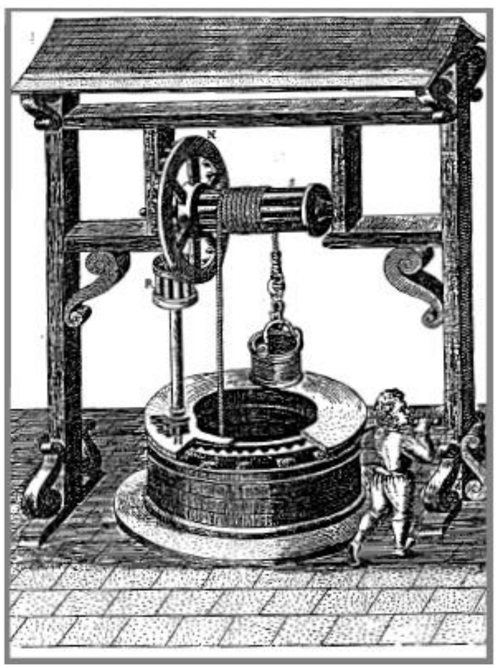
فصل پنجم

اصطکاک



The Figure, of a human-powered pump, is taken from The Various And Ingenious Machines of Agostino Remelli,a sixteenth century, late Renaissance work originally published in Italian and French.

۱-۵- نیروی اصطکاک:

هنگامی که سطحی بر روی سطح دیگر حرکت داده شود، یک نیروی مقاوم به صورت مماس بر این سطوح در جهت مخالف حرکت آنها وارد عمل می شود. نیروی مقاوم به نام نیروی اصطکاک معروف بوده و مقدار آن بستگی به خواص فیزیکی مواد تشکیل دهنده دو سطح، نیروی عکس العمل عمودی بین سطوح، فرم و حالت سطوح تماسی دارد. آزمایش و تجربه نشان می دهد که معمولاً نیروی اصطکاک، قبل از اینکه یک سطح بر روی سطح دیگری شروع به حرکت کند، کمی بیشتر از موقعی است که این حرکت شروع شده است. به‌عبارت دیگر مقدار نیروی لازم برای غلبه بر اصطکاک در حال سکون، که به نام اصطکاک استاتیکی معروف است، از نیرویی که برای غلبه‌کردن بر اصطکاک در حال حرکت، که به نام اصطکاک لغزشی یا دینامیکی معروف است، بیشتر باشد.

هرگاه تمایلی برای لغزش بین دو سطح وجود داشته باشد، نیروی اصطکاک ایجاد شده همواره در جهت خلاف آن عمل می کند. در انواع ماشین‌ها و فرآیندها تمایل این است که اثر بازدارنده نیروهای اصطکاک به حداقل مقدار خود رسانده شود. در مواردی دیگر لازم است، اثر اصطکاک به حداکثر برسد. اصطکاک موجب هدر رفتن انرژی می شود که به صورت حرارت تلف و در نهایت بین قطعات موجب سایش نیز می شود.

۲-۵- مفاهیم عمومی:

۱-اصطکاک استاتیکی بین دو جسم، نیروی مماسی است که با لغزش یک جسم نسبت به دیگری مخالفت می کند.

۲- اصطکاک حدی F' ، حداکثر مقدار اصطکاک استاتیکی است و درآستانه حرکت اتفاق می افتد.

۳-اصطکاک جنبشی نیروی مماسی بین دو جسم بعد از شروع حرکت می باشد و کمتر از اصطکاک استاتیکی است.

۴- زاویه اصطکاک، زاویه بین خط اثر واکنش کلی یک جسم بر روی دیگر و قائم به مماس مشترک بین دو جسم می باشد و هنگامی است که حرکت در آستانه باشد.

۵- ضریب اصطکاک استاتیکی، اصطکاک حدی F' به نیروی قائم N می باشد. $\mu = \dfrac{F'}{N}$

۶- ضریب اصطکاک جنبشی نسبت اصطکاک جنبشی به نیروی عمود بر سطح می باشد.

۷- زاویه α زاویه یک سطح شیبدار ممکن است قبل از قرار داشتن شی بر روی آن تحت اثر نیروی جاذبه و عکس العمل سطح افزایش یابد که آستانه حرکت می باشد.

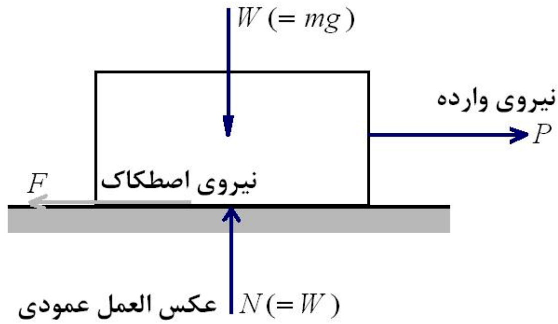
۳-۵- ضرایب اصطکاک:

ضرایب اصطکاک به صورت تجربی تعیین شده اند و وابسته به صافی سطوح و بخصوص شرایط هستند. جدول (۵-۱) تنها برای راهنمایی انتخاب شده است. قضاوت قابل توجه زمانی انجام می شود که یک مقدار ضریب اصطکاک برای یک مجموعه با شرایط ویژه انتخاب می گردد.

جدول ۵-۱- ضریب اصطکاک استاتیکی و لغزشی برای شرایط و مواد مختلف

لغزش	استاتیک	شرط	ماده
۰/۰-۲/۵	۰/۰-۳/۶	خشک	**چوب روی چوب**
۰/۰-۲/۴	۰/۰-۴/۷	مرطوب	
۰/۰-۳/۵	۰/۰-۲/۶	خشک	**چوب روی فلز**
۰/۰-۲/۴	۰/۰-۵/۷	مرطوب	
۰/۰-۰۳/۵	۰/۱-۲/۱	خشک	**فلز روی فلز**
۰/۰-۰۳/۳	۰/۰-۱/۵	روغنکاری	
۰/۰-۳/۵	۰/۰-۳/۵	خشک	**چرم روی فلز**
	۰/۰-۶/۱	خشک	**سنگ روی بتن**
۰-/۰۲ ۰/۰۱	۰-/۰۳ ۰/۰۲	خشک	

شکل (۵-۱) جسمی به جرم m را که بر روی سطح افقی در حال سکون است، نشان می دهد. جسم در معرض نیروی W بخاطر اثر جاذبه زمین بر روی آن که به طرف پایین است، قرار می گیرد. (یعنی وزن mg)



شکل ۵-۱

نیروی عکس‌العمل N مساوی و مخالف با W به وسیله صفحه زیر جسم به آن اعمال خواهد شد. بنابراین جسم در حال تعادل باقی خواهد ماند. فرض کنید که نیروی افقی P مطابق شکل به جسم اعمال می شود. اگر نیروی اعمال شده P به تدریج از صفر افزایش یابد، این نیرو یک نیروی اصطکاک عکس‌العملی F را ایجاد کرده که در ابتدا مساوی و مخالف P است، بنابراین هیچ‌گونه حرکتی اتفاق نمی افتد. اگر نیروی P زیادتر شود، به هر حال به مقداری خواهد رسید که بعد از آن دیگر F زیاد نمی شود. یعنی جسم در جهت نیروی P شروع به حرکت خواهد کرد.

این مقدار ماکزیمم یا حدی F را نیروی اصطکاک استاتیکی یا حد اصطکاک بین دو جسم تحت این شرایط می نامند. به منظور حرکت دادن جسم با سرعت یکنواخت در امتداد صفحه، لازم خواهد بود که یک نیرو مساوی و مخالف با نیروی ماکزیمم یا نیروی حدی اصطکاک F به آن وارد نمود.

همین‌که جسم شروع به حرکت نماید، به وضوح دریافت می شود که نیروی لازم P برای حرکت جسم به طور یکنواخت در امتداد صفحه کمی کاهش می یابد. زیرا اصطکاک لغزشی یا اصطکاک دینامیکی معمولاً کمتر از اصطکاک استاتیکی یا اصطکاک در حال سکون است، سپس مقدار P مساوی با نیروی اصطکاک لغزشی خواهد شد. مقدار نیروی اصطکاک لغزشی که مخالف حرکت جسم است، مستقیما متناسب با نیروی عکس‌العمل عمودی بین دو سطح (در حرکت بر روی سطح افقی برابر وزن جسم) بنابراین:

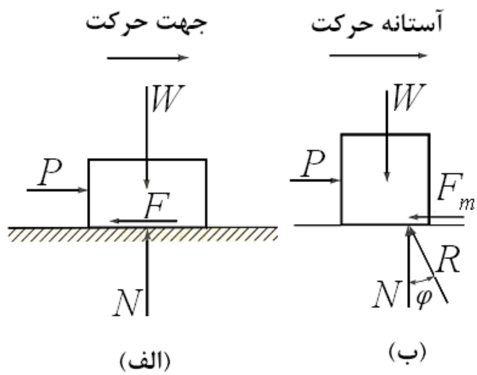
$$F \propto N \Rightarrow \frac{F}{N} = \text{مقدار ثابت} \qquad (5\text{-}1)$$

این مقدار ثابت، ضریب اصطکاک بین دو سطح که با یکدیگر در تماس هستند نام دارد و با μ نشان داده می شود.

$$N = W \ , \ F = P \ \Rightarrow \frac{F}{N} = \frac{P}{W} \ , \ W = mg \ , \quad \mu = \frac{F}{N} = \frac{P}{W} \qquad (۵-۲)$$

۴-۵- زاویه اصطکاک:

شکل (۵-۲- الف) جسمی به جرم m را که با سرعتی یکنواخت در امتداد یک صفحه افقی در حال حرکت است، نشان می دهد. جسم تحت اثر دو نیروی خارجی که به آن اعمال می شود، قرار دارد.



شکل ۵-۲

نیروی افقی P و نیروی W که به سمت پایین بوده و به‌واسطه جاذبه زمین بر جسم اثر می کند. (یعنی وزن آن mg) نیروی وزن جسم به وسیله عکس العمل قائم N که از طرف سطح به آن وارد می شود، خنثی می گردد. همچنین نیروی P نیز به وسیله نیروی اصطکاک F که بین دو سطح ایجاد می شود، جبران می گردد. جسم با سرعت یکنواخت در امتداد سطح در حال حرکت است، بنابراین، نیروی F برابر اصطکاک لغزشی است. حال اگر بجای نیروی N,F برآیند آنها یعنی R جایگزین گردد، به خاطر وجود نیروی اصطکاک، نیروی R به سمت عقب (در جهت خلاف حرکت) مایل بوده و زاویه آن با امتدا قائم φ می باشد. با توجه به شکل (۵-۲- ب):

$$tg\varphi = \frac{F}{N} \qquad (۵-۲)$$

چون جسم با سرعت ثابت در امتداد سطح در حال حرکت است، بنابراین تحت اثر سه نیروی P,R,W(یعنی برآیند دو نیروی N,F) در حال تعادل قرار دارد. این موضوع به وسیله مثلث نیرو ها که در شکل (۵-۲- ب) مشخص شده است، به راحتی ارائه می گردد.

نیروی برآیند R در سطح ترکیبی از N و F_m است. در آستانه حرکت مقدار برآیند برابر است با:

$$\tan\varphi_0 = \frac{F_m}{N} = \mu_s \quad , \quad R = \sqrt{N^2 + F_m{}^2} = N\sqrt{1+\mu_s{}^2} \tag{۵-۳}$$

در اینجا زاویه ϕ_0 ، زاویه بین بردار برآیند و امتداد قائم بر سطح است که زاویه اصطکاک استاتیکی یا زاویه استقرار نامیده می شود. با شروع حرکت و برقراری اصطکاک جنبشی می توان نوشت:

$$\tan\varphi = \frac{F_k}{N} = \mu_k \quad , \quad R = \sqrt{N^2 + f_k{}^2} = N\sqrt{1+\mu_k{}^2} \tag{۵-۴}$$

که در اینجا نیز φ، زاویه اصطکاک جنبشی است.

نکات:

نیروی قائم بر سطح تماس (N) با نوشتن معادلات تعادل در سطح قائم قابل محاسبه است.

$$N = W \tag{۵-۵}$$

همواره زاویه اصطکاک استاتیکی بزرگتر از زاویه اصطکاک جنبشی است.

$$\varphi \le \varphi_0 \tag{۵-۶}$$

در صورتی که نیروی P به صورت مایل وارد شود، معادلات به صورت زیر تغییر پیدا می کند.

$$N = W + P_y \tag{۵-۷}$$

$$R = \sqrt{N^2 + F_m{}^2} = (W + P_y)\sqrt{1+\mu_s{}^2} \quad , \quad F_m = \mu_s N = \mu_s (W + P_y) \tag{۵-۸}$$

$$\tan\varphi_0 = \frac{F_m}{N} = \mu_s \tag{۵-۹}$$

۵-۵-قوانین اصطکاک:

۱-ضریب اصطکاک مستقل از نیروی قائم از سطح بوده و بنابراین اصطکاک حدی و اصطکاک جنبشی متناسب با نیرو قائم هستند.

۲- ضریب اصطکاک مستقل از ناحیه تماسی است.

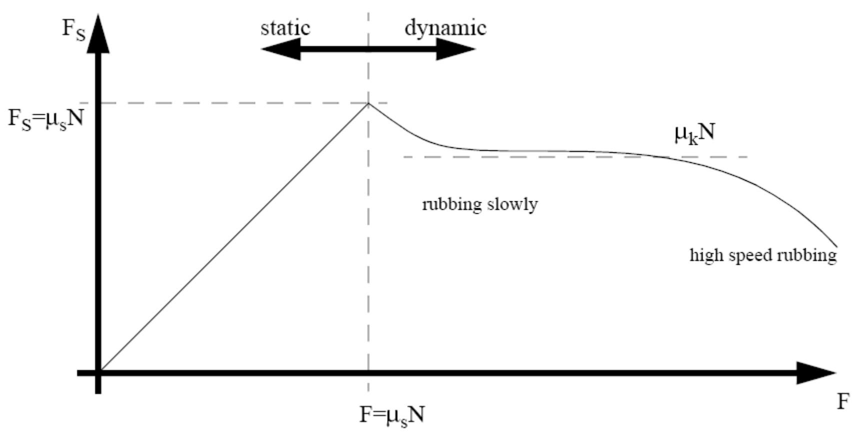
۳- ضریب اصطکاک جنبشی کمتر از اصطکاک استاتیکی است.

۴- در سرعت پایین، اصطکاک مستقل از سرعت و در سرعت های بالاتر کاهشی قابل توجه در اصطکاک ایجاد می شود.

۵- نیروی اصطکاک استاتیکی هرگز بزرگتر از مقدار مورد نیاز برای نگهداری جسم در تعادل نمی شود. در حل مسائل شامل اصطکاک استاتیکی، دانشجو بایستی فرض نماید که نیروی

اصطکاکی یک مجهول مستقل است. مگر اینکه مساله به روشنی بیان نماید که حرکت در آستانه می باشد. در حالت لبه‌ای ممکن است که اصطکاک حدی $F' = \mu_s$ گردد.

۶- نمودار بار اعمال شده بر حسب اصطکاک به نشان دادن طبیعت و ماهیت اصطکاک کمک می کند. قابل ذکر است، در حالی‌که نیرو در حالت استاتیکی است، به صورت خطی تا حد مشخصی افزایش می یابد، بعد از اینکه جسم شروع به حرکت می‌کند، نیرو می تواند با یک مقدار ثابت توسط ضریب اصطکاک دینامیکی تقریب زده شود. همانطور که قبلا اشاره شد، ضریب اصطکاک دینامیکی پایین‌تر از حداکثر اصطکاک استاتیکی نشان داده شده است.



شکل ۵-۳

۶-۵- انواع اصطکاک و مسائل آن:

۱- **اصطکاک خشک:** اصطکاکی است که با سطح روغن کاری شده نباشد. در زمان لغزش جهت نیروی اصطکاک همیشه بر خلاف جهت حرکت است.

۲- **اصطکاک داخلی:** در تمام مواد جامد تحت بارگذاری وجود دارد.

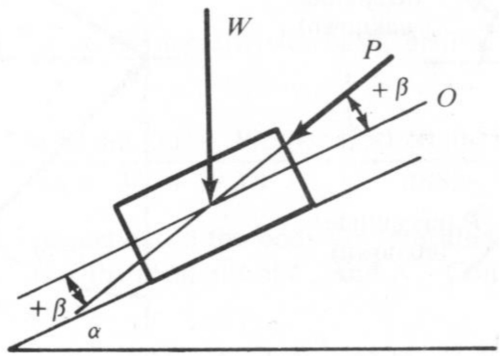
الف- شرایط آستانه حرکت برقرار است. بنابراین نیروی اصطکاک استاتیک وجود دارد که مقدار آن برابر $F_{\max} = \mu_s N$ است و نیروی اصطکاک به صورت یک نیروی معلوم وارد می شود.

ب- نیروی اصطکاک f کوچکتر از نیروی استاتیکی f_m بوده که در این حالت نیروی اصطکاک کمیت مجهول بوده و با کمک معادلات تعادل مقدار آن بدست می آید.

ج- در جسم مورد بحث حرکت وجود دارد، پس نیروی اصطکاک جنبشی است و در این صورت $F_k = \mu_k N$ می باشد.

۷-۵- سطح شیب دار:

شکل (۵-۴) مکعبی را نشان می دهد که بر روی سطح شیبدار قرار دارد. وزن W و α زاویه سطح شیبدار، β زاویه بین نیروی P و سطح شیبداری باشد. P نیروی اعمال شده به جسم با زوایای بالای محور موازی با سطح شیبدار مثبت در نظر گرفته می شوند.



شکل ۵-۴

نیروی لازم برای جلوگیری از لغزش هنگامی که $\alpha \succ \phi$: P_1

$$P_1 = W.\frac{Sin(\alpha + \phi)}{Cos(\beta + \phi)} \quad (۵-۱۰)$$

نیروی لازم برای شروع به حرکت جسم به سمت بالای سطح شیبدار : P_2

$$P_2 = W.\frac{Sin(\alpha + \phi)}{Cos(\beta - \phi)} \quad (۵-۱۱)$$

نیروی لازم برای شروع به حرکت جسم به سمت پایین : P_3

$$P_2 = W.\frac{Sin(\alpha - \phi)}{Cos(\beta + \phi)} \quad (۵-۱۲)$$

معادلات اخیر به راحتی با استفاده از معادلات تعادل برای جسم بدست می آیند. درحالت P_2 جهت نیروی اصطکاک به سمت پایین و در حالت P_3 جهت نیروی اصطکاک به سمت بالا می باشد.

۸-۵- اصطکاک لغزشی:

اصطکاک لغزشی، نیروی مورد نیاز برای ماندن (حفظ) حرکت نسبی بین دو جسم می باشد. ϕ, R, N, F, P, W به ترتیب وزن بلوک، نیروی اعمالی، نیروی اصطکاک (نیروی کم اثر پذیر)، نیروی قائم بر سطح، برآیند نیرو های N, F_m می باشند.

$$R = \sqrt{{F_m}^2 + N^2}$$ ، F_m نیروی اصطکاک حداکثر (۵-۱۳)

در سرعت‌های پایین، اصطکاک مستقل از سرعت لغزشی است ولی در سرعت‌های بالاتر، اصطکاک با افزایش سرعت کاهش می یابد. می توان نتیجه گرفت، ضرایب اصطکاک لغزشی معمولاً کوچکتر از ضرایب اصطکاک استاتیکی است.

۹-۵- اصطکاک غلتشی:

اصطکاک غلتشی (مقاومت) به خاطر تغییر شکل سطح تحت بار غلتان اتفاق می افتد. شکل (۵-۵) این اثر را نشان می دهد. چرخی به وزن W و شعاع r از گودی روی نقطه A به وسیله نیروی P در حال کشیده شدن به سمت بیرون می باشد. به‌طور طبیعی این یک فرآیند پیوسته است. همچنان‌که چرخ می‌غلتد، مجموع گشتاورها حول نقطه A بایستی مساوی صفر باشد، که معادله زیر را نتیجه می دهد.

$$\sum M_A = 0 \;\Rightarrow W \times a - P \times OB = 0$$ (۵-۱۴)

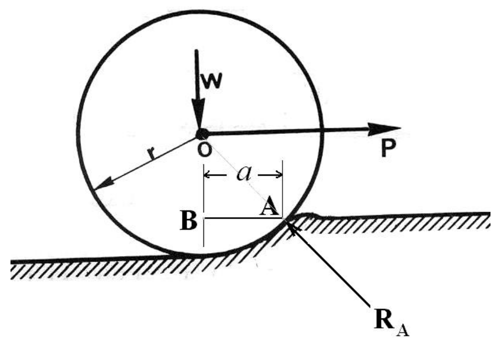
از آنجایی که گودی واقعاً خیلی کوچک است، فاصله OB با r جایگزین می گردد. بنابراین:

$$P \times r = W \times a \;\;\Rightarrow\;\; P = \frac{a}{r}.W$$ (۵-۱۵)

مولفه افقی عکس العمل سطح R مساوی P (با بازرسی) می باشد و مقاومت غلتشی نام دارد. فاصله a ضریب مقاومت غلتان نام دارد و بر حسب میلی‌متر بیان می شود. مقادیر برای مواد مختلف در جدول ارائه شده است، اما این نتایج یکنواخت نیست. تغییر شکل در نقطه تماس بین چرخ غلتان و سطح شکل تکیه‌گاه آن مقاومتی در برابر غلتش ایجاد می‌کند که این مقاومت از نیروی اصطکاکی مماسی ناشی می شود و از این رو پدیده ای کاملا متفاوت با اصطکاک خشک است. نسبت $\mu_r = \dfrac{a}{r}$ ضریب اصطکاک غلتشی بوده و برابر نسبت نیروی مقاوم به نیروی عمودی است. فاصله a تابعی از خواص کشسانی و مومسانی مواد، شعاع چرخش، تندی و ناهمواری سطح است. مقادیر a در جدول (۵-۲) نشان داده شده است.

جدول ۵-۲- ضریب اصطکاک غلتشی بر حسب مشخصات چرخ و ماده

مشخصات چرخ و ماده	a (سانتی‌متر)
چرخ لاستیکی روی سطح آسفالت	**۰/۳ – ۰/۵**
چرخ لاستیکی روی سطح بتن	**۰/۵– ۰/۷**
چرخ فولادی روی ریل فولادی	**۰/۰۷– ۰/۱۲**
چرخ فولادی روی سطح چوبی	**۰/۱۵– ۰/۳**



شکل ۵-۵

۱۰-۵- حالت‌های تماس جسم صلب با سطح افقی:

۱- نیروهای وارد بر جسم تمایلی به حرکت دادن آن در سطح افق ندارند، در نتیجه نیروی اصطکاک وجود ندارد.

۲- نیروهای وارد برجسم تمایل به حرکت دادن در سطح تماس دارند ولی به اندازه کافی بزرگ نیستند تا آن را به حرکت درآورند. نیروی اصطکاک F ایجاد شده را می توان از حل معادله تعادل جسم بدست آورد. به علت اینکه معلوم نیست نیروی مورد نظر به مقدار حداکثر خود رسیده است یا خیر، نمی توان از فرمول $F_{\max} = \mu_s N$ استفاده کرد.

۳- نیروهای وارده طوری هستند که جسم در لحظه لغزش است. در این حالت نیروی اصطکاک F به ماکزیمم مقدار خود رسیده است و با نیروی قائم N در تعادل است. در این صورت معادلات تعادل و $F_k = \mu_k N$ قابل استفاده هستند.

۴- جسم تحت نیرو های وارده می لغزد و معادله تعادل قابل استفاده نیست. با این وجود F به صورت F_k و معادله $F_k = \mu_k N$ به کار برده می شود.

۱۱-۵- مخروط اصطکاک:

اگر نیروی P که زاویه α با راستای قائم می سازد روی جسمی مطابق شکل (۵-۶) اثر کند. برای تعادل باید نیروی عکس العمل R مساوی و متقابل با آن از سطح بر جسم وارد شود. نیروی R دارای دو مولفه قائم N, F می باشد که رابطه بین این دو نیرو به صورت زیر قابل بیان است.

$$F = Ntg\alpha \qquad (۵-۱۶)$$

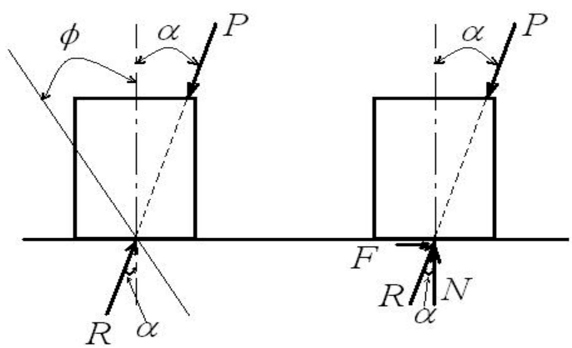
نیروی F بیانگر نیروی اصطکاک بین جسم و سطح می باشد. چنانچه φ زاویه اصطکاک بین جسم و سطح باشد، ضریب اصطکاک برابر است با:

$$\mu = tg\varphi \qquad (۵\text{-}۱۷)$$

اگر $tg \le \mu$ باشد، جسم در حال تعادل خواهد بود و بر روی سطح نخواهد لغزید. حالت تعادل حدی هنگامی است که رابطه زیر برقرار باشد.

$$tg\alpha = \mu tg\varphi \qquad (۵\text{-}۱۸)$$

بنابراین برای مقادیر $\alpha \succ \varphi$ تعادل برقرار نخواهد بود و جسم بر روی سطح خواهد لغزید. مطابق شکل چنانچه خط مایل حول محور قائم دوران یابد، سطحی مخروطی حادث می شود که آن را مخروط اصطکاک می نامند. پس نتیجه گرفته می شود، برای حالاتی که امتداد نیروی P در داخل مخروط اصطکاک قرار گیرد، به ازای هر مقدار از نیروی P جسم در حال تعادل بوده و لغزشی رخ نخواهد داد.



شکل ۵-۶

اگر امتداد نیرو برروی سطح مخروط منطبق شود،جسم شروع به لغزیدن خواهد نمود.چنانچه امتداد همان نیرو در خارج از مخروط واقع شود، جسم بر روی سطح خواهد لغزید.
برآیند R نیروهای F'و N' در جهت مخالف $W = mg$ وارد شده، عمل می‌کند. اگرچه آستانه حرکت است ولی جسم هنوز در حال تعادل است. با استفاده از مثلثات $\alpha = \phi$، ضریب اصطکاک ممکن است با افزایش سطح به زاویه α در آستانه حرکت تعیین شود. که در آن زاویه، $\mu = tg\phi$ است، بنابراین

$$\mu = tg\alpha \qquad (۵\text{-}۱۹)$$

۱۲-۵- قوانین اصطکاک برای سطوح خشک:

برای دو سطح خشک و کاملاً تمیز که با یکدیگر در تماس هستند، قوانین اصطکاک زیر از روی تجربه و آزمایش نتیجه گرفته شده است.

۱- وقتی نیرو اعمال می‌شود، تمایل دارد که یک سطح دیگر بلغزد. در این حالت نیروی اصطکاک مخالف به طور مماسی با سطوح در حال تماسی و به میزان مناسب وارد عمل می شود تا با نیروی اعمال شده تعادل برقرار کند.

۲- نیروی مورد احتیاج برای شروع حرکت نسبی بین دو سطح کمی بیشتر از مقداری است که این دو سطح در موقع حرکت نسبت به هم دارند. یعنی اصطکاک استاتیکی کمی بیشتر از اصطکاک لغزشی یا حرکتی می باشد.

۳- نیروی اصطکاک لغزشی در حالتی که شروع شده است، در جهت مخالف حرکت بوده و مستقیماً متناسب با نیروی عکس العمل عمودی بین دو سطح می باشد.

۴- نیروی اصطکاک لغزشی کاملاً مستقل از سطح تماسی است و به آن بستگی ندارد.

۵- نیروی اصطکاک لغزشی بستگی به حالت و فرم سطوح در حال تماس و خواص فیزیکی مواد تشکیل دهنده دو سطح دارد.

۶- نیروی اصطکاک مستقل از سرعت لغزشی می باشد. (اگر سرعت خیلی زیاد باشد این موضوع صحت نخواهد داشت.)

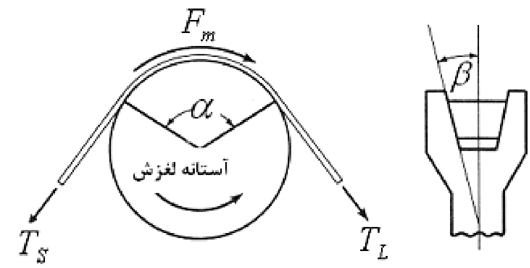
۱۳-۵- اصطکاک تسمه:

ترمزهای نواری و تسمه متحرک وابسته به اصطکاک بین تسمه قابل انعطاف و یک سطح استوانه ای می باشد. شکل (۵-۷- الف) هر دو کاربرد را نشان می دهد.

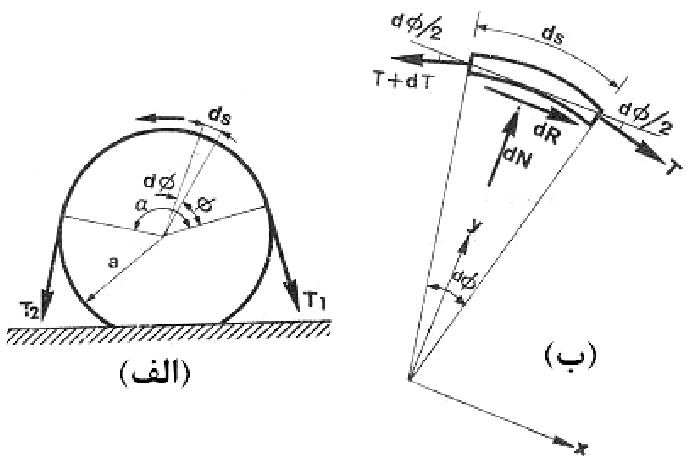
T_L کشش بزرگتر تسمه (طرف محکم) ، T_Sکشش کوچکتر تسمه (طرف شل)

μ ضریب اصطکاک ، α زاویه تماس بین تسمه و استوانه برحسب درجه

در طراحی تسمه نقاله‌ها، ترمز چرخ‌ها و موارد مشابه از تسمه های انعطاف‌پذیر با قرقره درحال دوران ، استفاده می گردد. نیروی اصطکاک در انتقال حرکت بین دو جسم در حال تماس نقش عمده‌ای دارد. مطابق شکل (۵-۸) قرقره‌ای تحت دو کشش تسمه T_2, T_1 و گشتاور M لازم برای جلوگیری از دوران و واکنش‌های یاتاقانی R قرار دارد. هدف تعیین رابطه بین T_2 , T_1 در لحظه آستانه حرکت است. با توجه به جهت گشتاور M می توان نتیجه گرفت که $T_1 \prec T_2$ می باشد.



شکل ۵-۷



شکل ۵-۸

المان کوچکی از تسمه را که طول آن dS و زاویه مرکزی آن $d\phi$ می باشد، انتخاب و دیاگرام آزاد آن در شکل (۵-۸ ب) نشان داده شده است. چون این المان بایستی در حال تعادل باشد، بنابراین معادله تعادل در راستای محور x را می توان به صورت زیر نوشت:

$$TCos\left(\frac{d\phi}{2}\right)-(T+dT)Cos\left(\frac{d\phi}{2}\right)+dR=0 \quad \Rightarrow \tag{۵-۲۰}$$

$$TCos\left(\frac{d\phi}{2}\right)-TCos\left(\frac{d\phi}{2}\right)-dTCos\left(\frac{d\phi}{2}\right)+\mu dN=0 \tag{۵-۲۱}$$

چون زاویه $d\phi$ بی‌نهایت کوچک است، $Cos\left(\frac{d\phi}{2}\right)\approx 1$ و معادله (۵-۲۱) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$dT = \mu dN \tag{۵-۲۲}$$

معادله تعادل در راستای محور y نیز به صورت می باشد.

(۵-۲۳ و ۵-۲۴)

$$dN - (T + dT)Sin\left(\frac{d\phi}{2}\right) - TSin\left(\frac{d\phi}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$dN - TSin\left(\frac{d\phi}{2}\right) - dTSin\left(\frac{d\phi}{2}\right) - TSin\left(\frac{d\phi}{2}\right) = 0$$

در اینجا نیز از قاعده هم‌ارزی $Sin\left(\frac{d\phi}{2}\right)\approx\frac{d\phi}{2}$ استفاده می شود و به دلیل اینکه عبارت $dT\frac{d\phi}{2}$ بسیار کوچک و از درجه دوم است، بنابراین از آن صرفنظر می شود و معادله به شکل زیر خلاصه می شود.

$$Td\phi = dN \tag{۵-۲۵}$$

از ترکیب معادلات (۵-۲۲) و (۵-۲۵) رابطه زیر حاصل می شود.

$$\frac{dT}{T} = \mu d\phi \tag{۵-۲۶}$$

معادله دیفرانسیل حاصل را می توان به راحتی حل نمود. با انتگرال‌گیری از طرفین معادله اخیر جواب نهایی حاصل می شود.

$$\int_{T_1}^{T_2}\frac{dT}{T} = \int_0^{\alpha}\mu d\phi \;\Rightarrow\; Ln\frac{T_2}{T_1} = \mu\alpha \;\Rightarrow \frac{T_2}{T_1} = e^{\mu\alpha} \tag{۵-۲۷}$$

رابطه (۵-۲۷) به رابطه اویلر برای تسمه‌ها مشهور بوده و یک منحنی حلزونی شکل می باشد، به عبارت دیگر افزایش نیروی کششی تسمه از T_1 تا T_2 به صورت حلزونی انجام می‌گیرد. اگر تسمه یا طناب n بار دور قرقره پیچیده شده باشد، مقدار $\alpha = 2\pi n$ رادیان خواهد بود. در رابطه فوق نسبت دو کشش به شعاع قرقره وابسته نیست. بنابراین با انتخاب صحیح زاویه تماس، رابطه را می توان برای مقاطع غیر دایروی نیز به کار برد.

رابطه $dT = \mu dN$ را می توان به صورت $dT = dR$ نوشت که پس از انتگرال‌گیری و درنظر گرفتن حدود آن می توان نوشت:

$$T_2 - T_1 = R \tag{۵-۲۸}$$

در رابطه (۵-۲۸)، R را نیروی اصطکاک کل می نامند. اگر در این رابطه به جای T_1 یا T_2 مقدار آن از رابطه (۵-۲۸) نوشته شود، نیروی R به فرم زیر در می‌آید.

$$R = T_1\left(e^{\mu\alpha} - 1\right) = T_2\left(1 - e^{-\mu\alpha}\right) \tag{۵-۲۹}$$

برای محاسبه مقدار گشتاور تولید شده توسط نیروهای T_2, T_1 که باعث گردش چرخ می شود، (اگر محور چرخ، قید چرخش نداشته باشد.) با توجه به شکل (۵-۹) می توان نوشت:

$$M = T_2 a - T_1 a = Ra \tag{۵-۳۰}$$

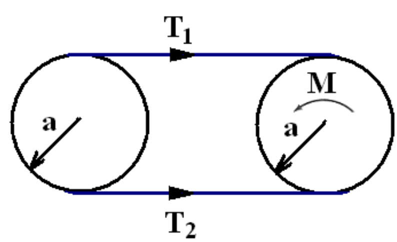
پس از جایگذاری مقدار نیروی اصطکاک کل، سرانجام مقدار گشتاور به صورت زیر نوشته می شود.

$$M = T_1 a\left(e^{\mu\alpha} - 1\right) = T_2 a\left(1 - e^{-\mu\alpha}\right) \tag{۵-۳۱}$$

اگر مقدار گشتاور معلوم و هدف یافتن کشش تولید شده در تسمه‌ها باشد، آنگاه:

$$T_1 = \frac{M}{a\left(e^{\mu\alpha} - 1\right)} \tag{۵-۳۲}$$

$$T_2 = \frac{M}{a\left(1 - e^{-\mu\alpha}\right)} = \frac{Me^{\mu\alpha}}{a\left(e^{\mu\alpha} - 1\right)} \tag{۵-۳۳}$$



شکل ۵-۹

اگر مطابق شکل(۵-۹)، فرض شود گشتاور M بر چرخ سمت راست اثر می‌کند، با توجه به نیروهای T_2, T_1 تولید شده که از روابط (۵-۳۲) و (۵-۳۳) حاصل می شوند، می‌توان نیروی متوسط کششی را در تسمه محاسبه کرد. این نیرو لازم است در تسمه وجود داشته باشد تا گردش محور راست به محور چپ منتقل گردد.

$$T = \frac{T_1 + T}{2} = \frac{M}{2a} Cotgh \frac{\mu\alpha}{2} \tag{۵-۳۴}$$

۱۳-۵- ۱-تسمه متحرک:

الف- تسمه متحرک تخت:

فرمول بیان شده برای تسمه متحرک تخت در شرایط تعادل هنگامی که مرحله آستانه لغزش است، به صورت زیر است.

$$Log_{10}\frac{T_L}{T_S}=\frac{f\theta}{132} \qquad (۵-۳۵)$$

ب- تسمه متحرکV: نمودار (۵-۷- ب) مقطع عرضی کل یک تسمه متحرکV را نشان می دهد. عمل‌گوه‌ای تسمه، نیرویی است به شیار که نیروی قائم بین سطوح را افزایش می‌دهد و بنابراین نیروی اصطکاکی موجود را برای انتقال افزایش می دهد.

$$Log_{10}\frac{T_L}{T_S}=\frac{f\theta}{132Sin\beta} \qquad (۵-۳۶)$$

قابل ذکر است که β نصف زاویه کل شیار می باشد.

نکته: ضریب اصطکاک موثر تسمه با مقطع V(ذوزنقه) در قرقره عبارتست از:

$$\mu_V=\frac{\mu}{\sin\beta} \qquad (۵-۳۷)$$

۱۴-۵- اصطکاک یاتاقان گرد:

شکل (۵-۱۰) مقطع عرضی یک یاتاقان گرد را نشان می دهد. شفت از میان (وسط) فلایویل عبور کرده و به‌وسیله یک کانال استوانه‌ای بر روی هر ضلع هدایت می‌شود. شفت می‌تواند تا زمانی که یاتاقان شروع به لغزش در نقطه تماس می نماید، به عنوان بالابرنده تصور گردد و این موضوع اندکی خروج از مرکزی دیاگرام را ایجاد می کند.

P ممکن است به عنوان حداقل نیروی لازم برای ایجاد چرخش فلایویل تصور گردد. N عمود بر مماسی در نقطه تماسی می باشد.

$$f=\frac{F_m}{N}=tg\varphi \qquad (۵-۳۸)$$

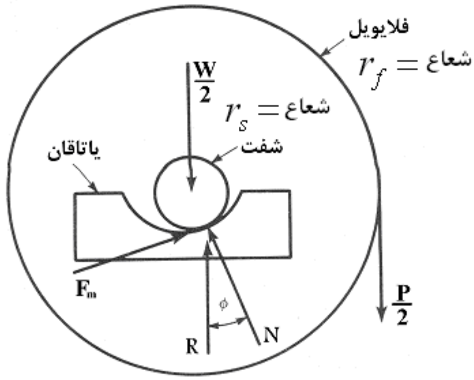
$$R=\sqrt{{F_m}^2+N^2} \qquad (۵-۳۹)$$

از آنجایی که یاتاقان و شفت با هم در تعادل هستند و دو یاتاقان فلایویل را نگه می دارند.

$$\sum F_y=0=R-\left(\frac{W+P}{2}\right)\Rightarrow R=\frac{W+P}{2} \qquad (۵-۴۰)$$

(R بایستی قائم باشد) با گرفتن گشتاورها حول مرکز شفت:

$$\sum M = 0 \Rightarrow \frac{\Pr_F}{2} - F_m r_s \ , \ P = 2\frac{F_m r_S}{r_F} \tag{۵-۴۱}$$



شکل ۵-۱۰

به منظور ساده سازی تحلیل، معمولاً تصور می شود که $N = \frac{W}{2}$ از دیاگرام مشهود است و این مطلب واقعیت ندارد. به هر حال از آنجایی که φ معمولاً بسیار کوچک است، خطای نتیجه شده از این فرض معمولاً کافی و مناسب نیست.

۵-۱۵- قدرت جذب شده به‌وسیله اصطکاک در یاتاقان‌های محوری:

در یک یاتاقان محوری، فاصله افقی بین ژورنال یا محور و سطح یاتاقانی شده معمولاً برای هر متر قطر محور حدود $2mm$ است. بنابراین می توان فرض نمود که قطر محور یا شفت مقدار ناچیزی از قطر یاتاقان کمتر است. یعنی تقریباً مراکز آنها بر یکدیگر منطبق هستند.

هنگامی‌که شفت در حال سکون است، تماس بین شفت و یاتاقان در پایین‌ترین نقطه یعنی A در شکل (۵-۱۱- الف) خواهد بود. در این شکل لقی بین محور و یاتاقان به مقدار اغراق آمیزی بزرگ نشان داده شده است. عکس‌العمل یاتاقان در نقطه A (یعنی نیروی R) برابر است با بار W، که به سمت پایین اثر کرده (برحسب N) و با آن در یک امتداد قرار می‌گیرد.

هنگامی‌که شفت شروع به حرکت می کند، نقطه اثر عکس‌العمل که قبلاً در نقطه A بود در جهت مخالف حرکت شفت در داخل سطح یاتاقان بالا رفته تا لغزشی در نقطه‌ای مانند B آغاز شود. سپس شفت در حین چرخش در همین وضعیت باقی می ماند. (۵-۱۱- ب)

اگر R_N عکس‌العمل قائم یا شعاعی در نقطه تماس یعنی در نقطه B باشد، عکس العمل یاتاقان یعنی R که به طرف قائم است با عکس‌العمل R_N زاویه φ خواهد ساخت.
مولفه مماسی عکس‌العمل R عبارتست از نیروی اصطکاک F که مخالف با جهت گردش محور می باشد. از روی شکل (۵-۱۱- ب) برای تعادل در امتداد قائم باید R با N برابر باشد.
پس:

$$F = WSin\varphi \text{ ،} F = RSin\varphi \tag{۵-۴۲}$$

برای یک یاتاقان محوری که به خوبی روغنکاری شده، زاویه اصطکاک φ کوچک است و چون برای زوایای کوچک $Sin\varphi$ تقریباً مساوی با $tg\varphi$ است، می توان نوشت:

$$F = Wtg\varphi = \mu W \tag{۵-۴۳}$$

اگر d قطر محور یا شفت بر حسب متر باشد، گشتاور اصطکاکی، که از چرخش شفت جلوگیری می کند، برابر است با:

$$T_F = \frac{1}{2}\mu Wd \tag{۵-۴۴}$$

برای تعادل دورانی، گشتاور با گشتاور محرک که در جهت خلاف T به شفت اثر می کند برابر است.

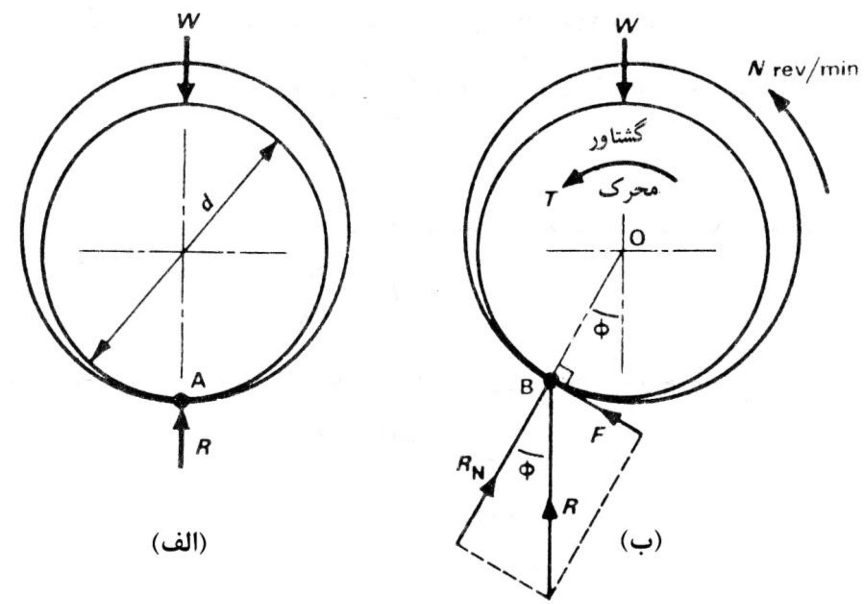
اگر شفت با سرعتی دورانی $N\ {rev}/{\min}$ (دور بر دقیقه) بچرخد، آنگاه:

$$\text{سرعت زاویه ای محور یا شفت} = \omega = \frac{2\pi N}{60}\ {rad}/{s} \tag{۵-۴۵}$$

$$\text{قدرت جذب شده به وسیله اصطکاک} = T_F \times \omega = T_F \times \frac{2\pi N}{60} \tag{۵-۴۶}$$

حال با قرار دادن T_F از معادله بالا:

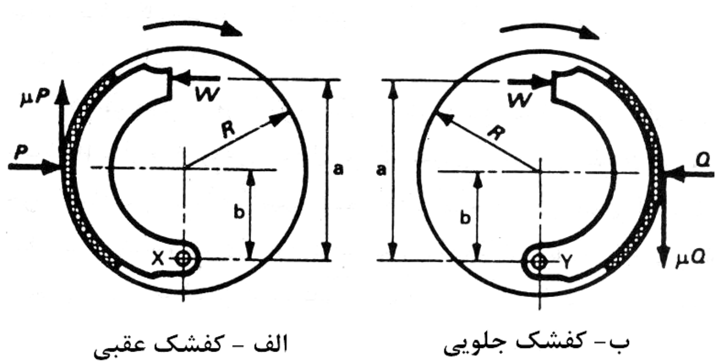
$$\text{قدرت جذب شده به وسیله اصطکاک} = \frac{\mu \omega d \pi N}{60} \tag{۵-۴۷}$$



شکل ۵-۱۱

۱۶-۵- ترمز اولیه کفشکی:

هنگامی‌که ترمز به کار گرفته می شود، نیروی اعمال شده بر روی کفشک‌های جلو و عقبی ترمز مطابق شکل (۵-۱۲) می باشد.



شکل ۵-۱۲

اگر فلش فرضی طوری رسم شود که جهت آن را از نقطه ای که نیروی W به کفشک اثر می کند به طرف ثابت کفشک باشد، آنگاه آن کفشکی که جهت آن موافق حرکت کاسه باشد، کفشک جلو و آن کفشکی که مخالف جهت موافق حرکت کاسه باشد، کفشک عقبی نام دارد. کفشک عقبی ترمز را که در شکل (۵-۱۲- الف) نشان داده شده است، در نظر بگیرید. نیروی محرک W که از فشار روغن حاصل می‌شود، نیرویی عمود بر سطح P بین کفشک و کاسه‌چرخ ایجاد می‌کند. هنگامی‌که کاسه‌چرخ در حال چرخیدن در جهتی است که در شکل نشان داده شده، نیروی عمود بر سطح P نیروی اصطکاک μP را ایجاد می کند. کفشک ترمز تحت اثر نیروهای وارد شده در حال تعادل است. بنابراین با گرفتن گشتاور حول نقطه X می توان نوشت:

$$Wa = Pb + \mu PR \qquad (۵-۴۸)$$

و از روی آن :

$$P = \frac{Wa}{b + \mu R} \qquad (۵-۴۹)$$

گشتاور ترمزی T_T که به کاسه چرخ اثر می کند، کاملاً در اثر نیروی اصطکاک μP می‌باشد. بنابراین:

$$T_T = \mu PR \qquad (۵-۵۰)$$

و با جایگزین کردن دو معادله اخیر:

(گشتاور ترمزی موثر به کاسه چرخ به خاطر کفشک عقبی)

$$T_T = \mu R\left(\frac{Wa}{b + \mu R}\right) \qquad (۵-۵۱)$$

حال با در نظر گرفتن کفشک جلویی ترمز در شکل (۵-۱۲- ب)، چون کفشک در حال تعادل است، بنابراین با گرفتن گشتاور حول نقطه Y:

$$Wa = \varphi b - \mu QR \qquad (۵-۵۲)$$

و از آنجا:

$$Q = \frac{Wa}{b - \mu R} \qquad (۵-۵۳)$$

چون گشتاور ترمزی L که به‌وسیله کفشک جلویی به کاسه چرخ اثر می کند کاملاً وابسته به نیروی اصطکاکی μQ است، بنابراین:

$$T_L = \mu QR \qquad (۵-۵۴)$$

پس از جایگزینی:

(گشتاور ترمزی موثر به کاسه چرخ به خاطر کفشک جلویی)

$$T_T = \mu R\left(\frac{Wa}{b-\mu R}\right) \qquad (۵-۵۵)$$

از روی معادلات گشتاور ترمزی برای کفشک عقبی و جلویی به آسانی مشاهده می شود که گشتاور ترمزی موثر به کاسه چرخ در اثر کفشک جلویی، بیشتر از گشتاور ترمزی موثر به کاسه چرخ در اثر کفشک عقبی می باشد. (درصورتیکه فاکتورهای دیگر مساوی درنظر گرفته شوند.) به همین دلیل معمولاً در چرخ‌های جلو که مجهز به ترمزهای کفشکی هستند از دو کفشک جلویی استفاده می‌شود.

۵-۱۷- جک های پیچی:

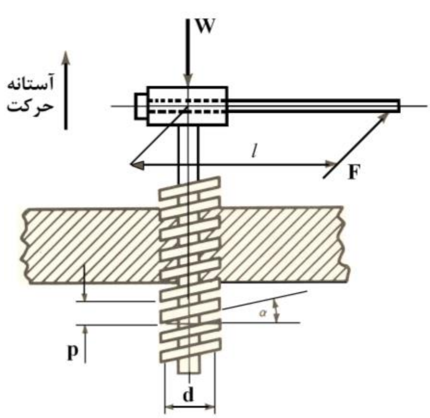
جک پیچی شامل یک رزوه است که در یک پیکره و چارچوبی ثابت پیچانده می شود. وزنه با اعمال نیرو به انتهای دسته بلند می‌شود، این کار باعث چرخش رزوه و حرکت آن به سمت بالا و بلند کردن آن می گردد. شکل (۵-۱۳) یک آرایش امکان پذیر را نشان می دهد.

از آنجایی که نیروهای وابسته به اصطکاک تقریباً مستقل از سطوح تماس هستند، این مسئله با یک ترسیمه دو بعدی رزوه‌ای تکی باز شده (بدون پیچاندن) و بر روی صفحه تخت انجام می گردد. شکل (۵-۱۳- ب)

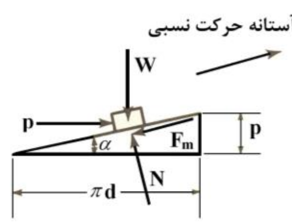
قطر میانگین رزوه $= l$ ، گام رزوه $= P$، زاویه میانگین $= \alpha$ ، نیروی قائم $= N$

اصطکاک حداکثر $= F_m$

نیروی حداکثر مورد نیاز در قطر گام برای حرکت وزنه به طرف بالای صفحه $= P$



(الف)



(ب)

شکل ۵-۱۳

با استفاده از هندسه مساله و معادلات تعادل می توان نوشت:

$$Tan\alpha = \frac{P}{\pi d} \qquad (۵-۵۶)$$

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow P - NSin\alpha - F_m Cos\alpha = 0 \; , \; F_m = fN \quad \Rightarrow \qquad (۵-۵۷)$$

$$P = NSin\alpha + fNCos\alpha \qquad (۵-۵۸)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow NCos\alpha - fNSin\alpha - W = 0 \Rightarrow W = NCos\alpha - fNSin\alpha \qquad (۵-۵۹)$$

از تقسیم دو رابطه (۵-۵۸) و (۵-۵۹) بر همدیگر، رابطه زیر نتیجه می شود:

$$\frac{P}{W} = \frac{NSin\alpha + fNCos\alpha}{NCos\alpha - fNSin\alpha} \qquad (۵-۶۰)$$

$$\frac{P}{W} = Tg(\alpha + \phi) \;\; ، \; P = WTg(\alpha + \phi) \qquad (۵-۶۱)$$

با درنظر گرفتن مونتاژ پیچ به عنوان سیستم آزاد و گرفتن گشتاور حول محور:

$$\sum M = 0 \Rightarrow \frac{Pd}{2} - fL = 0 \quad \Rightarrow \qquad (۵-۶۲)$$

$$Fl = \frac{WdTg(\alpha + \phi)}{2} \Rightarrow \; F = \frac{WdTg(\alpha + \phi)}{2l} \qquad (۵-۶۳)$$

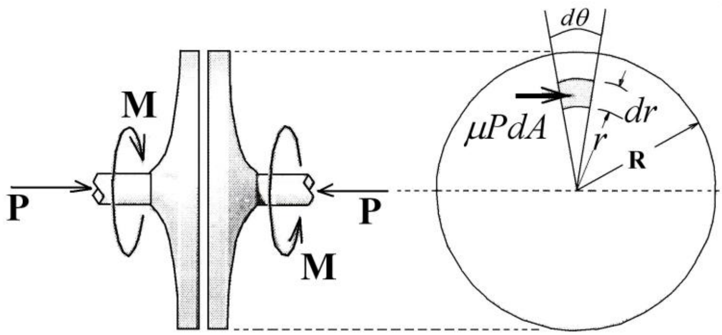
۱۸-۵- یاتاقان‌های کف‌گرد، اصطکاک دیسک:

اصطکاک بین سطوح مدور تحت فشار قائم گسترده، در یاتاقان‌های لولایی، صفحه کلاچ و دیسک ترمز رخ می‌دهد. مطابق شکل (۵-۱۴) دو دیسک مدور تخت را در نظر بگیرید. شفت آنها در یاتاقان‌هایی قرار گرفته است. (یاتاقان‌ها در شکل مشاهده نمی شود) بر اثر اعمال نیروی P، این دو دیسک با هم تماس پیدا می‌کنند.

حداکثر گشتاوری که این کلاچ می تواند منتقل نماید، برابر گشتاور M لازم، جهت لغزش یکی از دیسک‌ها بر روی دیگری می باشد. اگر p تحت عنوان فشار عمودی بین دو دیسک در هر جا باشد، نیروی اصطکاک موثر برای المان سطح کوچک dA نشان داده شده در شکل (۵-۱۴) برابر $\mu p dA$ می باشد، در اینجا μ ضریب اصطکاک و $dA = rdrd\theta$ مساحت المان سطح در دستگاه مختصات قطبی می باشد.

گشتاور این نیروی اصطکاک حول محور شفت برابر $\mu prdA$ می باشد. گشتاور کل را می توان پس از انتگرال‌گیری برای کل سطح به فرم زیر بیان نمود.

$$M = \int \mu prdA \tag{۵-۶۳}$$



شکل ۵-۱۴

برای تفهیم بیشتر مساله، این گشتاور محاسبه می شود. ضمن ثابت در نظر گرفتن ضریب اصطکاک، با توجه به سطوح تخت دیسک‌ها و نو بودن آنها و همچنین تکیه‌گاه خوب و مناسب منطقی به نظر می رسد که فشار عمودی بین دو دیسک ثابت باشد و دارای توزیع یکنواخت باشد به صورتی که توزیع فشار بر روی سطح برابر نیروی وارده گردد. حال به راحتی می توان گشتاور انتقالی را به دست آورد.

$$\pi R^2 p = P \implies p = \frac{P}{\pi R^2} \tag{۵-۶۴}$$

$$M = \int \mu prdA = \int \mu .\frac{P}{\pi R^2}.rdA = \int_0^{2\pi}\int_0^R \frac{\mu P}{\pi R^2} r.rdrd\theta =$$

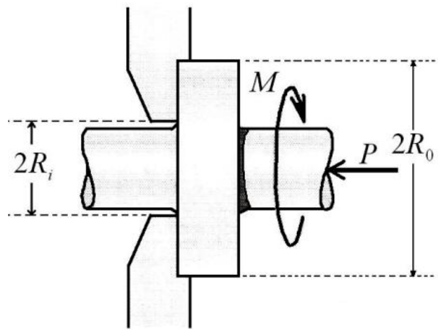
$$\frac{\mu P}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^R r.rdrd\theta = \frac{\mu P}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R d\theta = \frac{\mu PR}{3\pi}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{2}{3}\mu PR \tag{۵-۶۵}$$

تفسیر گشتاور حاصل به این‌صورت است، این گشتاور معادل گشتاور حاصل از نیروی اصطکاک μP می‌باشد که در فاصله $\frac{2}{3}$ از مرکز شفت وارد می‌گردد. اگر دیسک‌های اصطکاکی حلقوی باشند، (مطابق شکل ۵-۱۵) حدود انتگرال‌گیری به ترتیب شعاع‌های قطرهای داخلی و خارجی $R_o\,, R_i$ می باشد.

$$M=\int \mu prdA=\int \mu.\frac{P}{\pi R^2}.rdA=\int_0^{2\pi}\int_{R_i}^{R_o}\frac{\mu P}{\pi R^2}r.rdrd\theta=$$

$$\frac{\mu P}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}r.rdrd\theta=\frac{\mu P}{\pi R^2}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{R_i}^{R_o}d\theta=\frac{\mu P\left(R_o^3-R_i^3\right)}{3\pi}\int_0^{2\pi}d\theta \qquad (۵-۶۶)$$

$$=\frac{2}{3}\mu P\left(R_o^3-R_i^3\right)$$



شکل ۵-۱۵

پس از سایش اولیه، سطوح در تماس با یکدیگر شکل جدید نسب خود را حفظ می کنند و لذا سایش متعاقب بر روی سطوح، ثابت خواهد بود. این سایش وابسته به فاصله پیموده شده و فشار وارده می باشد. با توجه به متناسب فاصله پیموده شده با r می توان رابطه $rp=k$ را در نظر گرفت که در آن k مقداری ثابت می باشد. مقدار ثابت اخیر را از تعادل نیروهای محوری می توان تعیین نمود.

$$P=\int pdA=\int \frac{k}{r}dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\frac{k}{r}.rdr.d\theta=k\int_0^{2\pi}\int_0^{R}dr.d\theta=k.\left(2\pi R\right) \qquad (۵-۶۷)$$

همچنین گشتاور انتقالی به فرم زیر می باشد.

$$M=\int \mu prdA=\int \mu.k.dA=\int_0^{2\pi}\int_0^{R}\frac{\mu P}{2\pi R}.rdrd\theta=$$

$$\frac{\mu P}{2\pi R}\int_0^{2\pi}\int_0^{R}rdrd\theta=\frac{\mu P}{2\pi R}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{R}d\theta=\frac{\mu PR}{4\pi}\int_0^{2\pi}d\theta=\frac{1}{2}\mu PR \qquad (۵-۶۸)$$

بنابراین نتیجه می شود که گشتاور اصطکاکی برای صفحات ساییده شده و مستعمل برابر $\frac{3}{4}$ گشتاور اصطکاکی صفحات نو می باشد، زیرا

$$M_{old} = \frac{1}{2}\mu PR \quad , \quad M_{new} = \frac{2}{3}\mu PR \;\Rightarrow\; M_{old} = \frac{3}{4}M_{new} \qquad (۵-۶۹)$$

اگر دیسک‌های اصطکاکی، حلقه‌هایی با شعاع‌های داخلی و خارجی $R_o\,,R_i$ باشند، گشتاور اصطکاکی برای سطوح ساییده شده و کهنه را می توان به صورت زیر محاسبه نمود.

$$P = \int pdA = \int \frac{k}{r}dA = \int_0^{2\pi}\int_{R_i}^{R_o}\frac{k}{r}.rdr.d\theta = k\int_0^{2\pi}\int_{R_i}^{R_o}dr.d\theta = k.2\pi\left(R_o - R_i\right)$$

(۵-۷۰)

$$M = \int \mu prdA = \int \mu.k.dA = \int_0^{2\pi}\int_{R_i}^{R_o}\frac{\mu P}{2\pi\left(R_o - R_i\right)}.rdrd\theta =$$

$$\frac{\mu P}{2\pi\left(R_o - R_i\right)}\int_0^{2\pi}\int_{R_i}^{R_o} rdrd\theta = \frac{\mu P}{2\pi\left(R_o - R_i\right)}\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}\right]_{R_i}^{R_o} d\theta =$$

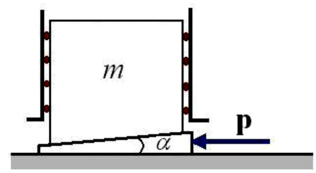
$$\frac{\mu P}{2\pi\left(R_o - R_i\right)} \times \frac{\left(R_o^2 - R_i^2\right)}{2}\int_0^{2\pi} d\theta = \frac{\mu P}{2\pi\left(R_o - R_i\right)} \times \frac{\left(R_o - R_i\right)\left(R_o + R_i\right)}{2} \times 2\pi =$$

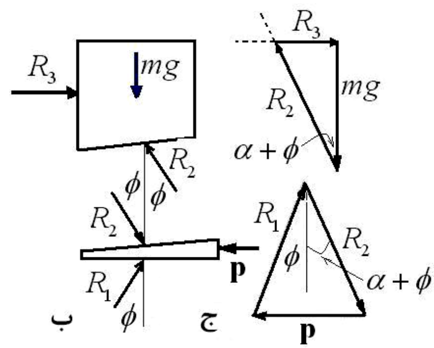
$$\frac{1}{2}\mu P\left(R_o + R_i\right) \;\Rightarrow\; M = \frac{1}{2}\mu P\left(R_o + R_i\right)$$

(۵-۷۱)

۱۹-۵- گوه‌ها:

گوه ها وسیله هایی ساده و مفید در مهندسی هستند که جهت انتقال نیروهای بزرگ مورد استفاده قرار می‌گیرد. با گوه‌ها می توان بار را با نیرویی که معمولاً از وزن آن بسیار کمتر است، بلند کرد. اصطکاک در گوه‌ها نقش اساسی ایفا می کند، شکل (۵-۱۶) را در نظر بگیرید، این گوه جهت بالا بردن جسم به جرم m بکار می رود، بارگذاری قائم بایستی مساوی وزن جسم باشد. ضریب اصطکاک برای سطوح تماس $\mu = tg\phi$ می‌باشد. نیروی مورد نیاز P را می‌توان با توجه به مثلث نیروها در شکل (۵-۱۶- ج) به دست آورد. نیروهای عکس‌العمل سطوح زاویه ϕ را با امتداد عمود بر سطح متناظر خود می سازند. مطابق شکل مجهولات عبارتند از P, R_3, R_2, R_1 که با استفاده ازمعادلات تعادل برای دیاگرام آزاد گوه و قطعه به دست می آیند.





نیروهای بالابرنده بار

شکل ۵-۱۶

ابتدا معادلات تعادل برای جسم به جرم m به فرم زیر نوشته می شود.

$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; R_3 = R_2.Sin(\alpha+\phi) \qquad (۵\text{-}۷۲)$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; mg = R_2.Cos(\alpha+\phi) \qquad (۵\text{-}۷۳)$$

معادلات تعادل برای گوه زیرجسم نیز به صورت زیر است.

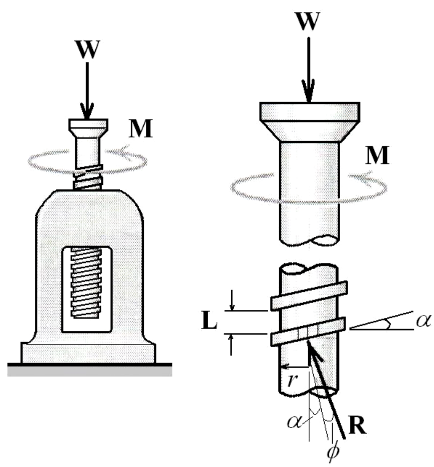
$$\sum F_x = 0 \;\Rightarrow\; R_1 Sin\phi + R_2.Sin(\alpha+\phi) = p \qquad (۵\text{-}۷۴)$$

$$\sum F_y = 0 \;\Rightarrow\; R_1 Cos\phi = R_2.Cos(\alpha+\phi) \qquad (۵\text{-}۷۵)$$

با توجه به معلوم بودن زاویه‌های α,ϕ از چهار معادله بالا به راحتی می توان مجهولات عکس‌العمل‌های سطوح و نیروی اعمالی P را تعیین نمود.

۵-۲۰- پیچ‌ها:

از پیچ‌ها برای بستن و انتقال قدرت یا حرکت استفاده می شود. تعیین کننده عملکرد پیچ همان اصطکاک بین رزوه‌ها است و در واقع همان لغزش قطعه بر روی یک سطح شیب‌دار است. (شکل ۵-۱۷) دیاگرام آزاد رزوه پیچ به همراه نیروهای وارد بر آن در دو حالت بالابردن و پایین آوردن بار در شکل ۵- ۱۸ نشان داده شده است.



شکل ۵-۱۷

با توجه به شکل ۵-۱۸- الف و مثلث نیروها، با استفاده از قاعده سینوس‌ها، مقدار گشتاور مورد نیاز جهت بالا بردن جسم را می توان به صورت زیر محاسبه نمود.

$$\frac{W}{Sin\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\phi)\right]}=\frac{P}{Sin(\alpha+\phi)} \Rightarrow \frac{W}{Cos(\alpha+\phi)}=\frac{P}{Sin(\alpha+\phi)} \Rightarrow$$

$$P=Wtg(\alpha+\phi) \quad , \quad P=\frac{M}{r} \quad \Rightarrow \quad \frac{M}{r}=Wtg(\alpha+\phi) \qquad (۵\text{-}۷۶)$$

$$\Rightarrow \quad M=Wrtg(\alpha+\phi)$$

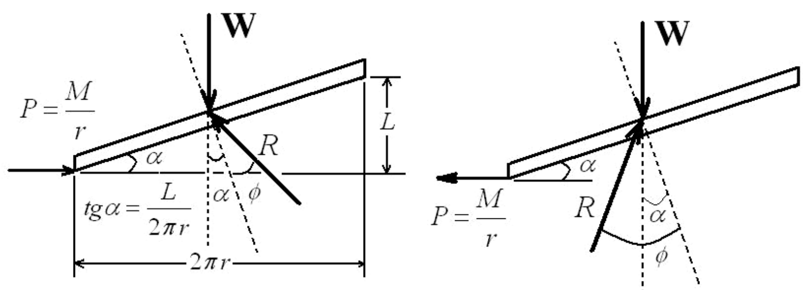
به همین ترتیب با استفاده از مثلث نیروها و قاعده سینوس‌ها برای پایین آوردن جسم در دو حالت نشان داده شده در شکل می توان روابط زیر را نتیجه گرفت.

$$M=Wrtg(\alpha-\phi) \quad , \quad (\alpha \succ \phi) \qquad (۵\text{-}۷۷)$$

$$M = Wrtg(\phi - \alpha) \quad , \quad (\alpha \prec \phi)$$ (۵-۷۸)

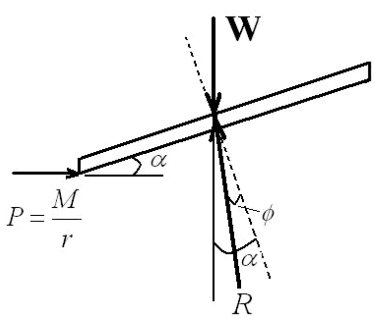
زاویه مارپیچ با باز کردن رزوه پیچ به اندازه یک دور کامل تعیین می شود. که در اینجا L جلوبری پیچ است.

$$\alpha = \tan^{-1}\left[\frac{L}{2\pi r}\right]$$ (۵-۷۹)



الف- بالابردن بار

ب- پایین آوردن بار $(\alpha \prec \phi)$



ج- پایین آوردن بار $(\alpha \succ \phi)$

شکل ۵-۱۸

اگر زاویه مارپیچی کوچکتر از زاویه اصطکاک باشد $\alpha \prec \phi$، خود قفلی ایجاد می شود. اگر $\alpha \succ \phi$ باشد، پیچ به خودی خود باز می شود.