ارتعاشات مکانیکی

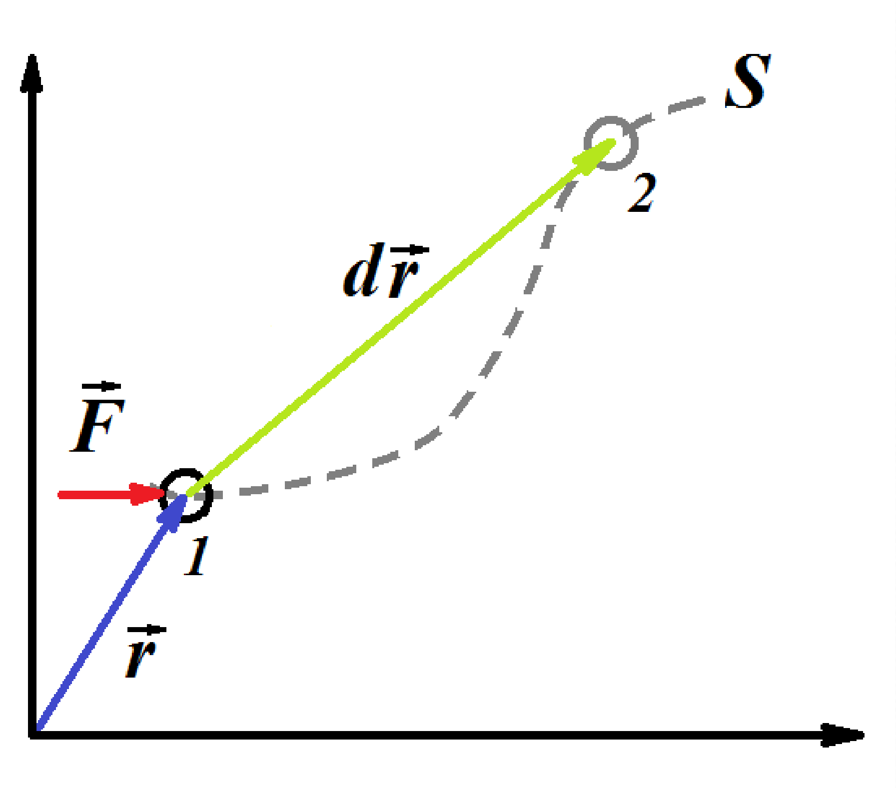
ارائه دهنده: دکتر سیروان فرهادی

فصل چهارم: ارتعاشات آزاد سیستم‌های یک درجه آزادی- روشهای کار و انرژی

ارائه دهنده: دکتر سیروان فرهادی

فهرست مطالب

قضیه کار و انرژی



بنابر قانون دوم نیوتون اگر برآیند نیروهای وارد بر یک ذره برابر صفر نباشد، ذره شتاب می‌گیرد و رابطه‌ی بین برآیند نیروهای وارد بر ذره و شتاب آن به صورت زیر است:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{V}}{dt}$$

از طرفی می‌دانیم که سرعت ذره برابر است با تغییرات بردار موقعیت ذره بر واحد زمان:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad d\vec{r} = \vec{V}dt$$

با ضرب اسکالر دو معادله‌ی فوق به رابطه‌ی زیر می‌رسیم که آن را معادله‌ی مستقل از زمان می‌نامند:

$$m\vec{V}\cdot d\vec{V} = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

در این صورت با انتگرال‌گیری از رابطه‌ی قبل بر روی مسیر حرکت، بدست می‌آید:

$$\int_{\vec{V}_1}^{\vec{V}_2} m\vec{V} \cdot d\vec{V} = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\frac{1}{2}mV_2^2 - \frac{1}{2}mV_1^2 = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

سمت چپ معادله‌ی فوق مستقل از مسیر بوده و تنها به اندازه‌ی سرعت در ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد. اگر کمیت اسکالر انرژی جنبشی را مطابق زیر تعریف کنیم،

$$T = \frac{1}{2}mV^2$$

و با تعریف کار یک نیرو به صورت حاصل‌ضرب اسکالر بردار نیرو و جابجایی (و یا به عبارتی حاصل‌ضرب جابجایی و مؤلفه‌ی نیرو در راستای جابجایی)،

$$W_{۱-۲} = \int_{S\,(۱\rightarrow ۲)} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

به قضیه کار و انرژی می رسیم:

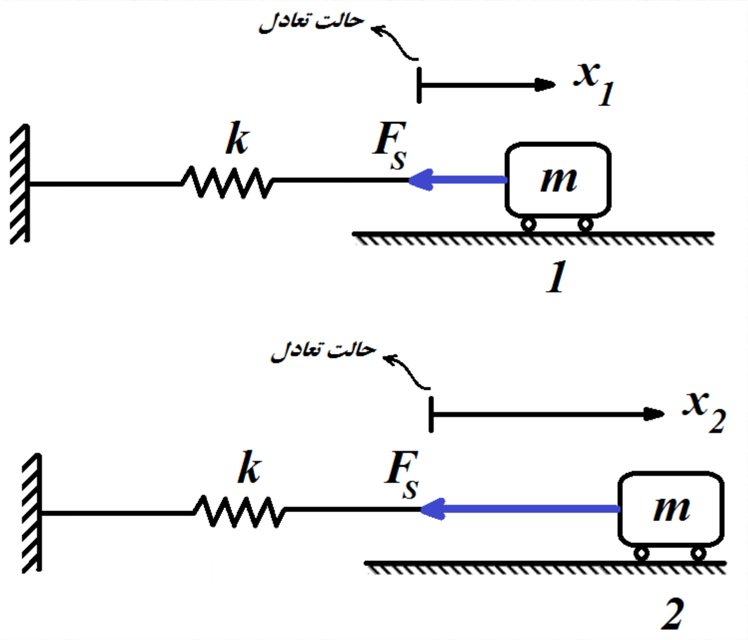
$$T_{۲} - T_{۱} = W_{۱-۲}$$

اگر کار یک نیرو در یک جابجایی تنها به ابتدا و انتهای مسیر بستگی داشته باشد آن نیرو را یک نیروی پایستار می‌نامند. با تفکیک کردن نیروهای وارد بر ذره به نیروهای پایستار و غیرپایستار، می‌توان نوشت:

$$T_{۲} - T_{۱} = W'_{۱-۲} + W''_{۱-۲}$$

به عنوان مثال کار نیروی فنر بر روی یک ذره می‌تواند به صورت زیر حساب شود:

$$W'_{۱-۲} = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_۱}^{x_۲} -k\ x\ dx = \frac{۱}{۲} k\ x_۱^۲ - \frac{۱}{۲} k\ x_۲^۲$$



ملاحظه می‌شود که در رابطه‌ی فوق کار نیروی فنر به دو کمیت در ابتدا و انتهای مسیر بستگی دارد که مستقل از مسیر حرکت هستند. با تعریف انرژی پتانسیل فنر به صورت

$$U = \frac{۱}{۲} k x^{۲}$$

می‌توان کار نیروی فنر را برابر منفی تغییرات انرژی پتانسیل آن دانست:

$$W'_{۱-۲} = -(U_{۲} - U_{۱})$$

روابط مشابهی را می‌توان بر دیگر انواع نیروی پایستار نیز بدست آورد. بنابراین می‌توان قضیه کار و انرژی را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$(T_{۲} + U_{۲}) - (T_{۱} + U_{۱}) = W''_{۱-۲}$$

در رابطه‌ی بالا مجموع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل را انرژی مکانیکی ذره می‌نامند.

روش بقای انرژی مکانیکی

در سیستم‌های پایستار، کار نیروهای غیر پایستار برابر صفر است ($W''_{1-2}=0$) و در نتیجه انرژی مکانیکی برابر مقدار ثابتی است:

$$T+U=cte$$

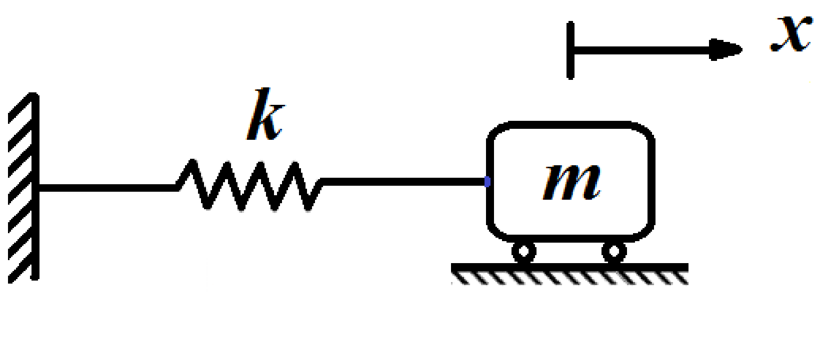
بنابراین در یک جابجایی که قاعدتاً در یک بازه زمانی رخ می‌دهد، تغییرات انرژی مکانیکی نسبت به زمان برابر صفر است:

$$\frac{d}{dt}(T+U)=0$$

بنابراین می‌توان با نوشتن انرژی مکانیکی یک سیستم یک درجه آزادی بر حسب متغیر جابجایی و مشتق‌گیری نسبت به زمان، مستقیماً به معادله‌ی دیفرانسیل حرکت رسید.

مثال

با استفاده از روش بقای انرژی مکانیکی معادله‌ی دیفرانسیل سیستم نشان داده شده را بدست آورید.



انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم برابرند با

$$T = \frac{۱}{۲} m \dot{x}^{۲}, \qquad U = \frac{۱}{۲} k x^{۲}$$

در نتیجه

$$\frac{dT}{dt} = m \dot{x} \ddot{x}, \qquad \frac{dU}{dt} = k x \dot{x}$$

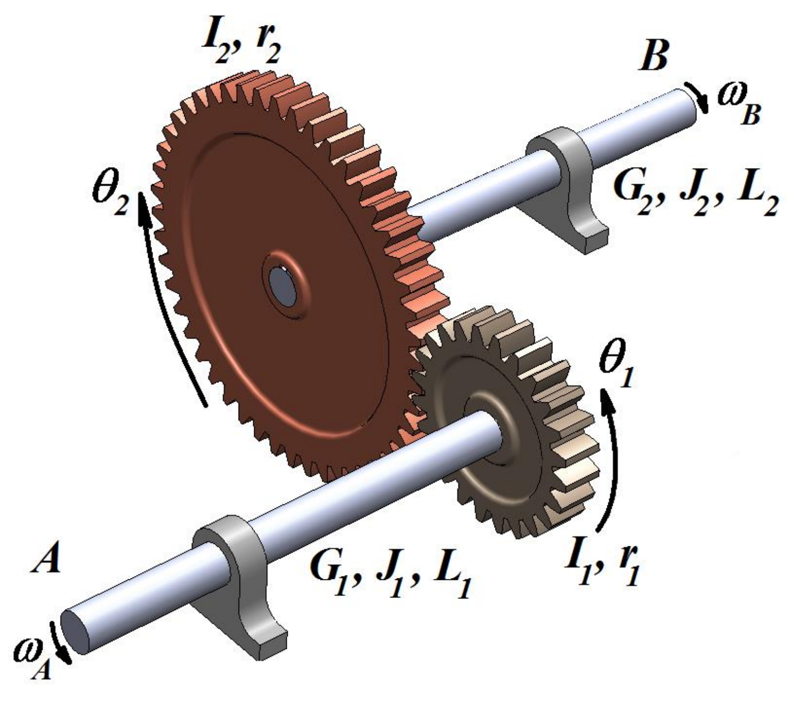
با قرار دادن در رابطه بقای انرژی مکانیکی، خواهیم داشت:

$$(m \ddot{x} + k x) \dot{x} = ۰$$

از آنجایی که در هنگام ارتعاش سرعت جرم در حالت کلی مخالف صفر است، بدست می‌آید:

$$m \ddot{x} + k x = ۰$$

مثال



شکل مقابل یک گیربکس ساده را نشان می‌دهد. با فرض آنکه جرم محورها در مقابل چرخدنده‌ها ناچیز باشد و سرعت ورودی و خروجی گیربکس نیز ثابت و یا برابر صفر باشد، فرکانس طبیعی مجموعه را در ارتعاشات پیچشی بدست آورید.

حل: با توجه به شکل، محورها را می‌توان معادل دو فنر پیچشی در نظر گرفت. با فرض آنکه سرعت ورودی و خروجی برابر صفر باشد، انرژی جنبشی و پتانسیل مجموعه از روابط زیر بدست می‌آید:

$$T=\frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2+\frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2,$$

$$U=\frac{1}{2}k_{t1}\theta_1^2+\frac{1}{2}k_{t2}\theta_2^2\qquad \left(k_{t1}=\frac{G_1J_1}{L_1},\qquad k_{t2}=\frac{G_2J_2}{L_2}\right)$$

که به اعمال رابطه قیدی

$$\theta_2=\frac{r_1}{r_2}\theta_1=n\,\theta_1$$

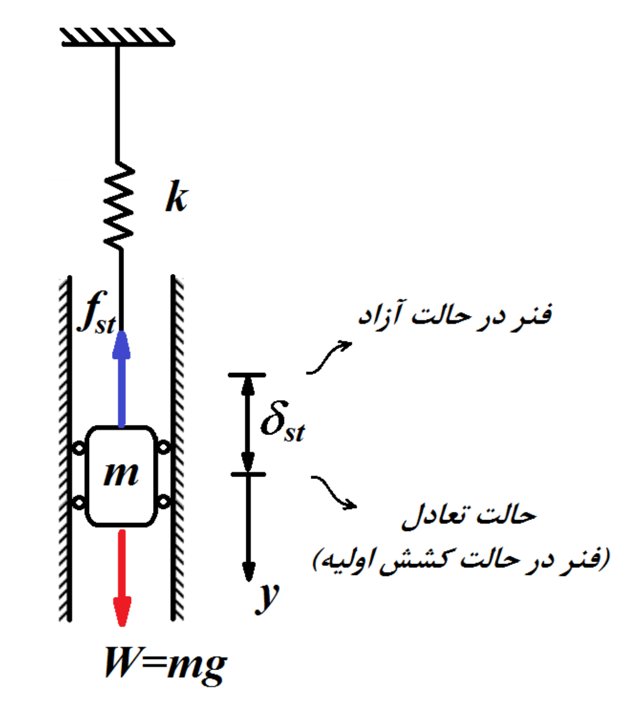
بدست می‌آید:

$$T=\frac{۱}{۲}(I_{۱}+n^{۲}I_{۲})\dot{\theta}_{۱}^{۲},\qquad U=\frac{۱}{۲}(k_{t۱}+n^{۲}k_{t۲})\theta_{۱}^{۲}$$

با جایگذاری روابط فوق در رابطه‌ی بقای انرژی مکانیکی و ساده‌سازی آن، معادله‌ی حرکت مطابق زیر بدست می‌آید:

$$(I_{۱}+n^{۲}I_{۲})\ddot{\theta}_{۱}+(k_{t۱}+n^{۲}k_{t۲})\theta_{۱}=۰$$

اثر نیروی وزن



$$\delta_{st} = mg / k$$

نیروی وزن موجب تغییر شکل استاتیکی فنر شده است.

نیروی وزن باعث یک تغییر شکل اولیه در داخل فنر می‌شود. بنابراین با توجه به شکل و با در نظر داشتن انرژی پتانسیل وزن، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل سیستم برابر خواهند بود با:

$$T = \frac{۱}{۲} m \dot{y}^{۲}$$

$$U = \frac{۱}{۲} k (y + \delta_{st})^{۲} - mg (y + \delta_{st})$$

که با مشتق‌گیری از آنها نسبت به زمان بدست می‌آید:

$$\frac{dT}{dt} = m \dot{y} \ddot{y},$$

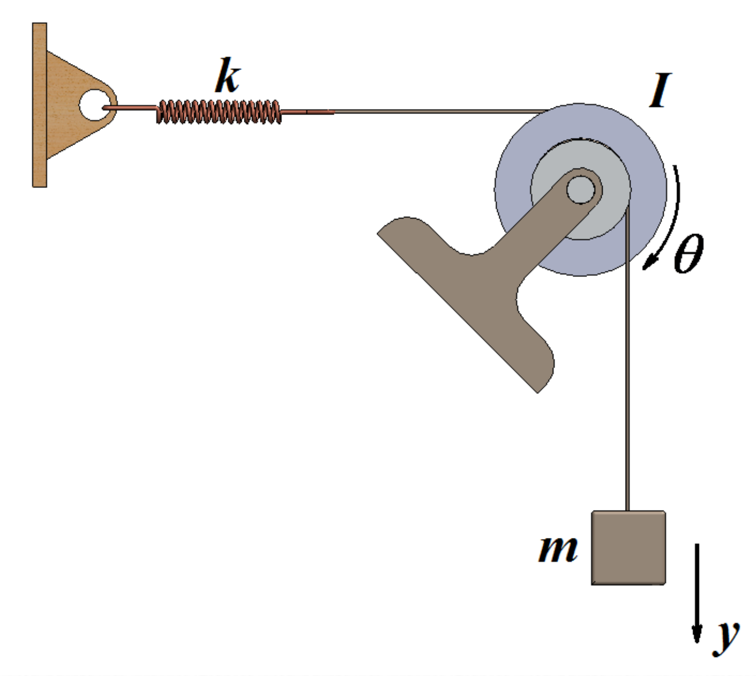
$$\frac{dU}{dt} = k (y + \delta_{st}) \dot{y} - mg \dot{y} = k (y + \frac{mg}{k}) \dot{y} - mg \dot{y} = k y \dot{y}$$

با جایگذاری مقادیر فوق در رابطه‌ی بقای انرژی مکانیکی و پس از ساده‌سازی، به معادله‌ی دیفرانسیل زیر می-رسیم:

$$m\,\ddot{y} + k\,y = 0$$

که در آن اثر نیروی جاذبه (توسط کشش اولیه فنر) حذف شده است.

مثال



مطابق شکل دو قرقره متصل به هم بر روی یک محور قرار گرفته‌اند و می توانند آزادنه و بدون اصطکاک حول محور خود بچرخند. دور هر یک از قرقره‌ها یک طناب پیچیده شده است که به دلیل نیروی اصطکاک، نسبت به قرقره لغزشی ندارد. یک سر یکی از طناب‌ها به یک فنر با ضریب سختی k وصل شده است و با تغییر شکل فنر، قرقره می‌تواند حول خود بچرخد. با استفاده از روش انرژی، فرکانس طبیعی مجموعه را بدست آورید.

حل: فرض کنید شعاع قرقره‌های داخلی و خارجی را به ترتیب با r_i و r_o نشان دهیم. در نتیجه مقدار جابجایی بلوک و مقدار کشش فنر توسط معادلات زیر با مقدار چرخش محور رابطه خواهند داشت:

$$y = r_i\,\theta, \quad \delta = r_o\,\theta$$

به این ترتیب می‌توان انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل مجموعه را مطابق زیر بدست آورد:

$$T = \frac{۱}{۲} m\,\dot{y}^{۲} + \frac{۱}{۲} I\,\dot{\theta}^{۲} = \frac{۱}{۲}(m\,r_i^{۲} + I)\dot{\theta}^{۲}$$

$$U = \frac{۱}{۲} k\,\delta^{۲} = \frac{۱}{۲} k\,r_o^{۲}\,\theta^{۲}$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی بالا بدست می‌آید:

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \left((m\,r_i^{۲} + I)\ddot{\theta} + k\,r_o^{۲}\,\theta\right)\dot{\theta} = ۰$$

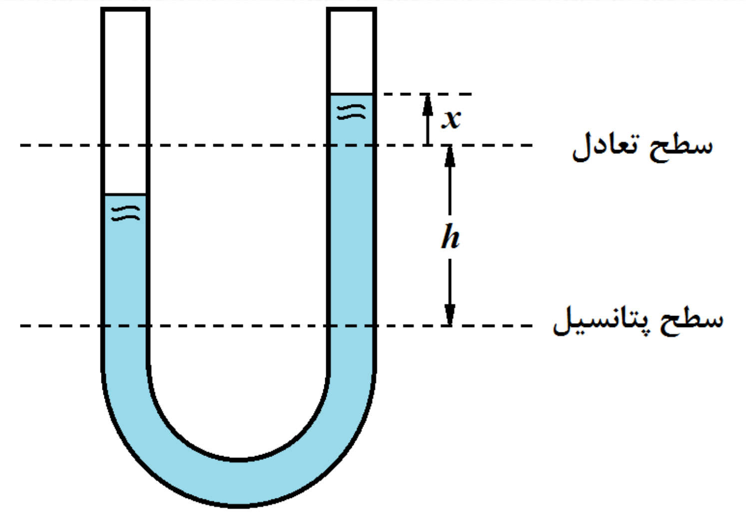
که نتیجه می‌دهد

$$(m\, r_i^{۲} + I)\ddot{\theta} + k\, r_o^{۲}\theta = ۰$$

بنابراین فرکانس طبیعی سیستم برابر است با

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}} = \sqrt{\frac{k\, r_o^{۲}}{m\, r_i^{۲} + I}}$$

مثال



شکل مقابل یک لوله‌ی U شکل را نشان می‌دهد. اگر فشار دو سمت لوله یکسان باشد، انتظار می‌رود در حالت تعادل، ارتفاع سیال در دو سمت لوله یکسان باشد. حال اگر یک فشار ناگهانی به یک سمت لوله اعمال شده و سپس برداشته شود، جابجایی اولیه‌ی سیال و سپس بازگشت آن به سمت حالت تعادل، یک سیستم نوسانی را شکل می‌دهد. با صرفنظر از لزجت سیال، دوره‌ی تناوب نوسان‌ها را بدست آورید.

حل: ابتدا مطابق شکل، یک سطح پتانسیل برای محاسبه‌ی انرژی پتانسیل گرانشی در نظر می‌گیریم. فرض می-کنیم مقطع لوله یکنواخت باشد. در این صورت، اگر ارتفاع سیال به اندازه‌ی X از یک سمت افزایش یابد، ارتفاع آن در سمت دیگر به اندازه‌ی X کاهش خواهد یافت. بنابراین انرژی پتانسیل گرانشی سیال را می‌توان مطابق زیر محاسبه کرد (با صرفنظر از سیال در قسمت زیرین لوله که همیشه مقدار ثابتی است):

$$U = \rho g A \frac{(h-x)^{۲}}{۲} + \rho g A \frac{(h+x)^{۲}}{۲} = \rho g A\, x^{۲} + \rho g A\, h^{۲} \qquad (I)$$

اگر سیال قسمتی از لوله به طول L را پر کرده باشد، با توجه به آنکه تمام ذرات سیال با سرعت یکنواختی حرکت می‌کنند، انرژی جنبشی سیال برابر است با

$$T = \frac{۱}{۲} m \dot{x}^{۲} = \frac{۱}{۲} \rho A L\, \dot{x}^{۲} \qquad (II)$$

در نتیجه معادله‌ی پایستگی انرژی مکانیکی را می‌توان به شکل زیر استخراج کرد:

$$\frac{d}{dt}(T+U)=\rho AL\,\dot{x}\,\ddot{x}+2\rho gA\,x\,\dot{x}=\rho AL\dot{x}\,(\ddot{x}+\frac{2g}{L}x)=0 \qquad (III)$$

از آنجایی که در حالت حرکت سرعت نوسان در حالت کلی مخالف صفر است، معادله‌ی حرکت به شکل زیر بدست می‌آید:

$$(\ddot{x}+\frac{۲g}{L}x)=۰ \qquad (IV)$$

بنابراین دوره‌ی تناوب سیستم برابر است با

$$\tau=\frac{۲\pi}{\omega}=\frac{۲\pi}{\sqrt{k_{eff}/m_{eff}}}=\frac{۲\pi}{\sqrt{۲g/L}}$$

روش جرم و سختی معادل

از قضیه‌ی کار و انرژی دیدیم که برای یک سیستم پایستار مجموع انرژی جنبشی و پتانسیل (انرژی مکانیکی) همواره مقداری ثابت است:

$$T_۱ + U_۱ = T_۲ + U_۲$$

زمانی که مجموعه به انتهای حرکت خود می‌رسد، انرژی جنبشی آن برابر صفر می‌شود و انرژی پتانسیل به بیشترین مقدار خود می‌رسد. از سوی دیگر زمانی که مجموعه از حالت تعادل می گذرد، انرژی جنبشی آن به بیشترین مقدار رسیده و انرژی پتانسیل برابر صفر می‌شود (حالت تعادل را به عنوان مرجع پتانسیل انتخاب کنید). بنابراین اگر حالت تعادل را به عنوان نقطه ۱ و حالت توقف را به عنوان حالت ۲ در نظر بگیریم خواهیم داشت:

$$T_۱ = T_{max}, \quad U_۱ = ۰, \quad T_۲ = ۰, \quad U_۲ = U_{max}$$

و در نتیجه

$$T_{\max} = U_{\max}$$

فرض کنید انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم را بر حسب سرعت و جابجایی یک نقطه دلخواه از سیستم به شکل زیر نوشته باشیم:

$$T = \frac{۱}{۲} m_{eff} \; \dot{x}^{۲},$$

$$U = \frac{۱}{۲} k_{eff} \; x^{۲}$$

چون در مجموعه‌های پایستار میرایی وجود ندارد، حرکت مجموعه به صورت هارمونیک است:

$$x = A \sin \omega t, \qquad \dot{x} = A\omega \cos \omega t$$

با جایگذاری روابط فوق در رابطه‌ی قبل از آن، خواهیم داشت:

$$T = \frac{۱}{۲} m_{eff} A^{۲} \sin^{۲} \omega t,$$

$$U = \frac{۱}{۲} k_{eff} A^{۲} \omega^{۲} \cos^{۲} \omega t$$

فرض کنید انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم را بر حسب سرعت و جابجایی یک نقطه دلخواه از سیستم به شکل زیر نوشته باشیم:

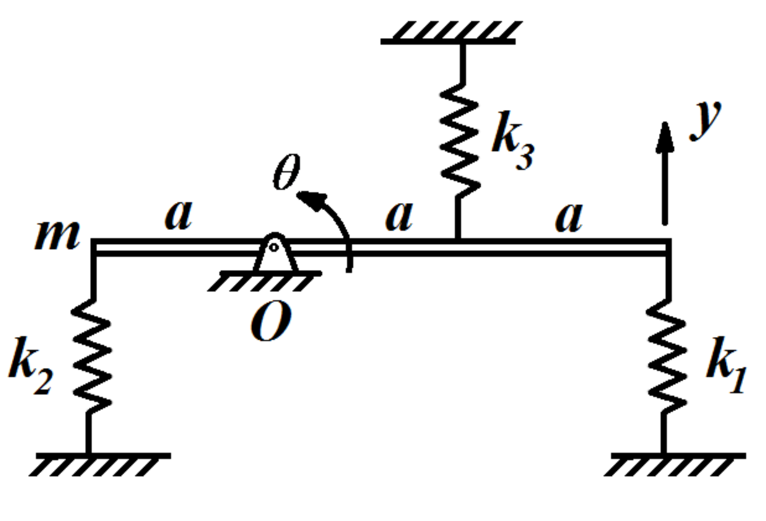
$$T_{\max} = \frac{۱}{۲} m_{eff} A^{۲}, \quad U_{\max} = \frac{۱}{۲} k_{eff} A^{۲} \omega^{۲}$$

پس می‌توان گفت:

$$\frac{۱}{۲} m_{eff} A^{۲} = \frac{۱}{۲} k_{eff} A^{۲} \omega^{۲} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}}$$

این بدان معنی است که با نوشتن انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل بر حسب سرعت و جابجایی یک نقطه یکسان و بدست آوردن جرم و سختی مؤثر سیستم در آن نقطه، می‌توان مستقیماً فرکانس طبیعی سیستم را بدست آورد. همچنین می‌توان سیستم را با یک جرم و فنر ساده در آن نقطه مدلسازی کرد.

مثال



جرم و سختی مؤثر سیستم نشان داده شده در شکل مقابل را بر حسب دوران میله و یا جابجایی انتهای میله بدست آورید و با استفاده از آن فرکانس طبیعی سیستم را تعیین کنید.

حل: با توجه به شکل نشان داده شده و با فرض کوچک بودن زاویه دوران، می‌توان نوشت:

$$T=\frac{۱}{۲}I_O\dot{\theta}^{۲}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۳ma^{۲}}{۴}\right)\dot{\theta}^{۲}$$

$$U=\frac{۱}{۲}k_{۱}(۲a\theta)^{۲}+\frac{۱}{۲}k_{۲}(a\theta)^{۲}+\frac{۱}{۲}k_{۳}(a\theta)^{۲}=\frac{۱}{۲}(۴k_{۱}+k_{۲}+k_{۳})a^{۲}\theta^{۲}$$

و یا بر حسب جابجایی انتهای میله $(\theta=y/(۲a))$:

$$T=\frac{۱}{۲}\left(\frac{۳m}{۴}\right)\left(\frac{\dot{y}}{۲}\right)^{۲}$$

$$U=\frac{۱}{۲}(۴k_{۱}+k_{۲}+k_{۳})\left(\frac{y}{۲}\right)^{۲}$$

در نتیجه فرکانس طبیعی برابر است با

$$\omega=\sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}}=\sqrt{\frac{۴k_{۱}+k_{۲}+k_{۳}}{۳m/۴}}$$

اصل ریلی

در مثال‌های قبل دیدیم چگونه برای یک سیستم یک درجه آزادی می‌توان با استفاده از روش انرژی یک جرم و سختی معادل بدست آورد و فرکانس طبیعی آن را محاسبه کرد. روش انرژی را می‌توان برای سیستم‌های چند درجه آزادی و سیستم‌های با جرم گسترده (بی‌نهایت درجه آزادی) نیز به کار برد، به شرط آنکه سرعت و موقعیت هر ذره از سیستم مشخص باشد.

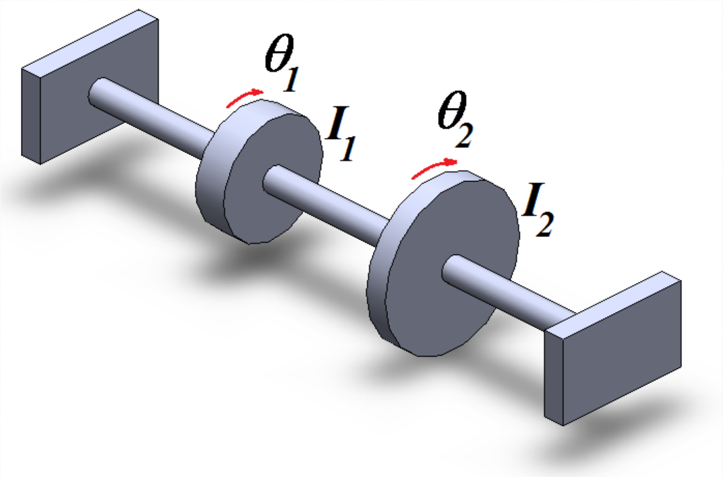
در یک سیستم یک درجه آزادی، اگر انرژی جنبشی و پتانسیل مجموعه را بر حسب سرعت و جابجایی یک نقطه مشخص از سیستم بنویسیم، می توان برای مجموعه در آن نقطه یک جرم و سختی مؤثر بدست آورد:

$$T = \frac{1}{2} m_{eff} \dot{x}^2, \qquad U = \frac{1}{2} k_{eff} x^2$$

سپس با فرض پایستار بودن سیستم، فرکانس طبیعی به شکل زیر محاسبه می گردد:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}}$$

اما در سیستم‌های با جرم گسترده که دارای چند درجه آزادی و یا بی‌نهایت درجه آزادی هستند، سیستم می-تواند به تعداد درجات آزادی، شکل‌های ارتعاشی مختلف از خود نشان دهد و در نتیجه نمی‌توان سرعت و موقعیت نقاط مختلف را بر حسب یک نقطه‌ی خاص نوشت. اما برای هر شکلی از ارتعاش می‌توان یک فرکانس طبیعی بدست آورد که کوچکترین آنها را فرکانس طبیعی اصلی می‌نامند.



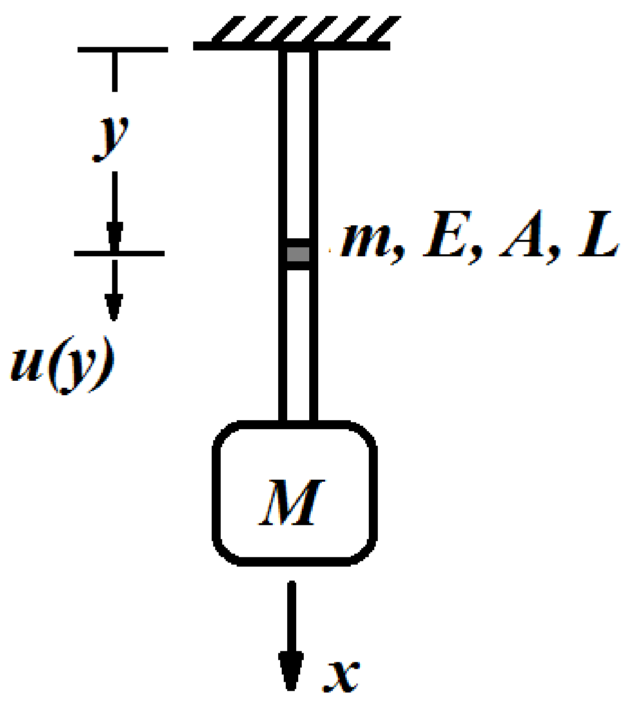
ریلی نشان داد که اگر بتوان با تقریب مناسبی شکل ارتعاشی مجموعه را حدس زد، می‌توان با محاسبه‌ی انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل مجموعه، فرکانس طبیعی مجموعه را با دقت خوبی بدست آورد و اگر مقدار خطا در تقریب شکل ارتعاش از مرتبه ε باشد، خطای تقریب فرکانس از مرتبه ε^2 خواهد بود.

همچنین ریلی نشان داد که اگر شکل حدس زده شده شرایط مرزی هندسی مسأله را ارضا کند، فرکانس طبیعی بدست آمده همواره از فرکانس طبیعی اصلی واقعی بزرگتر خواهد بود و هر چه حدس ما به واقعیت نزدیکتر باشد، فرکانس بدست آمده نیز به واقعیت نزدیکتر خواهد بود.

در هنگام استفاده از روش ریلی برای ارتعاشات جانبی یک سیستم، همواره می‌توان نحوه‌ی تغییر شکل سیستم تحت نیروی وزن را به عنوان یک الگوی مناسب برای تقریب شکل ارتعاشی سیستم در فرکانس طبیعی اصلی در نظر گرفت.

مثال

مطابق شکل یک وزنه را در انتهای آزاد یک میله یکنواخت و یک سرگیردار قرار داده‌ایم و مجموعه را به ارتعاشات طولی واداشته‌ایم. فرض کنید جابجایی وزنه را با X نشان دهیم. جرم و سختی مؤثر سیستم را بر حسب جابجایی وزنه بدست آورید و فرکانس طبیعی مجموعه را محاسبه کنید.



حل: با توجه به شکل نشان داده شده نیروی وزن باعث کشیده شدن میله می‌شود، در حالی که یک سر آن ثابت است و حرکت نمی‌نماید. بنابراین می‌توان تصور نمود که هر چه از انتهای گیردار میله دورتر شویم، مقدار جابجایی بیشتر است و به احتمال زیاد بین مقدار جابجایی و فاصله از تکیه‌گاه یک رابطه‌ی خطی برقرار است. می‌توانیم از این الگو برای تقریب شکل ارتعاش استفاده نماییم:

$$u(y) = ay + b, \quad u(0) = 0, \qquad u(L) = x$$

با اعمال شرایط مرزی و محاسبه ضرایب مجهول تابع تقریب، شکل نهایی تابع تقریب مطابق زیر بدست می آید:

$$u(y) = \frac{x}{L} y \qquad (I)$$

بنابراین با توجه به المان انتخاب شده برای میله، انرژی کرنشی سیستم برابر خواهد بود با

$$T = \int_{0}^{L} \frac{1}{2} \dot{u}^{2} dm + \frac{1}{2} M \dot{x}^{2} = \int_{0}^{L} \frac{1}{2} \dot{u}^{2} \left(\frac{m}{L} dy\right) + \frac{1}{2} M \dot{x}^{2}$$

که با استفاده از رابطه (I) به شکل زیر ساده می‌شود:

$$T = \frac{1}{2}\left(M + \frac{m}{3}\right)\dot{x}^{2} \qquad (II)$$

برای محاسبه‌ی انرژی پتانسیل سیستم، با فرض الاستیک بودن میله، انرژی کرنشی کل سیستم را محاسبه می-کنیم:

$$U = \int_{V} \frac{1}{2} \sigma \varepsilon \, dV = \int_{0}^{L} \frac{1}{2} E \varepsilon^{2} (A \, dy)$$

از طرفی می‌دانیم که در هر المان از میله کرنش برابر است با مقدار تغییر طول المان بخش بر طول آن:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial y}$$

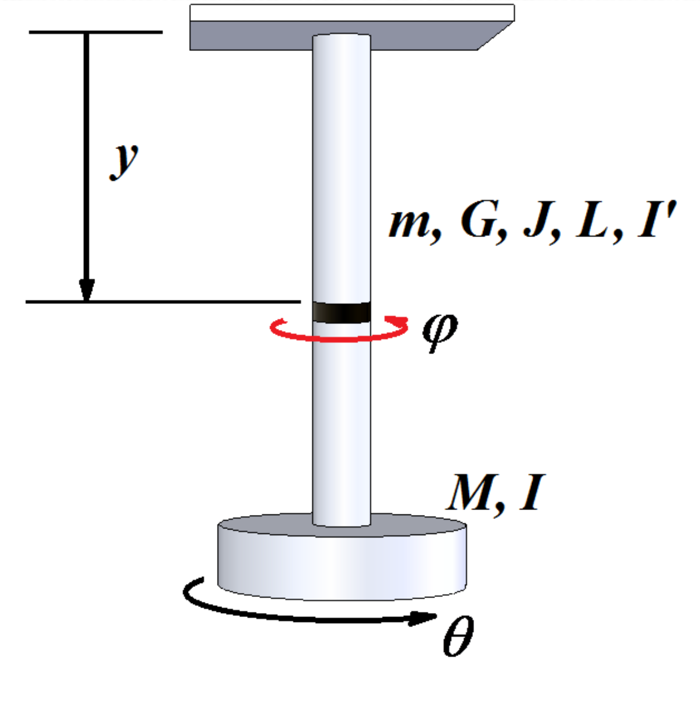
با جایگذاری رابطه‌ی فوق در معادله‌ی انرژی کرنشی، خواهیم داشت:

$$U = \int_{۰}^{L} \frac{۱}{۲} E \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{۲} (A\,dy) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{EA}{L}\right)x^{۲} \qquad (III)$$

در نتیجه با استفاده از روابط بدست آمده

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}} = \sqrt{\frac{EA/L}{M + m/۳}}$$

مثال



مطابق شکل یک دیسک صلب به انتهای یک میله‌ی الاستیک و یک‌سر گیردار وصل شده است. فرض کنید گشتاور لختی (گشتاور دوم جرم) میله حول محور دوران را با I' نشان دهیم. اگر این مجموعه را با یک تحریک اولیه وادار به ارتعاش پیچشی کنیم، فرکانس طبیعی نوسان را با استفاده از روش ریلی بدست آورید.

حل: مشابه مثال قبل می‌توانیم فرض کنیم که زاویه‌ی پیچش در طول تیر به صورت خطی تغییر می‌کند:

$$\varphi(y) = \frac{\theta}{L} y \qquad (I)$$

یک المان استوانه‌ای در طول میله در نظر می‌گیریم که گشتاور لختی آن کسری از گشتاور لختی کل میله است:

$$dI' = \frac{I'}{L} dy$$

بنابراین انرژی جنبشی کل سیستم برابر خواهد بود با

$$T = \int_L \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 dI' + \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2 = \int_0^L \frac{1}{2}\left(\frac{y}{L}\dot{\theta}\right)^2 \left(\frac{I'}{L}dy\right) + \frac{1}{2} I\dot{\theta}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(I + \frac{I'}{3}\right)\dot{\theta}^2 \qquad (II)$$

از مقاومت مصالح می‌دانیم که کرنش برشی در یک میله‌ی الاستیک تحت پیچش برابر است با

$$\gamma = \frac{r}{L}\theta$$

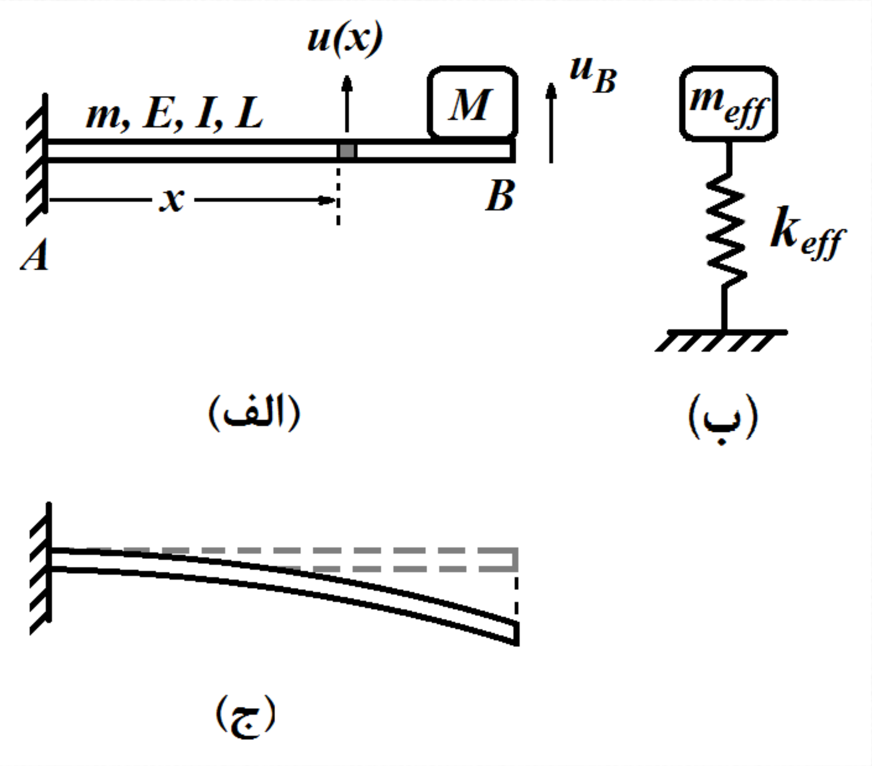
با جایگذاری رابطه‌ی فوق در معادله‌ی انرژی کرنشی و با توجه به تعریف گشتاور قطبی سطح ($J = \int_A r^{2} dA$)، بدست می‌آید:

$$U = \frac{1}{2}\left(\frac{GJ}{L}\right)\theta^{2}$$

و در نتیجه فرکانس طبیعی سیستم برابر است با

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}} = \sqrt{\frac{GJ/L}{I + I'/3}}$$

مثال



مطابق شکل بر روی یک تیر یک‌سرگیردار یک جرم متمرکز قرار داده‌ایم. با استفاده از روش ریلی جرم و سختی مؤثر سیستم را در انتهای تیر بدست آورید و فرکانس طبیعی مجموعه را تعیین کنید.

حل: از مقاومت مصالح می‌دانیم روابط حاکم بر خمش تیرها به شکل زیر هستند:

$$\sigma = -\frac{My}{I}, \quad M = EI\frac{d^2u}{dx^2}, \quad I = \int y^2 dA$$

می‌توانیم منحنی جابجایی را به شکل یک تابع درجه سوم فرض کنیم:

$$u(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

تابع حدس ما باید شرایط مرزی زیر را ارضا نماید:

$$u(0) = 0, \quad \left.\frac{du}{dx}\right|_{x=0} = 0, \quad u(L) = u_B, \quad \left.\frac{d^2u}{dx^2}\right|_{x=L} = 0$$

که با اعمال شرایط فوق، تابع حدس به شکل زیر در می‌آید:

$$u(x) = \left(\frac{۳L x^{۲} - x^{۳}}{۲L^{۳}} \right) u_B \qquad (I)$$

حال می‌توانیم انرژی جنبشی سیستم را به شکل زیر استخراج کنیم:

$$T = \int_L \frac{۱}{۲} \dot{u}^{۲} dm + \frac{۱}{۲} M \dot{u}_B^{۲} = \int_{۰}^{L} \frac{۱}{۲} \left(\frac{۳L x^{۲} - x^{۳}}{۲L^{۳}} \dot{u}_B \right)^{۲} \left(\frac{m}{L} dx \right) + \frac{۱}{۲} M \dot{u}_B^{۲}$$

که پس از ساده‌سازی نتیجه می‌دهد:

$$T = \frac{۱}{۲} (M + \frac{۳۳}{۱۴۰} m) \dot{u}_B^{۲} \qquad (II)$$

انرژی کرنشی تیر نیز برابر است با

$$U = \int_V \frac{۱}{۲}\sigma\,\varepsilon\,dV = \int_{۰}^{L}\int_A \frac{\sigma^{۲}}{۲E}\,dA\,dx = \frac{EI}{۲}\int_{۰}^{L}\left(\frac{d^{۲}u}{dx^{۲}}\right)^{۲}dx$$

که با جایگذاری تابع حدس و ساده‌سازی انتگرال‌ها، نتیجه می‌دهد:

$$U = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۳EI}{L^{۳}}\right)u_B^{۲} \qquad (III)$$

و بنابراین

$$\omega = \sqrt{\frac{k_{eff}}{m_{eff}}} = \sqrt{\frac{۳EI/L^{۳}}{M + ۳۳m/۱۴۰}}$$

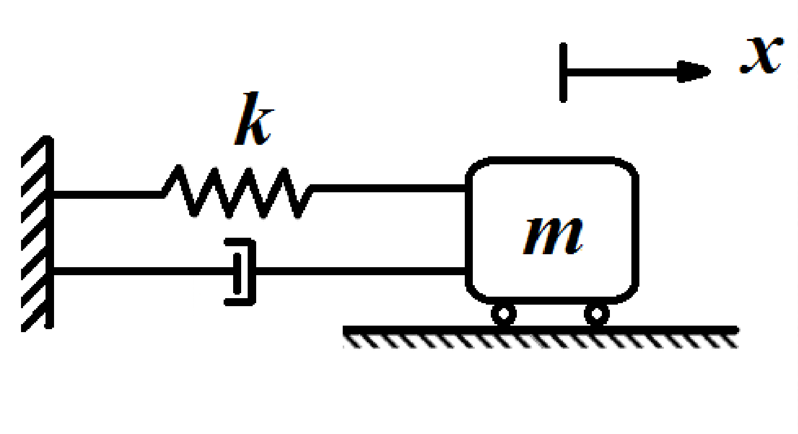
روش انرژی برای سیستم‌های غیرپایستار

چنانکه دیدیم، تغییرات انرژی مکانیکی یک سیستم برابر است با کار نیروهای غیرپایستار بر روی آن سیستم. این اصل را می‌توانیم برای یک جابجایی بسیار کوچک که در زمان بسیار کوتاهی اتفاق می‌افتد، به شکل دیفرانسیلی زیر بنویسیم:

$$dT + dU = dW''$$

بدیهی است که نیروهای تکیه‌گاهی که در راستای جابجایی مؤلفه ندارند و نیروهای مفاصل داخلی بدون اصطکاک که به صورت عمل و عکس‌العمل بوده و دارای جابجایی یکسانی هستند، کاری بر روی سیستم انجام نمی‌دهند.

مثال



با استفاده از روش انرژی معادله دیفرانسیل سیستم جرم، فنر و میراکننده‌ی نشان داده شده در شکل را بدست آورید.

حل: می‌توان انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل سیستم را به شکل زیر نوشت:

$$T=\frac{۱}{۲}m\,\dot{x}^{۲},\qquad U=\frac{۱}{۲}k\,x^{۲}$$

که با استفاده از قواعد دیفرانسیلی تغییرات آنها در جابجایی بسیار کوچک dx برابر خواهد بود با

$$dT=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}d\dot{x}=\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\frac{d\dot{x}}{dt}dt=(m\,\dot{x})\,\ddot{x}dt=m\;\ddot{x}(\dot{x}dt)=m\;\ddot{x}\,dx,$$
$$dU=k\,x\,dx$$

در این سیستم تنها نیروی غیرپایستاری که می‌تواند کار انجام دهد، نیروی میراکننده‌ی ویسکوز است که همواره همواره در خلاف جهت سرعت است. در نتیجه کار نیروی غیرپایستار میراگر برابر است با

$$dW''=-c\,\dot{x}\,dx$$

بنابراین با استفاده از رابطه‌ی انرژی خواهیم داشت:

$$dT + dU - dW'' = 0 \qquad \Rightarrow \qquad (m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x)\,dx = 0$$

و چون

$$dx \neq 0$$

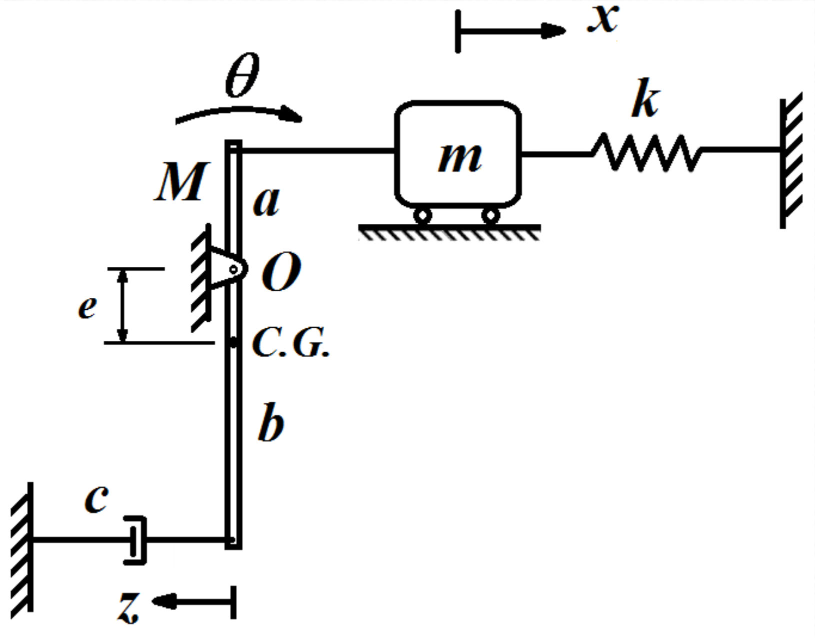
است، بدست می‌آید:

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = 0$$

که با روش نیوتونی نیز به همین نتیجه رسیدیم.

مثال

با استفاده از روش انرژی معادله‌ی دیفرانسیل سیستم نشان داده شده در شکل را بدست آورید فرض کنید ارتعاشات سیستم کوچک بوده و در حالت تعادل، فنر در وضعیت آزاد خود قرار دارد.



حل: با توجه به شکل، اگر گاری به اندازه‌ی x جابجا شود، میله به اندازه‌ی $\theta = x/a$ می‌چرخد و میراگر به اندازه‌ی $z = b\,x/a$ تغییر شکل می‌دهد. در این حالت مرکز جرم میله به اندازه‌ی $e(1-\cos\theta)$ تغییر ارتفاع می‌دهد. در نتیجه می‌توان انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل سیستم را به شکل زیر نوشت:

$$T = \frac{۱}{۲} m\,\dot{x}^{۲} + \frac{۱}{۲} I_O\,\dot{\theta}, \qquad U = \frac{۱}{۲} k\,x^{۲} + Mg\,e\,(۱-\cos\theta),$$

در نتیجه

$$dT = m\,\dot{x}\,d\dot{x} + I_O\,\dot{\theta}\,d\dot{\theta} = m\,\ddot{x}\,dx + I_O\,\ddot{\theta}\,d\theta = (m + \frac{I_O}{a^{۲}})\,m\,\ddot{x}\,dx$$

$$dU = k\,x\,dx + Mg\,e\sin\theta\,d\theta \approx (k + \frac{Mg\,e}{a^{۲}})\,x\,dx$$

از طرفی کار نیروی غیرپایستار میراگر ویسکوز برابر است با

$$dW = -c\,\dot{z}\,dz = -\frac{c\,b^۲}{a^۲}\dot{x}\,d\dot{x}$$

پس از جایگذاری در رابطه‌ی انرژی و پس از ساده‌سازی بدست می‌آید:

$$(m + \frac{I_O}{a^۲})\,\ddot{x} + \frac{c\,b^۲}{a^۲}\dot{x} + (k + \frac{Mg\,e}{a^۲})x = ۰$$

که در آن

$$e = \frac{b-a}{۲}, \qquad I_O = \bar{I} + M\,e^۲ = \frac{۱}{۱۲}M\,(a+b)^۲ + M\,e^۲$$

روش کار مجازی

روش کار مجازی در اساس یک روش استاتیکی است که توسط برنولی برای یافتن حالت تعادل سیستم‌ها معرفی گردید. این روش توسط دالامبر برای بررسی رفتار دینامیکی سازه‌ها گسترش یافت. کاربرد اصلی روش کار مجازی در تحلیل دینامیکی سازه‌های چند درجه آزادی است.

برای معرفی اصل کار مجازی لازم است که ابتدا مفهوم جابجایی مجازی را ارائه دهیم. فرض کنید که موقعیت یک سیستم یک درجه آزادی نسبت به حالت تعادل آن با x نشان داده شده باشد. به تغییرات کوچک و دلخواه موقعیت که به صورت ناگهانی (بدون صرف زمان) اتفاق می‌افتد، جابجایی مجازی گفته می‌شود و آن را با δx نشان می‌دهیم. جابجایی مجازی باید با قیدهای مسأله سازگاری داشته باشد.

کار مجازی که با δw نشان داده می‌شود، به کار انجام شده توسط تمام نیروهای فعال (نیروهای استاتیکی و نیروهای اینرسی) در جابجایی مجازی δx گفته می‌شود.

فرض کنید قانون دوم نیوتون را برای یک ذره مطابق زیر نوشته باشیم:

$$\sum F + \sum f \ - m\,\ddot{\vec{x}} = 0$$

که در آن $\sum F$ ، $\sum f$ و $-m\ddot{\vec{x}}$ به ترتیب برآیند نیروهای اعمالی، برآیند نیروی تکیه‌گاهی و نیروهای اینرسی می‌باشند. با ضرب عبارت فوق در بردار جابجایی مجازی $\delta\vec{x}$ خواهیم داشت:

$$\left(\sum F + \sum f \ - m\,\ddot{\vec{x}}\right)\cdot\delta\vec{x} = 0$$

با فرض آنکه نیروهای تکیه گاهی کاری انجام ندهند (عمود بر راستای جابجایی باشند)، معادله‌ی بالا را می‌توان به شکل زیر نوشت:

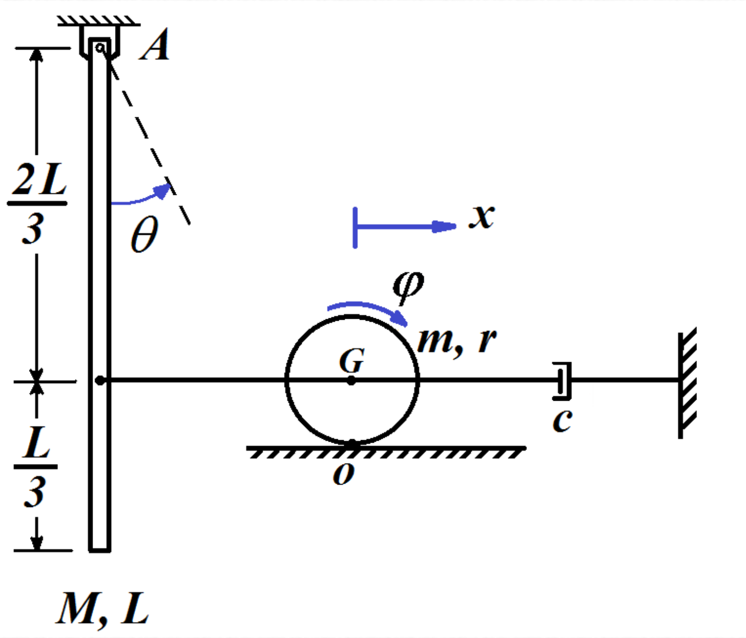
$$\left(\sum F - m\,\ddot{\vec{x}}\right)\cdot\delta\vec{x} = 0$$

به این ترتیب به اصل کار مجازی می‌رسیم که بیان می‌دارد در یک جابجایی مجازی کار برآیند نیروهای فعال وارد بر ذره برابر صفر است. این اصل را می‌توان برای مجموعه‌ای از ذرات نیز گسترش داد. برای چنین سیستم-هایی کار نیروهای داخلی اجسام صلب و نیروهای مفاصل بدون اصطکاک برابر صفر است. در نتیجه آنها را در معادلات وارد نمی کنیم.

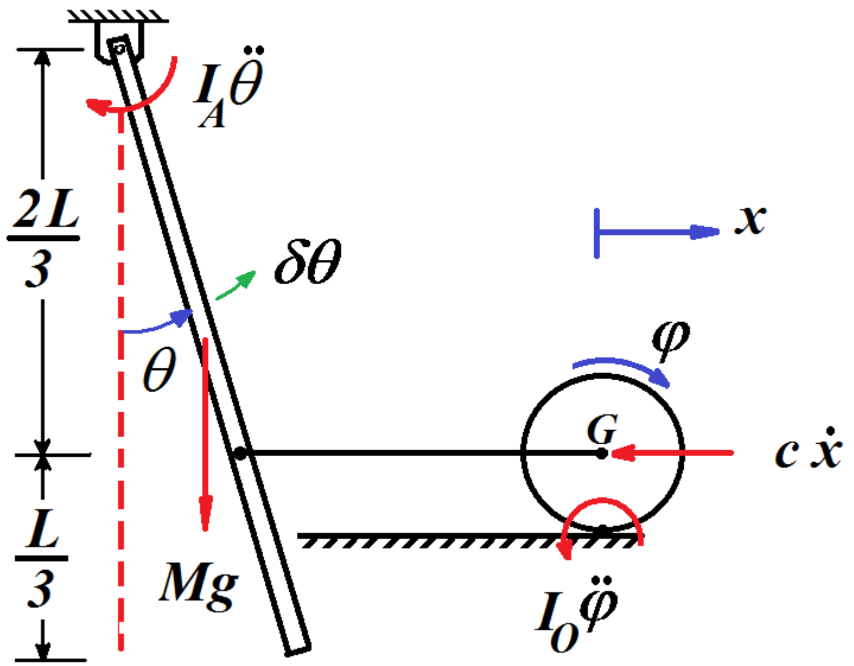
کوپل‌های اعمال شده و گشتاورهای اینرسی نیز می‌توانند کار انجام دهند که کار آنها برابر است با حاصل‌ضرب گشتاور و مقدار دوران در محل اعمال گشتاور که باید در مجموع کارهای انجام شده وارد شود.

مزیت اصلی روش کار مجازی در این است که ما تنها نیروهایی را که کار انجام می‌دهند، در معادلات وارد می‌کنیم و این موجب سادگی زیاد حل مسأله می‌شود.

مثال



در شکل مقابل دیسک بر روی صفحه افق دارای غلتش خالص است. با استفاده از روش کار مجازی، معادله‌ی دیفرانسیل سیستم را بدست آورید.



$I_A\ddot{\theta}$
$\frac{2L}{3}$
$\delta\theta$
x
θ
φ
G
$c\,\dot{x}$
$\frac{L}{3}$
Mg
$I_O\ddot{\varphi}$

حل: اگر جسم دارای یک نقطه ثابت باشد، می‌توان نیروها و گشتاورهای اینرسی را به آن نقطه منتقل کرد. بنابراین در حل این مسأله، ما یک گشتاور اینرسی معادل بر روی نقاط O و A قرار می‌دهیم. با توجه به شکل، قضیه‌ی کار مجازی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$-I_A\ddot{\theta}\,\delta\theta - I_O\ddot{\varphi}\,\delta\varphi - c\,\dot{x}\,\delta x - mg\frac{L}{۲}\sin\theta\,\delta\theta = ۰$$

از طرفی می‌دانیم

$$\sin\theta \approx \theta \quad \Rightarrow \quad x = r\varphi = \frac{۲L}{۳}\theta \quad \Rightarrow \quad \delta x = r\,\delta\varphi = \frac{۲L}{۳}\delta\theta$$

با جایگذاری روابط فوق در روابط کار مجازی و با حذف $\delta\varphi$، بدست می‌آید:

$$\left(I_O + \left(\frac{۳r}{۲L}\right)^۲ I_A\right)\ddot{\varphi} + c\,r^۲\dot{\varphi} + \frac{mg\,L}{۲}\left(\frac{۳r}{۲L}\right)^۲\varphi = ۰$$