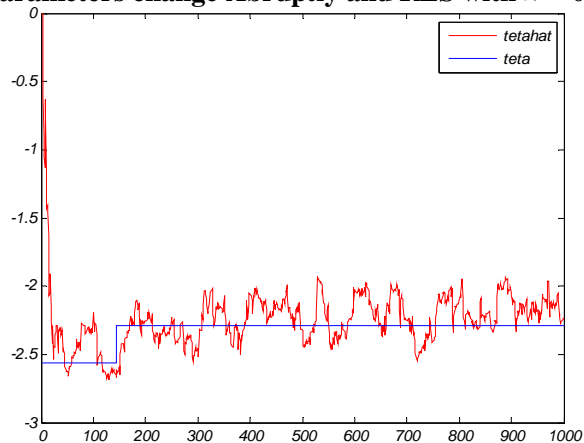


شکل (۴۲): نمودار تخمین پارامترها با روش RLS با فاکتور فراموشی را برابر ۰.۹۹ و با وجود تغییر ناگهانی در پارامترهای سیستم و ورودی نویز سفید.

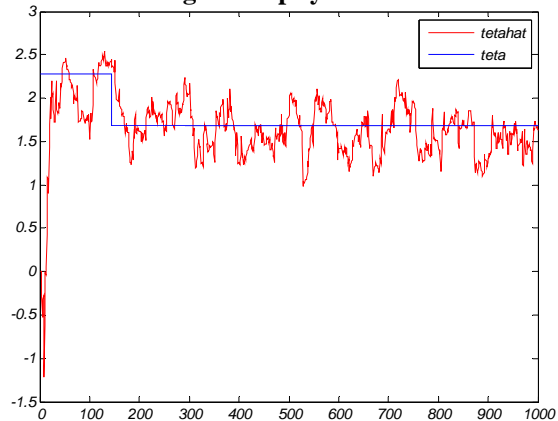
مشاهده می‌شود که با تغییر ناگهانی پارامترها و استفاده از فاکتور فراموشی، سه پارامتر متغیر با زمان به

کندی شناسایی می‌شوند. برای فاکتور فراموشی را برابر ۰.۹۵ تخمین‌های شکل (۴۳) بدست می‌آیند.

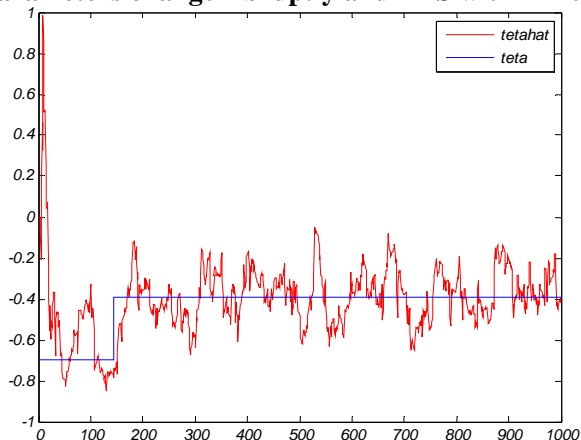
Parameters change Abruptly and RLS with $\lambda = 0.95$



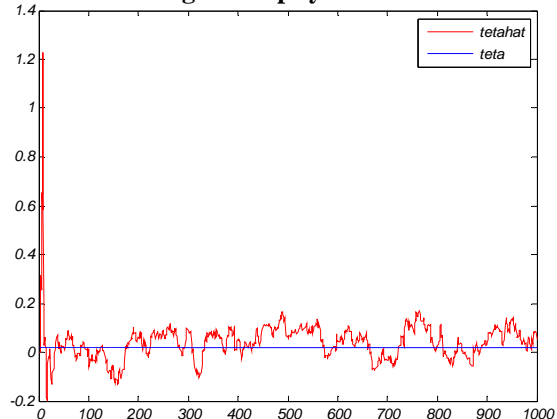
Parameters change Abruptly and RLS with $\lambda = 0.95$



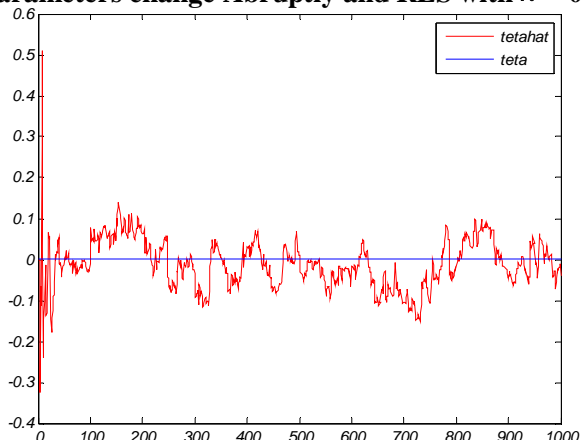
Parameters change Abruptly and RLS with $\lambda = 0.95$



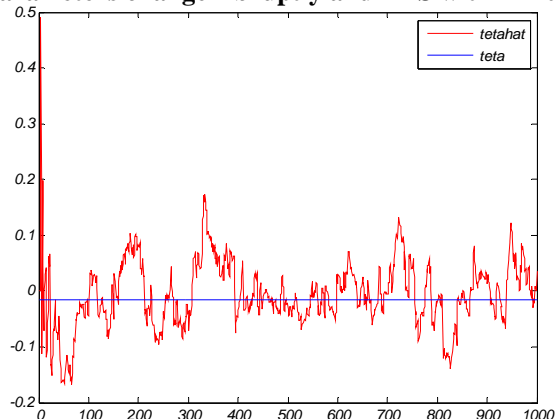
Parameters change Abruptly and RLS with $\lambda = 0.95$



Parameters change Abruptly and RLS with $\lambda = 0.95$



Parameters change Abruptly and RLS with $\lambda = 0.95$



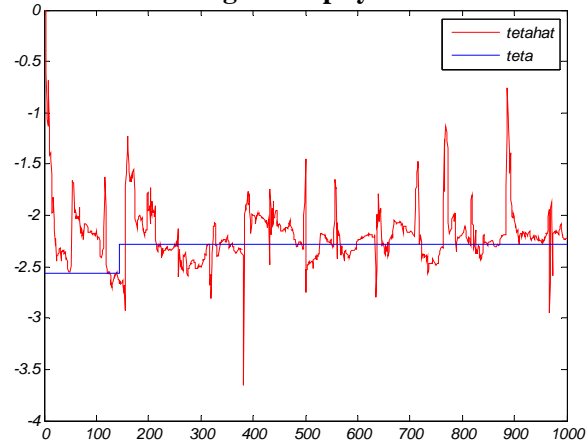
شکل (۴۳): نمودار تخمین پارامترها با روش RLS با فاکتور فراموشی را برابر ۰.۹۵ و با وجود تغییر ناگهانی در پارامترهای سیستم و ورودی نویز سفید. مشاهده می‌شود که استفاده از فاکتور فراموشی باعث نوسان در تخمین‌ها می‌شود و هر چه مقدار این فاکتور کوچکتر باشد، نوسان پارامترهای تخمین زده شده نیز بیشتر خواهد بود.

حال برای همین تغییرات پارامترهای سیستم را با استفاده از روش ریست کردن ماتریس کوواریانس تخمین خواهیم زد. برای این منظور مجدداً دو روش متفاوت را دنبال خواهیم کرد. در روش اول با در نظر گرفتن یک سطح آستانه برای trace ماتریس کوواریانس (مجموع درایه‌های روی قطر اصلی ماتریس کوواریانس)، زمانی که trace ماتریس کوواریانس از این سطح کمتر باشد، این ماتریس به مقدار اولیه خود ریست می‌شود. در شکل

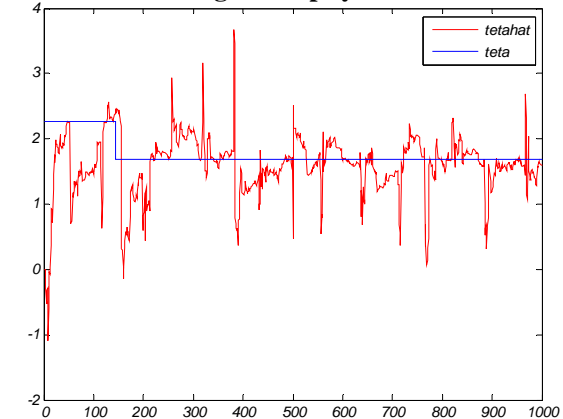
(۴۴) نمودار تخمین پارامترها برای زمانی که این سطح آستانه برابر ۱ فرض شده و نیز نمودار trace ماتریس

کواریانس در شکل (۴۵) آورده شده‌اند. ماتریس کواریانس اولیه را برابر $P_0 = 100I$ فرض کرده‌ایم.

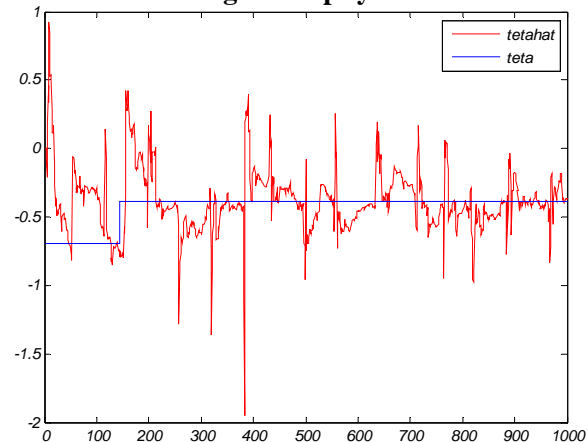
Parameters change Abruptly and RLS with CR



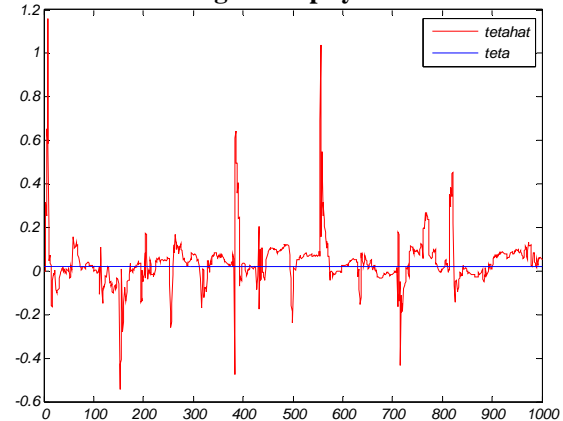
Parameters change Abruptly and RLS with CR



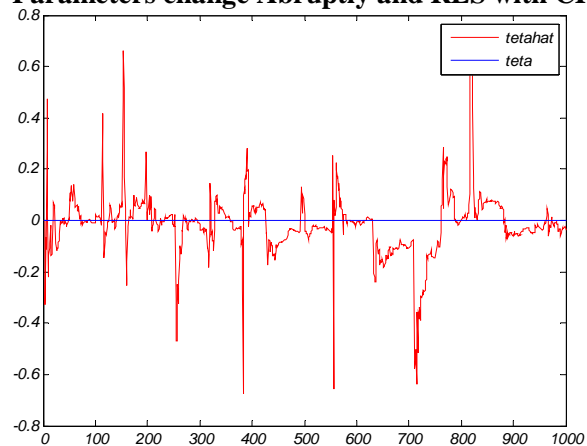
Parameters change Abruptly and RLS with CR



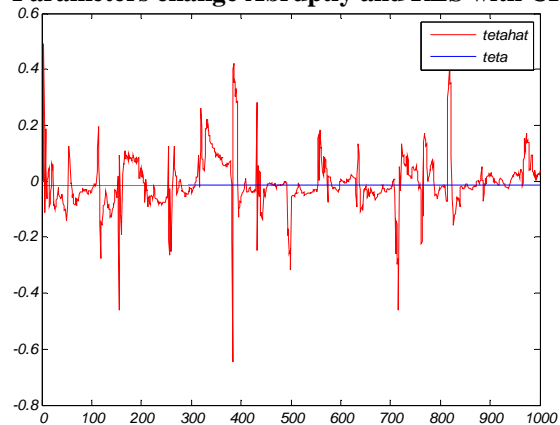
Parameters change Abruptly and RLS with CR



Parameters change Abruptly and RLS with CR

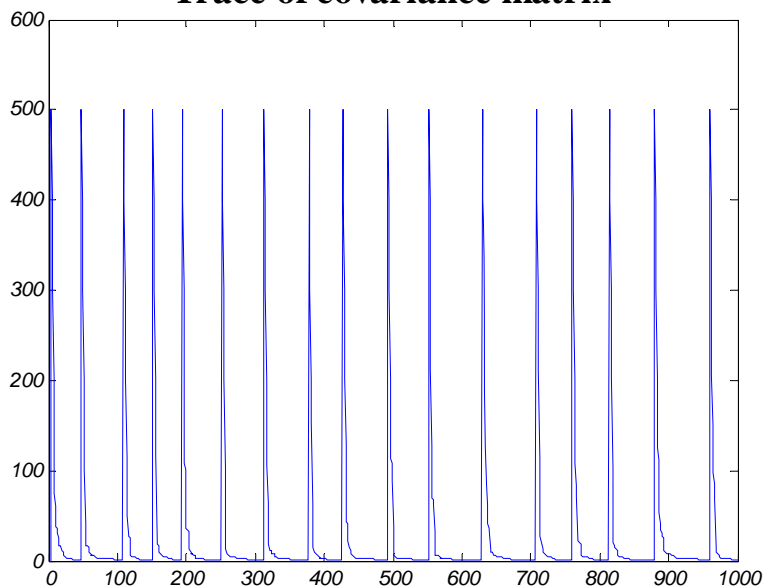


Parameters change Abruptly and RLS with CR



شکل (۴۴): نمودار تخمین پارامترها با روش RLS و ریست کردن ماتریس کواریانس با سطح آستانه یک برای trace ماتریس کواریانس و با وجود تغییر ناگهانی در پارامترهای سیستم و ورودی نویز سفید.

Trace of covariance matrix

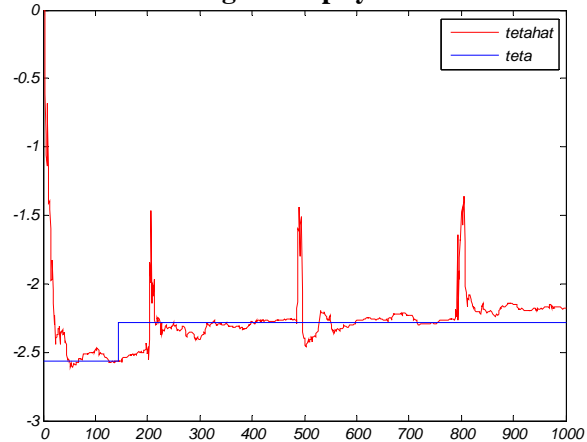


شکل (۴۵): نمودار trace ماتریس کواریانس.

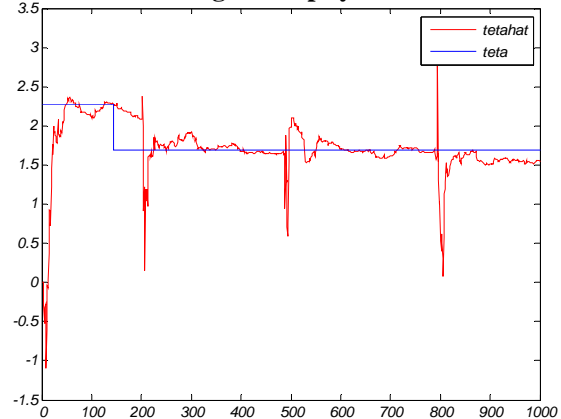
همان طور که از این شکل‌ها مشخص است به علت انتخاب نامناسب سطح آستانه و ریست شدن‌های پیاپی ماتریس کواریانس، تخمین مناسبی از پارامترها حاصل نشده است. در شکل (۴۶) نمودار تخمین پارامترها

برای زمانی که این سطح آستانه برابر ۰.۲ فرض شده و نیز نمودار trace ماتریس کواریانس در شکل (۴۷) آورده شده‌اند. ماتریس کواریانس اولیه را برابر $P_0 = 100I$ فرض کرده‌ایم.

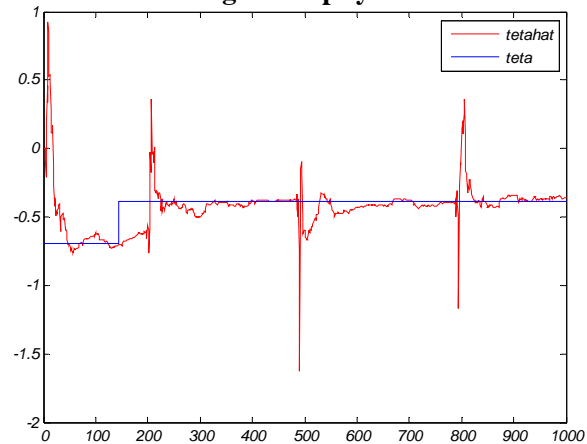
Parameters change Abruptly and RLS with CR



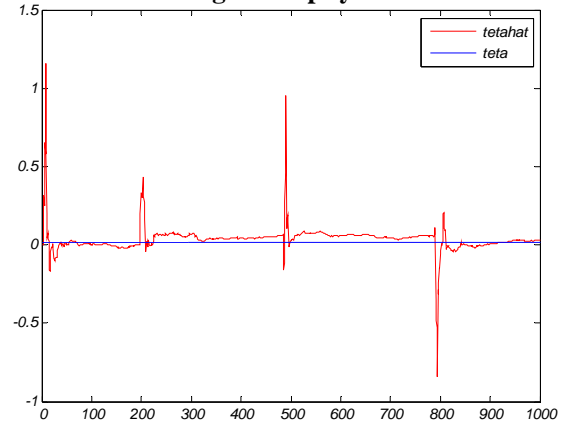
Parameters change Abruptly and RLS with CR



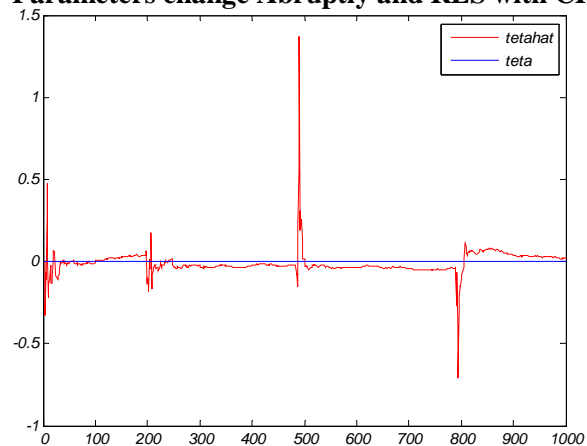
Parameters change Abruptly and RLS with CR



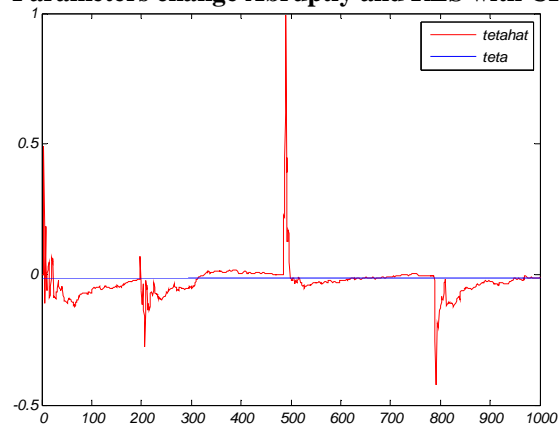
Parameters change Abruptly and RLS with CR



Parameters change Abruptly and RLS with CR

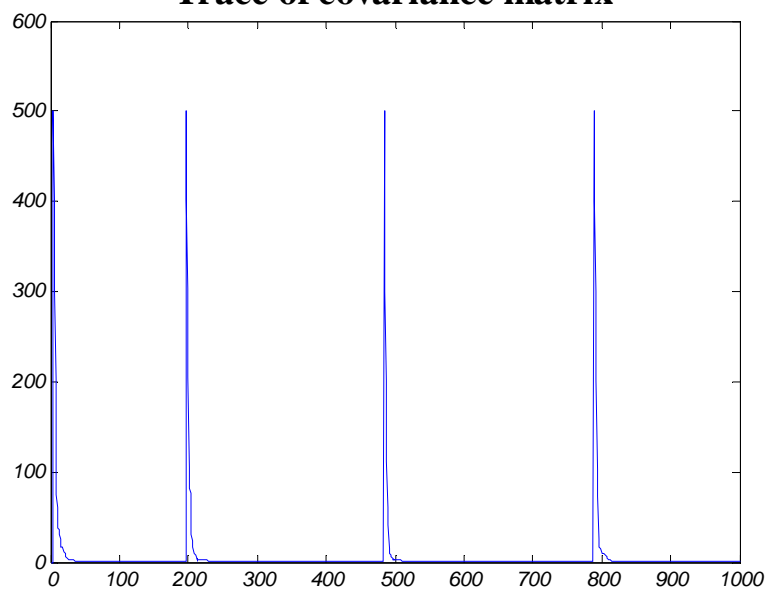


Parameters change Abruptly and RLS with CR



شکل (۴۶): نمودار تخمین پارامترها با روش RLS و ریست کردن ماتریس کواریانس با سطح آستانه ۰.۲ برای trace ماتریس کواریانس و با وجود تغییر ناگهانی در پارامترهای سیستم و ورودی نویز سفید.

Trace of covariance matrix

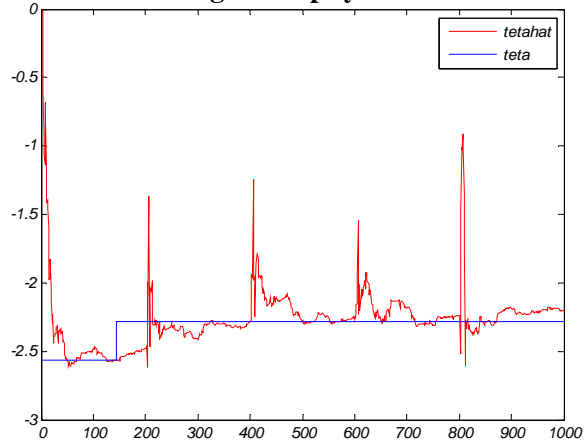


شکل (۴۷): نمودار trace ماتریس کواریانس.

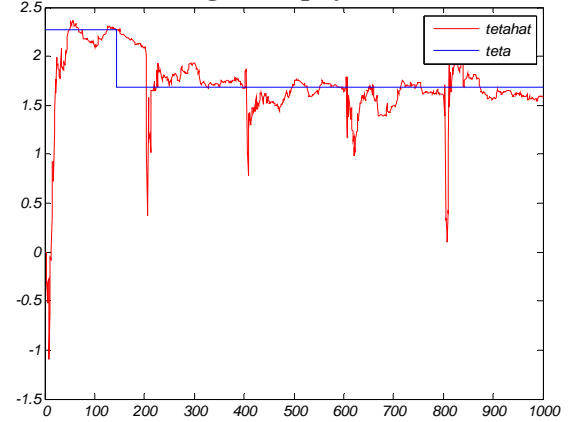
مشاهده می‌شود که با کاهش سطح آستانه trace ماتریس کواریانس، تخمین پارامترها مناسب‌تر صورت گرفته است.

در روش دوم بدون توجه به وضعیت ماتریس کواریانس و در فواصل زمانی منظمی این ماتریس را به مقدار اولیه خود ریست می‌کنیم. با انتخاب ماتریس کواریانس اولیه برابر $P_0 = 100I$ و ریست کردن ماتریس برای هر ۲۰۰ نمونه، پارامترهای تخمین زده شده در شکل (۴۸) آورده شده است.

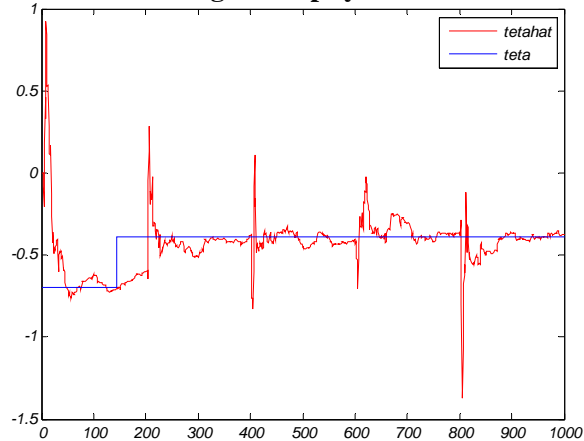
Parameters change Abruptly and RLS with PCR



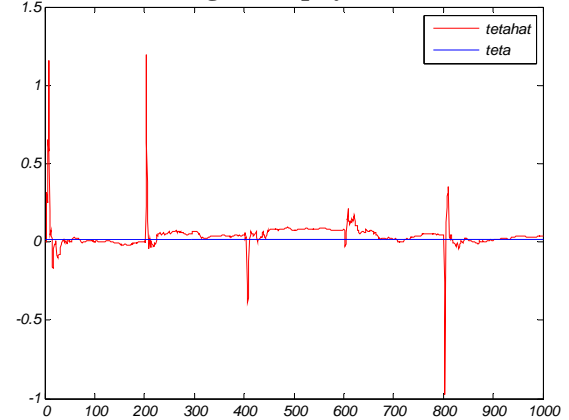
Parameters change Abruptly and RLS with PCR



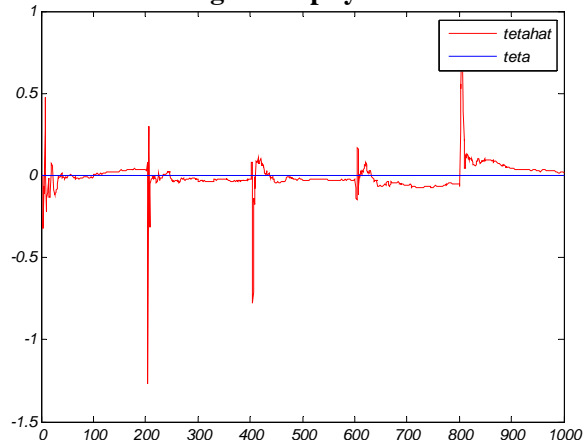
Parameters change Abruptly and RLS with PCR



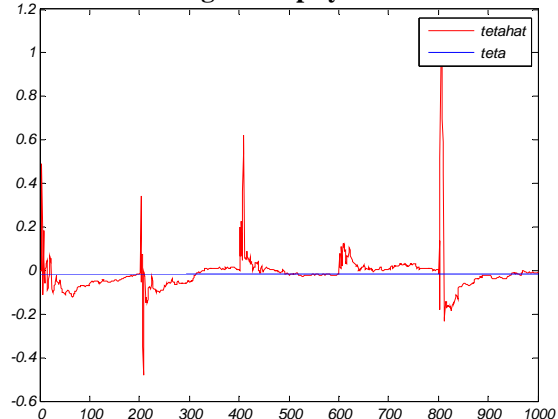
Parameters change Abruptly and RLS with PCR



Parameters change Abruptly and RLS with PCR



Parameters change Abruptly and RLS with PCR



شکل (۴۸): نمودار تخمین پارامترها با روش RLS و ریست کردن ماتریس کواریانس برای هر ۲۰۰ نمونه و با وجود تغییر ناگهانی در پارامترهای سیستم و ورودی نویز سفید.

از این شکل مشاهده می‌شود که ریست کردن متناوب ماتریس کواریانس برای دنبال کردن پارامترهای متغیر مفید می‌باشد. اما اشکال عمده این روش این است که همواره ریست کردن انجام می‌شود.

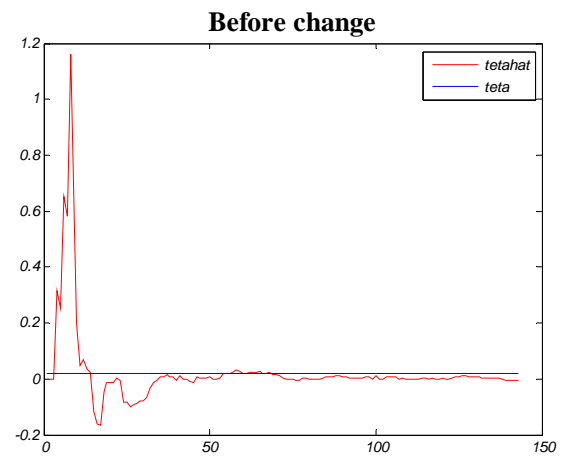
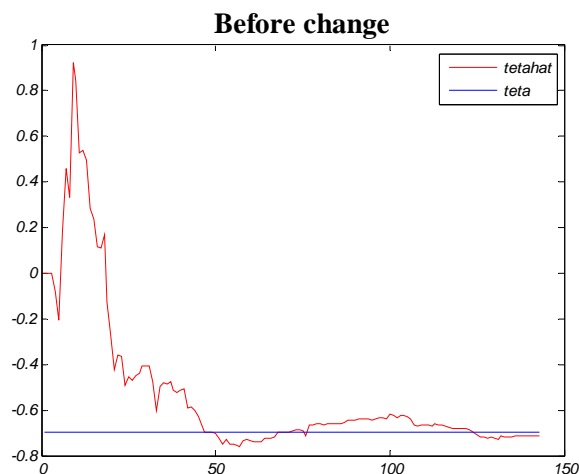
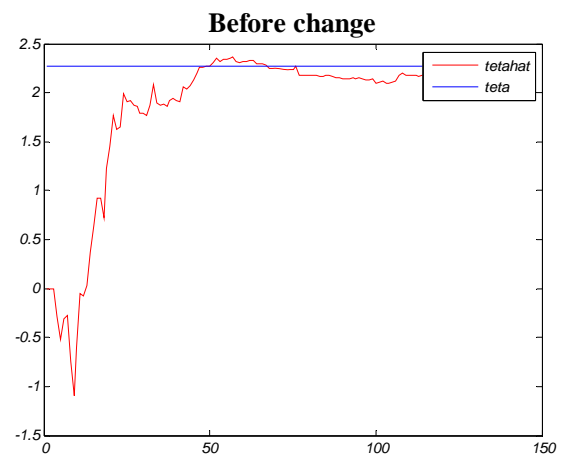
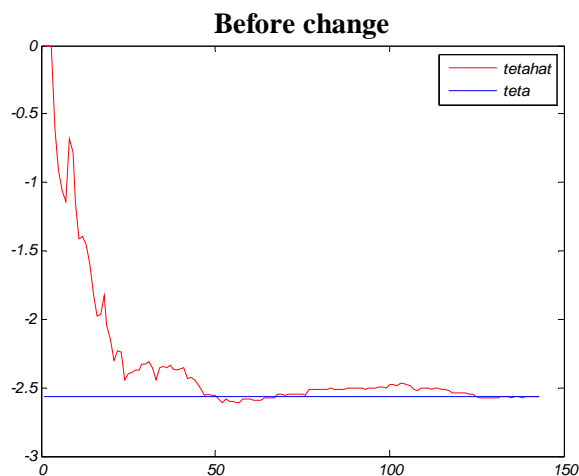
با توجه به نتایج ارائه شده در این بخش، می‌توان نتیجه گرفت که استفاده از روش فاکتور فراموشی برای حالتی که پارامترهای سیستم آهسته تغییر می‌کنند مناسب‌تر است. در حالی که استفاده از روش ریست کردن ماتریس کواریانس برای حالتی که پارامترهای سیستم بطور ناگهانی تغییر می‌کنند مناسب‌تر می‌باشد. دلیل این موضوع نیز این است که پارامتر متغیر روش فاکتور فراموشی به آهستگی با زمان تغییر می‌کند و لذا برای حالتی که پارامترهای سیستم نیز به کندی تغییر می‌کنند مناسب است. در حالی که در روش ریست کردن ماتریس کواریانس، پارامتر متغیر که همان ماتریس کواریانس است به طور ناگهانی تغییر می‌کند و لذا برای تخمین سیستم‌هایی که پارامترهای آن بطور ناگهانی تغییر می‌کنند مناسب است.

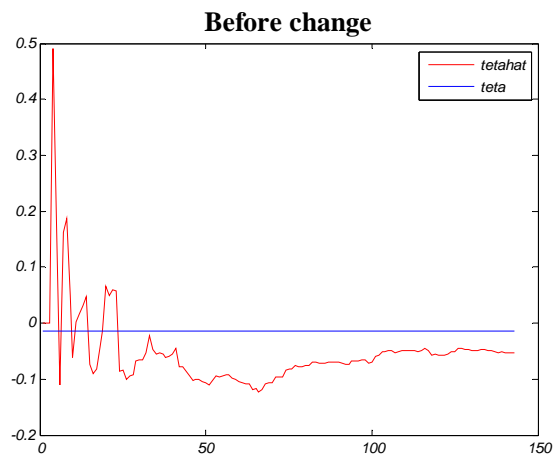
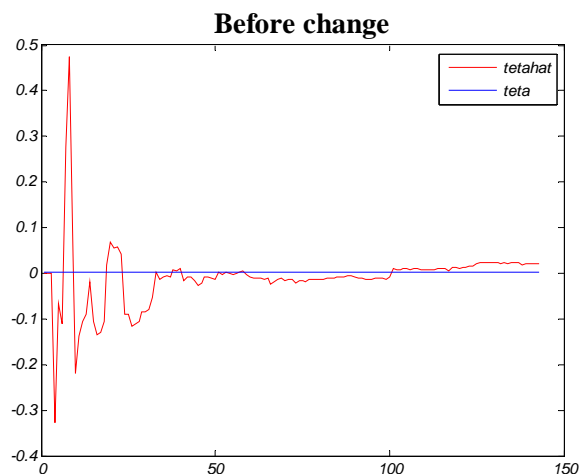
۶-۲) در سیستم داده شده، فرض می‌کنیم که در زمان حدود ۵۰ ثانیه که معادل نمونه ۱۴۳_ام است سه پارامتر a_1 ، a_2 و a_3 تغییر کنند. فرض کنیم که در مدت زمان ۴۰ ثانیه این سه پارامتر بصورت خطی با زمان تغییر کرده و به $a_1 = -2.726$ ، $a_2 = 2.632$ و $a_3 = -0.8796$ برسند. این تغییر پارامترها،

منجر به ناپایدار شدن سیستم خواهد شد. قطب‌های سیستم گسسته در زمان در مکان‌های زیر قرار می‌گیرند (البته برای مقادیر نهایی تغییرات):

$$z = \begin{cases} 0.8364 \\ 0.9447 \pm 0.3986j \end{cases} \rightarrow |z| = \begin{cases} 0.8364 \\ 1.0254 \end{cases}$$

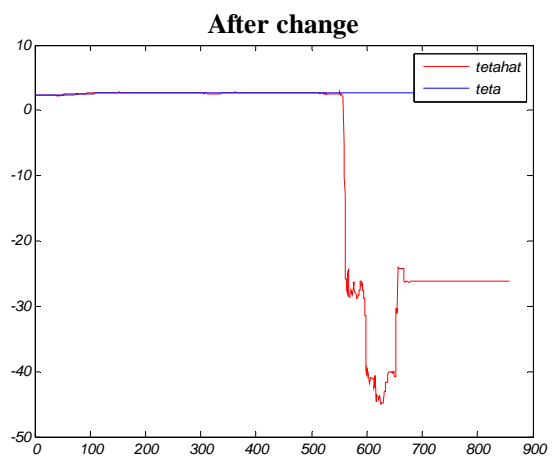
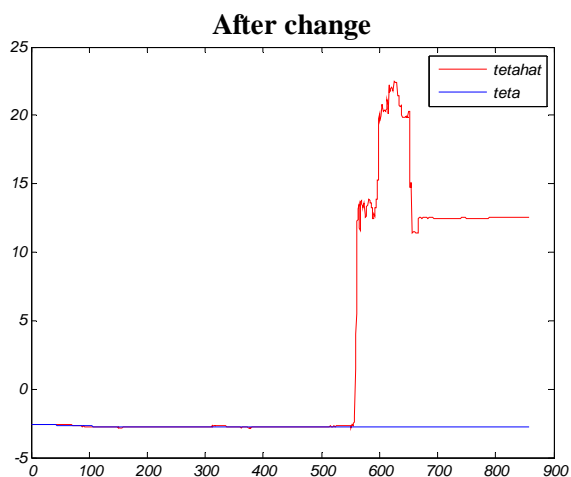
که دو قطب سیستم زمان گسسته خارج دایره واحد بوده و لذا با این تغییرات در پارامترها، سیستم ناپایدار خواهد شد. فرض کنیم که برای شناسایی این سیستم مدل را یک مدل درجه ۳ در نظر می‌گیریم. در شکل (۴۹) پارامترهای ناشی از تخمین RLS با فاکتور فراموشی برابر با ۰.۹۹ تا زمان ۵۰ ثانیه آورده شده است (تا قبل از شروع تغییرات).

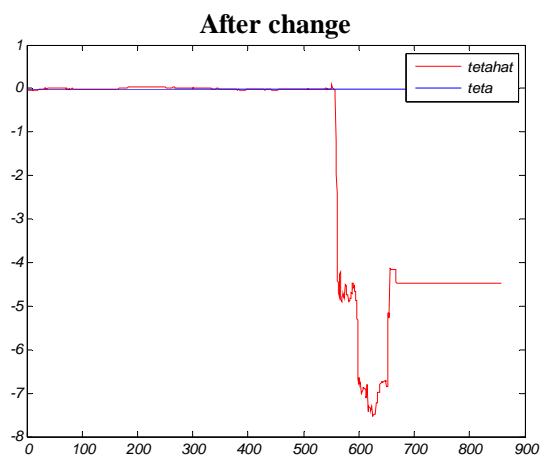
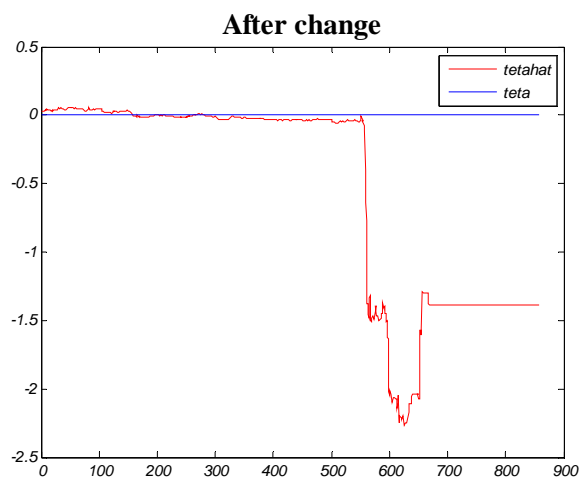
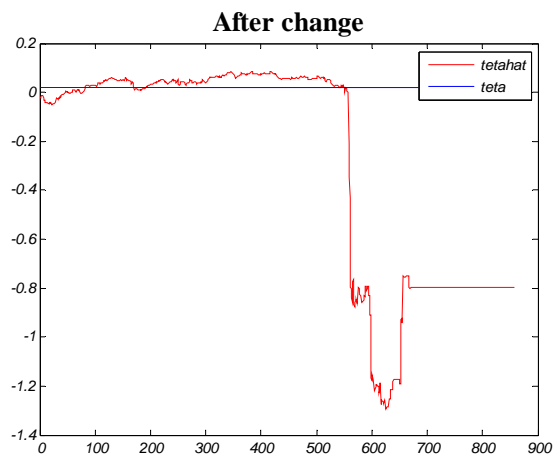
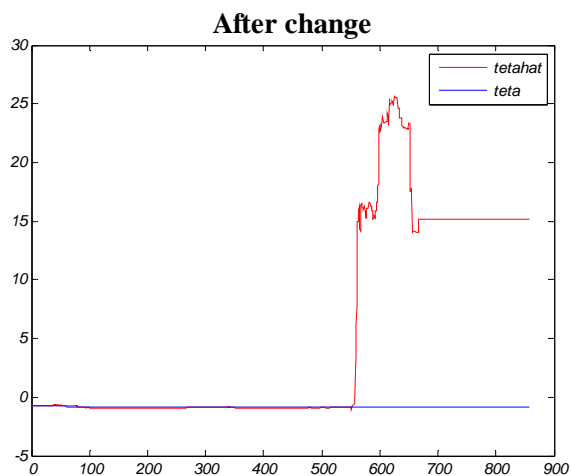




شکل (۴۹): تخمین پارامترها با روش RLS با فاکتور فراموشی برابر با ۰.۹۹ تا قبل از شروع تغییرات (سیستم پایدار است).

مشاهده می‌شود که تا قبل از شروع تغییرات پارامترهای سیستم، تخمین‌های مناسبی از پارامترهای سیستم حاصل می‌شود. در شکل (۵۰) تخمین‌های حاصل از روش RLS با فاکتور فراموشی ۰.۹۹ برای زمانی که تغییرات اعمال شده باشند، آورده شده است.

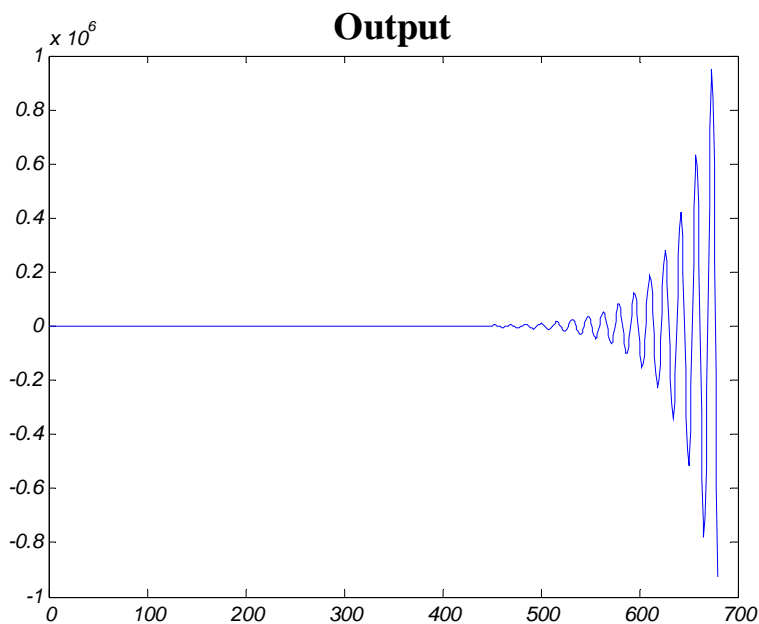




شکل (۵۰): تخمین پارامترها با روش RLS با فاکتور فراموشی برابر با ۰.۹۹ بعد از شروع تغییرات آهسته در پارامترهای سیستم که منجر به ناپایدار شدن سیستم می‌گردد.

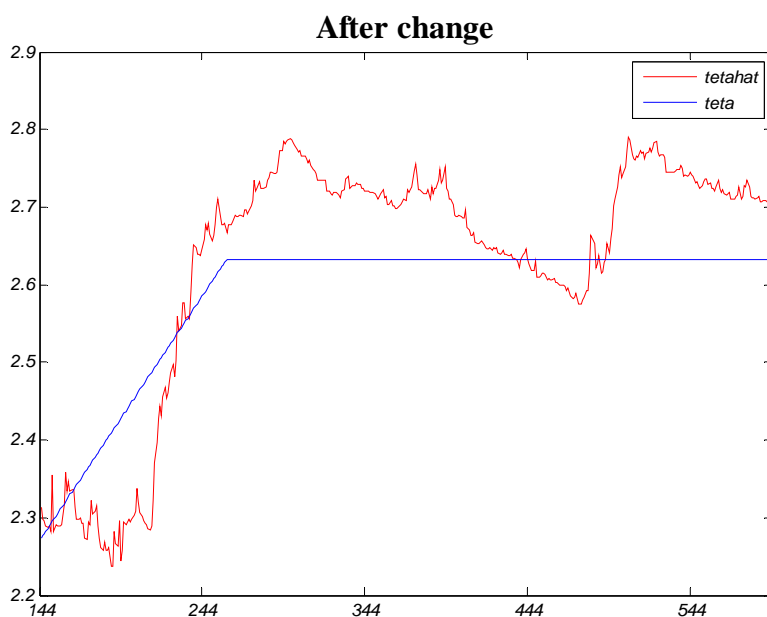
همان طور که مشاهده می‌شود تا حدود ۶۸۰ نمونه (۵۴۰+۱۴۰)، تخمین پارامترها مناسب می‌باشد. شکل

(۵۱) خروجی سیستم را تا این زمان نشان می‌دهد.



شکل (۵۱): خروجی سیستم قبل از شروع تغییرات و بعد از آن.

به منظور نشان دادن همگرایی پارامترها نمودار تخمین مربوط به پارامتر a_2 بین نمونه ۱۴۴ ام تا ۶۰۰ ام در شکل (۵۲) آورده شده است.

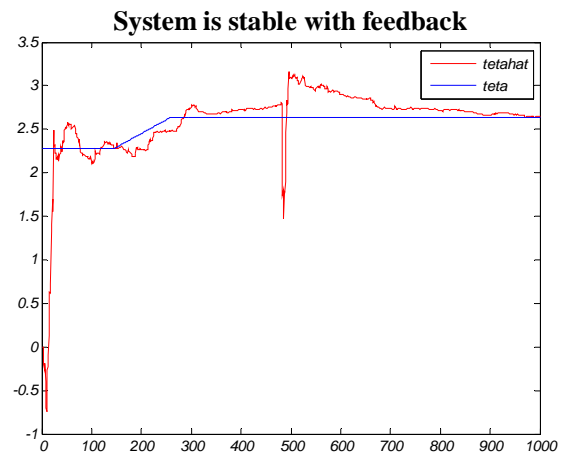
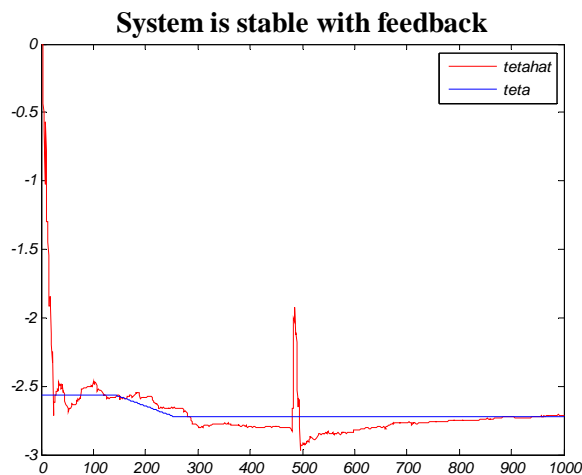


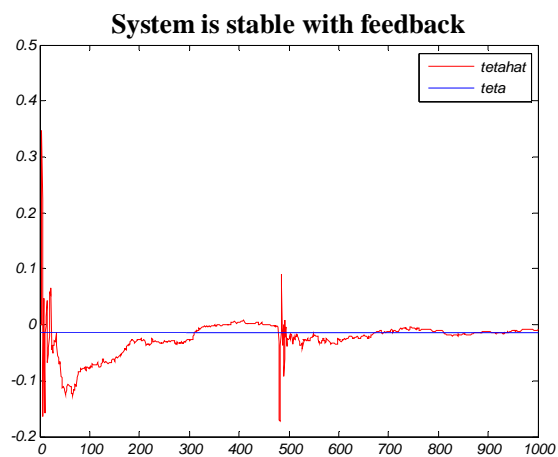
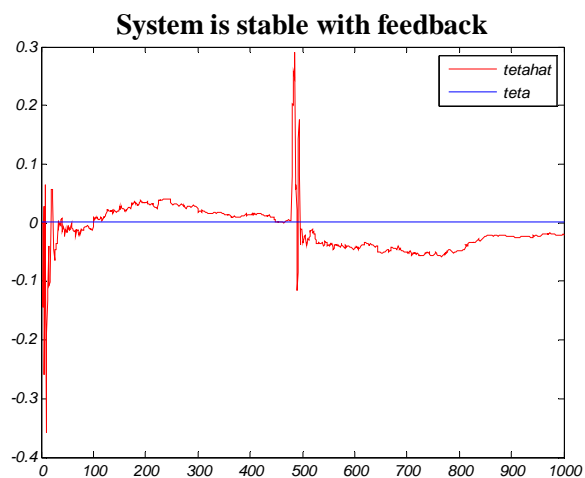
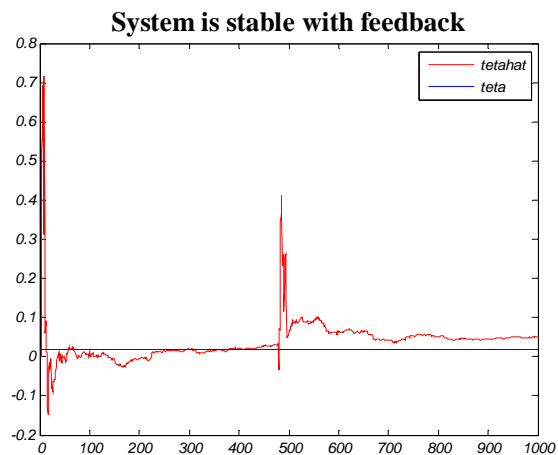
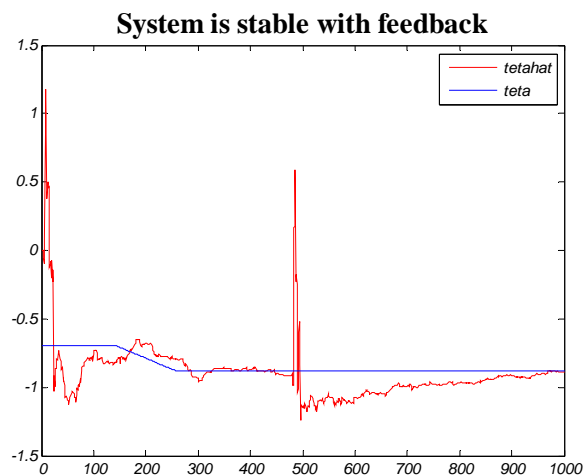
شکل (۵۲): تخمین پارامتر a_2 با روش RLS با فاکتور فراموشی برابر با ۰.۹۹ بعد از شروع تغییرات و قبل از افزایش بیش از حد خروجی.

مشاهده می شود که تا این نمونه (زمان)، پارامترها واگرا نشده اند.

۲-۷) با استفاده از یک فیدبک که برای پارامترهای اصلی و پارامترهای تغییر کرده پایداری سیستم را تضمین کند، سیستم را پایدار کرده و سپس فرآیند شناسایی سیستم را انجام می‌دهیم. برای این منظور از فیدبکی ساده بصورت $u(t) = 1.5 \times y(t - 1)$ استفاده خواهیم کرد که تمام قطب‌های حلقه بسته برای پارامترهای اولیه سیستم در داخل دایره واحد قرار دارند ($|z| = 0.036, 0.961, 0.804, 0.804$). برای پارامترهای تغییر یافته نیز این قطب‌ها در داخل دایره واحد قرار دارند ($|z| = 0.027, 0.987, 0.987, 0.8329$).

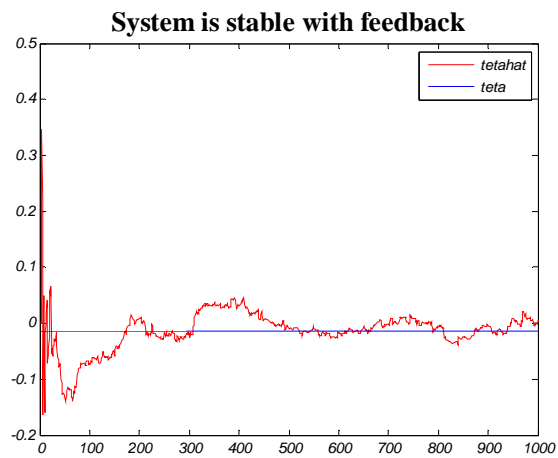
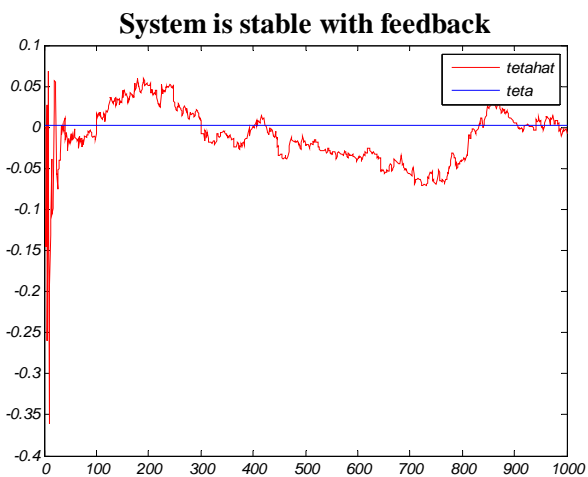
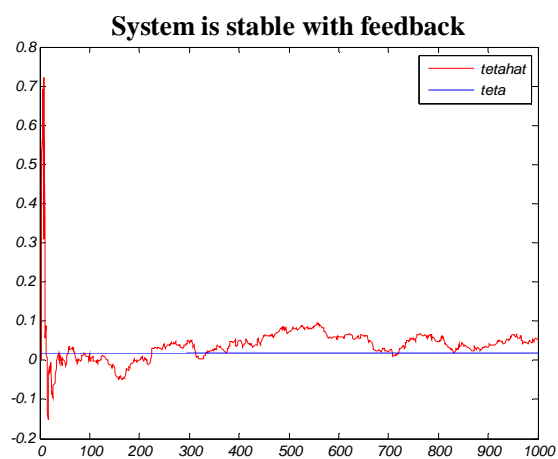
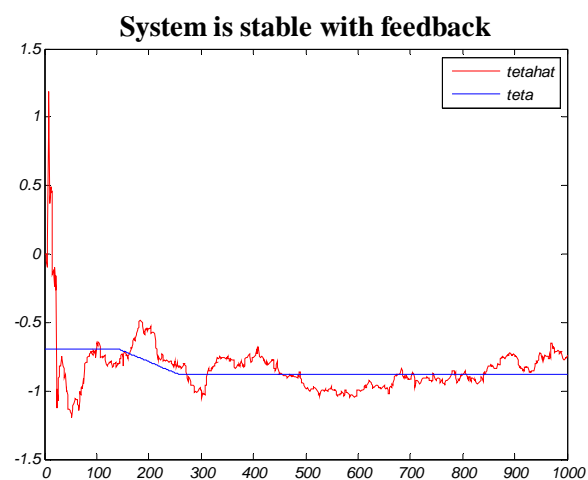
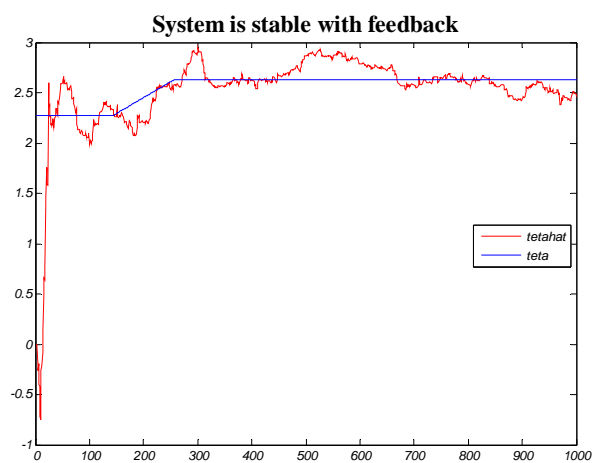
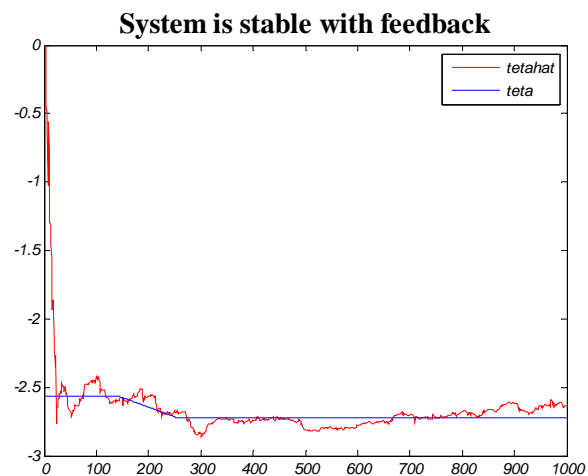
ورودی شناسایی سیستم که در اینجا همان ورودی مرجع است را نویز سفید با واریانس یک فرض کنیم. هم چنین از روش ریست کردن ماتریس کواریانس با سطح آستانه ۰.۱ برای trace ماتریس استفاده می‌کنیم. در شکل (۵۳) نمودار پارامترهای تخمین زده شده آورده شده است.





شکل (۵۴): نمودار تخمین پارامترها با روش RLS و ریست کردن ماتریس کواریانس با سطح آستانه ۰.۱ برای trace ماتریس کواریانس و با وجود تغییر آهسته در پارامترهای سیستم و داشتن فیدبک پایدار ساز.

مشاهده می‌شود که تخمین مناسبی از پارامترها حاصل شده است. حال با استفاده از فاکتور فراموشی به میزان 0.99 و برای همان شرایط بالا، تخمین حاصل در شکل (۵۵) بدست می‌آید.



شکل (۵۵): نمودار تخمین پارامترها با روش RLS با فاکتور فراموشی ۰.۹۹ و با وجود تغییر آهسته در پارامترهای سیستم و داشتن فیدبک پایدار ساز.

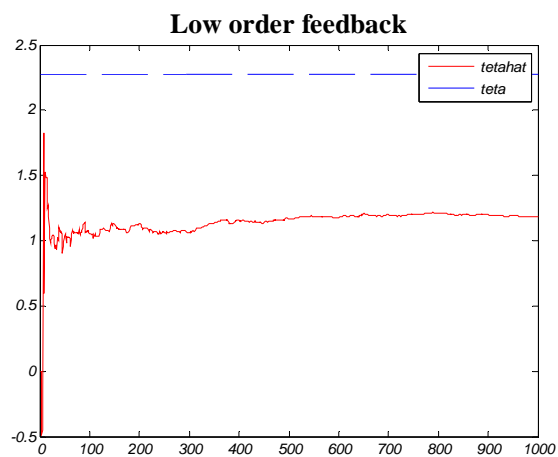
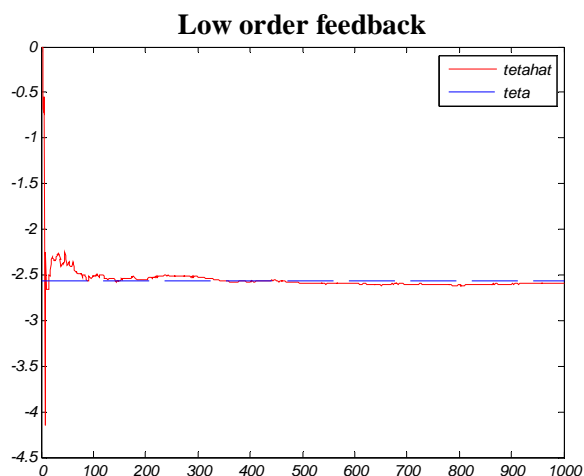
در این حالت نیز تخمینی مناسب از پارامترها حاصل شده است.

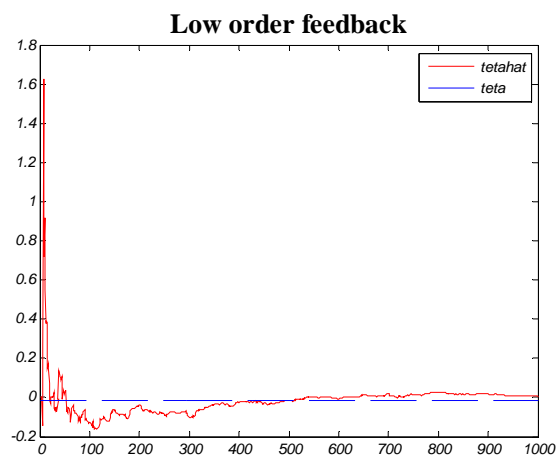
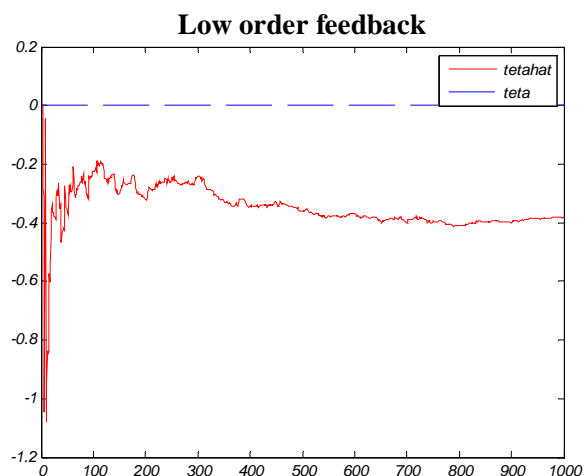
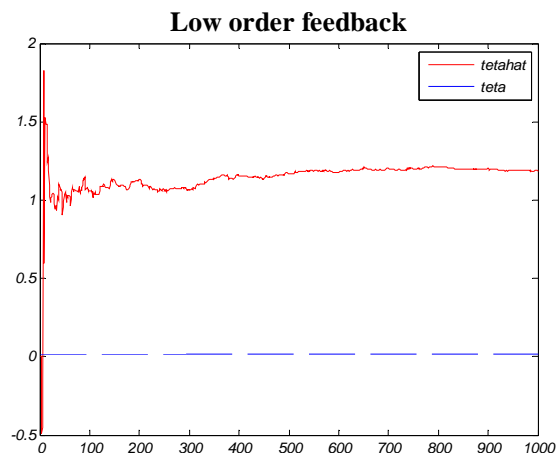
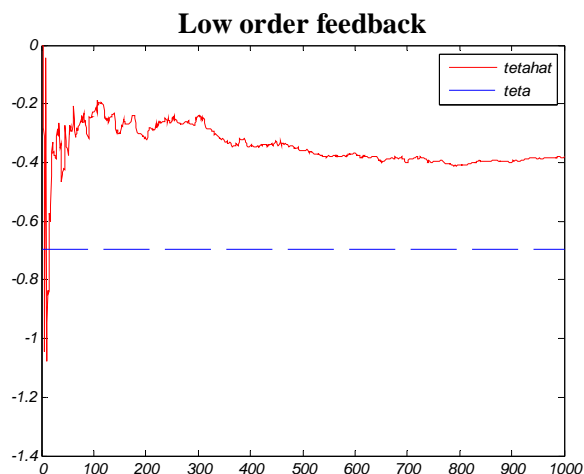
۸-۲) اگر سیستم را تحت فیدبک قرار دهیم، ورودی سیستم به خروجی آن مربوط خواهد شد. اگر مرتبه فیدبک پایین باشد، در ماتریس رگرسورها وابستگی رخ خواهد داد و پارامترها به درستی شناسایی نخواهند شد. اما اگر از مرتبه بالاتر برای فیدبک استفاده کنیم، پارامترها به درستی شناسایی خواهند شد. به همین منظور دو نوع فیدبک در نظر خواهیم گرفت:

ابتدا فیدبک را بصورت یک تاخیر ساده در نظر می‌گیریم که دارای مرتبه لازم برای شناسایی مناسب و یکتای پارامترها نمی‌باشد. اگر ورودی مرجع سیستم را صفر فرض کنیم، معادله فیدبک بصورت زیر خواهد بود:

$$u(t) = -y(t - 1)$$

این فیدبک باعث پایداری سیستم حلقه بسته خواهد شد (محل قطب‌های حلقه بسته $|z| = 0.02, 0.921, 0.921, 0.873$). این تخمین‌های بدست آمده با روش RLS بصورت شکل (۵۶) بدست می‌آیند. (تعداد نمونه‌ها ۱۰۰۰ نمونه)





شکل (۵۶): نمودار تخمین پارامترها با روش RLS با وجود فیدبک مرتبه اول.

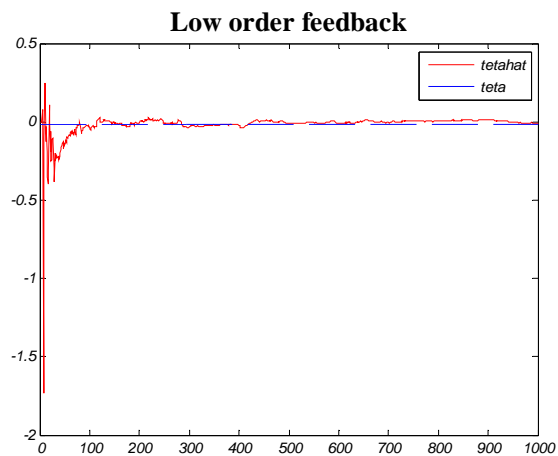
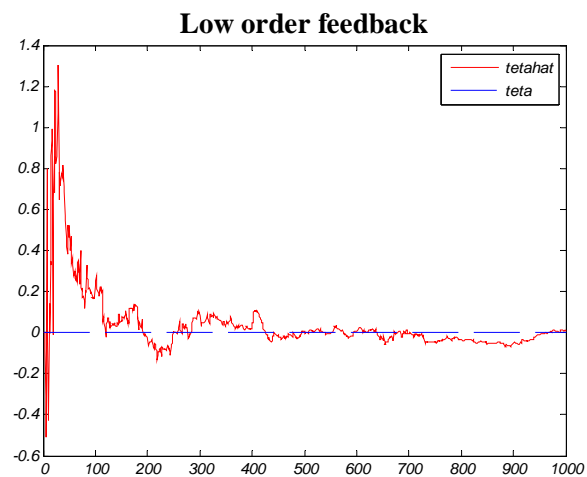
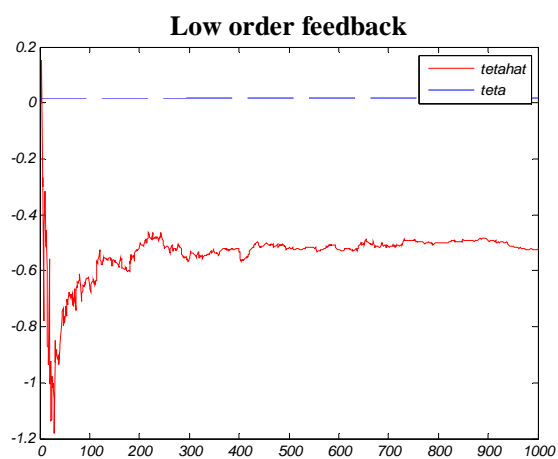
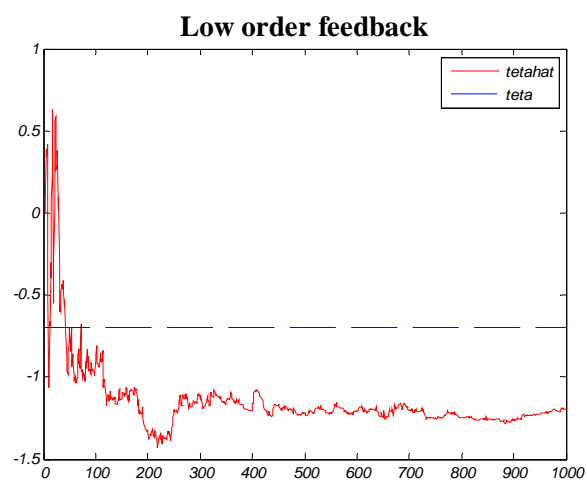
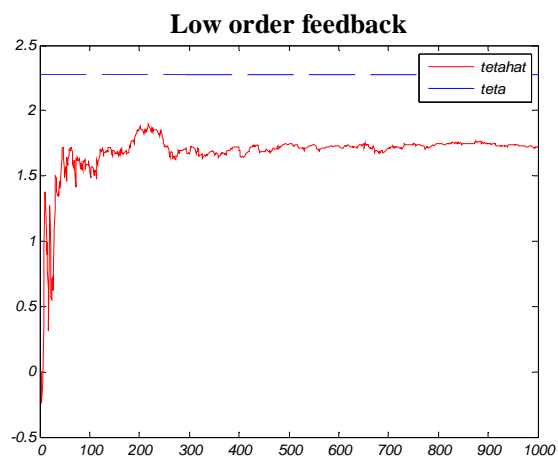
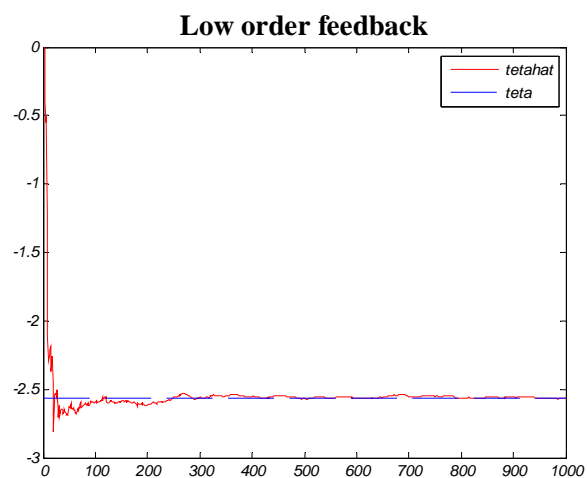
مشاهده می‌شود که تنها دو پارامتر از شش پارامتر بنحو مناسبی شناسایی شده‌اند. بنابراین نتیجه می‌گیریم

که با وجود فیدبک $u(t) = -y(t-1)$ شناسایی و تخمین نادرستی از پارامترها بدست می‌آید.

حال سراغ یک فیدبک مرتبه دوم می‌رویم. فیدبک را بگونه‌ای انتخاب می‌کنیم که منجر به پایداری سیستم

حلقه بسته شود. فیدبک زیر تمام قطب‌های سیستم حلقه بسته را در داخل دایره واحد قرار خواهد داد.

تخمین‌های بدست آمده با روش RLS بصورت شکل (۵۷) بدست می‌آیند.



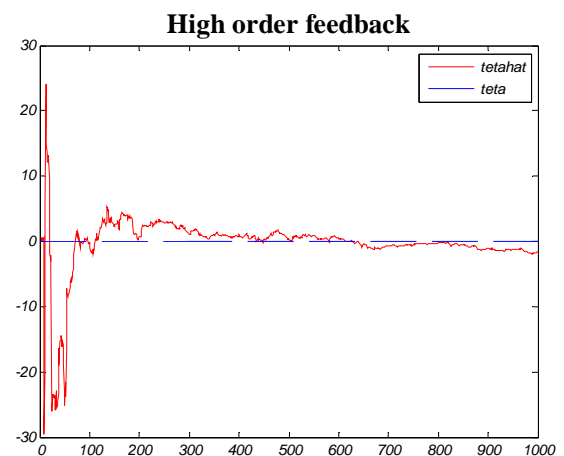
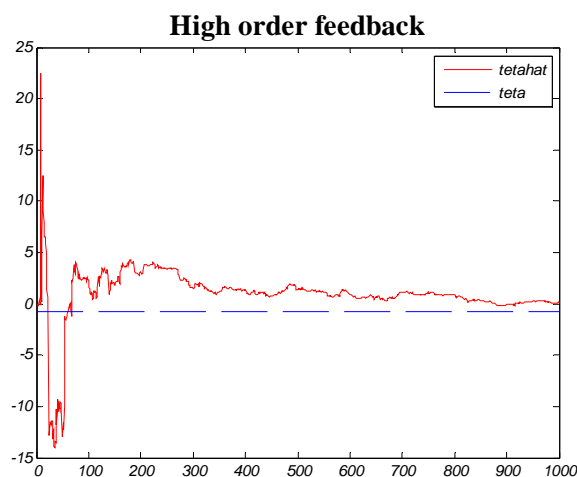
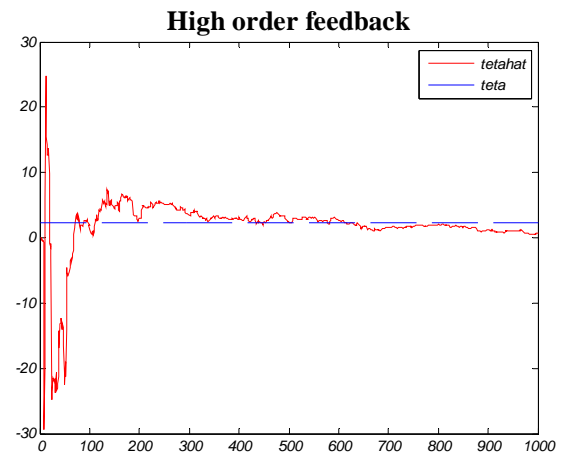
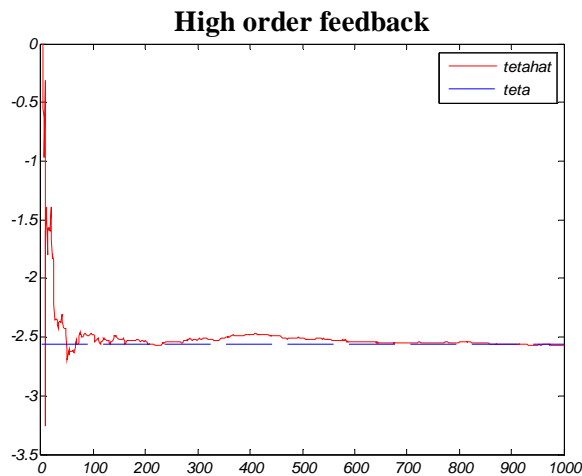
شکل (۵۷): نمودار تخمین پارامترها با روش RLS با وجود فیدبک مرتبه دوم.

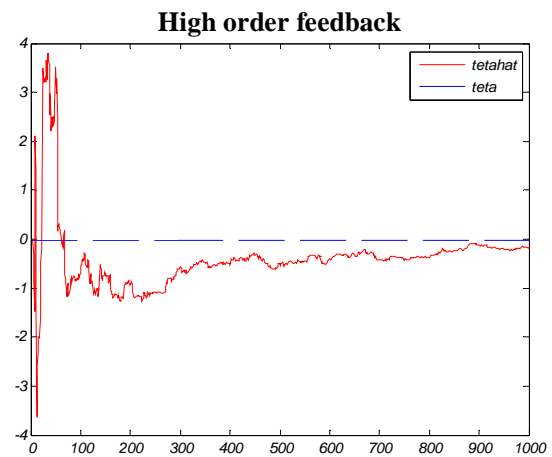
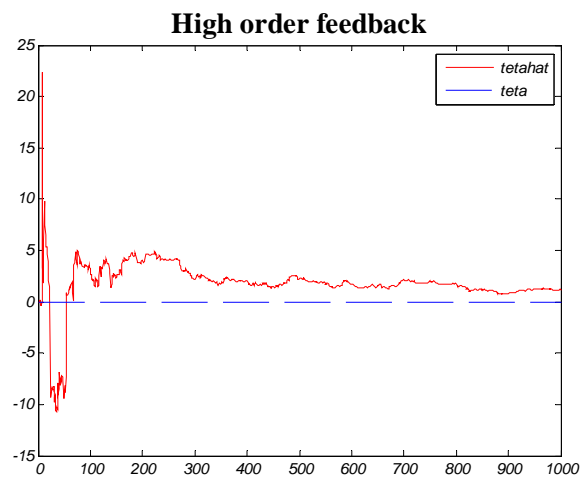
مشاهده می‌شود که نیمی از پارامترهای مدل بخوبی تخمین زدن نشده‌اند. دلیل این موضوع این است که مرتبه فیدبک نسبت به مرتبه مدل کوچکتر است.

حال سراغ یک فیدبک مرتبه بالاتر می‌رویم که مرتبه آن با مرتبه سیستم برابر است. فیدبک را بگونه‌ای انتخاب می‌کنیم که منجر به پایداری سیستم حلقه بسته شود. فیدبک زیر تمام قطب‌های سیستم حلقه بسته را در داخل دایره واحد قرار خواهد داد.

$$u(t) = y(t - 1) + 0.1y(t - 2) + 0.1y(t - 3)$$

تخمین‌های بدست آمده با روش RLS بصورت شکل (۵۸) بدست می‌آیند.





شکل (۵۸): نمودار تخمین پارامترها با روش RLS با وجود فیدبک مرتبه سوم.

مشاهده می‌کنیم که با اعمال این فیدبک پارامترها به درستی تخمین زده می‌شوند. دلیل این موضوع نیز برابر بودن مرتبه فیدبک با مرتبه سیستم می‌باشد.