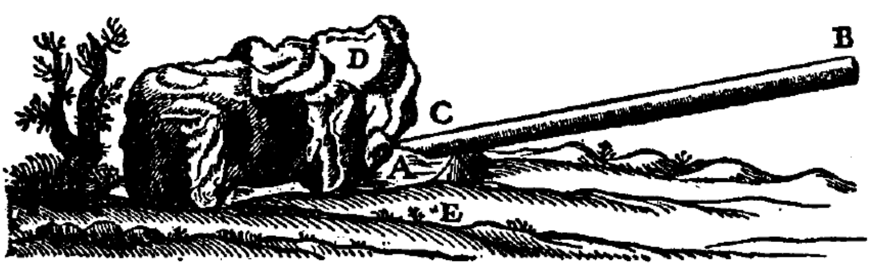
فصل اول

نیروها و کوپل



Estimate the magnitude of the force I must exert with my foot pressing down at B to just lift the end of the block at A up off the ground?

۱-۱- نیروها:

نیرو از جمله مفاهیمی است که علاوه بر استاتیک بلکه در تمامی مباحث مهندسی و فنی بـه کار می‌رود، انواع مختلف آن و اثرات آن از جمله مفاهیمی است که کاربرد بنیادی دارد. نیـرو یک کمیت برداری است که علاوه بر اندازه، جهت آن نیز به همراه نقطه اثرش جـزء کمیـت-های آن محسوب می‌شود. اصول کاربردی در نیروها همان اصول ریاضی است که در آنها بکار برده می شود.

۱-۲- مفاهیم اولیه استاتیک:

فضا: میدان هندسی است که توسط جسم اشغال می شود.

زمان : معیار سنجش توالی وقوع وقایع است که در دینامیک کاربرد دارد.

جرم: معیار سنجش اینرسی یک جسم است که معیار مقاومت آن در مقابـل تغییـر سـرعت است.

نیرو: کنش یک جسم بر جسم دیگر است. کنش یک نیرو، توسط مقدار، جهت و راستای آن مشخص می‌شود.

ذره: جسمی که ابعاد آن به سوی صفر میل کند. زمان اعمال نیرو به یک جسم، جسم مـورد نظر همانند ذره است.

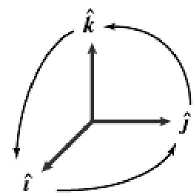
جسم صلب: جسمی که حرکت نسبی بین اجزاء آن قابل چشم پوشی باشد. در استاتیک به دلیل محاسبه نیروهای خارجی بر جسم، اجسام صلب در نظر گرفته می شوند.

۱-۳- انواع کمیت‌ها:

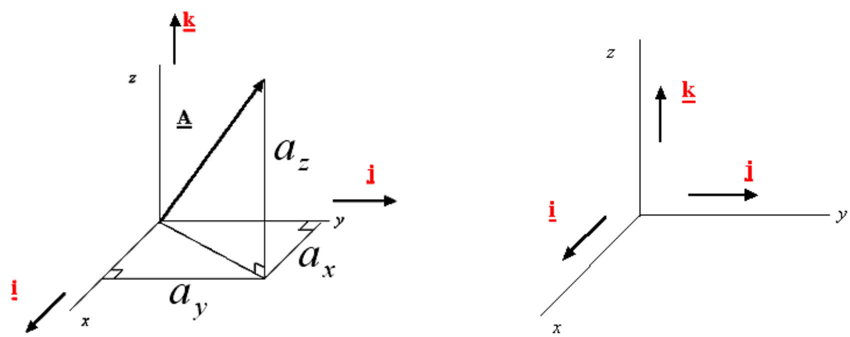
۱-۳-۱- کمیت اسکالر: دارای مقدار است و با یک عدد مشـخص مـی شـود، مثـل انـرژی، جرم، زمان و چگالی

۱-۳-۲- کمیت برداری: این کمیت علاوه بر مقدار، دارای امتداد و جهت نیز می باشـد و از قانون متوازی الاضلاع تبعیت مـی کننـد. مثـل جابجـایی، نیـرو، سـرعت، شـتاب و گشـتاور. بردار $\vec{A}$ به فرم $\vec{A}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$ را در نظر بگیرید. در این بردار، $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ بردارهای

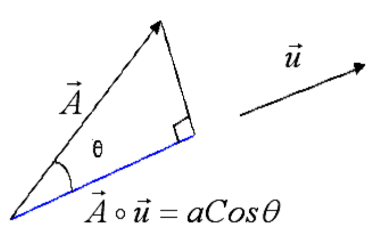
یکه در دستگاه مختصات متعامد کارتزین هستند و جهت چرخش نیز از قانون دســت راســت پیروی می کند. (از $\vec{A}$ به $\vec{B}$) این بردار دارای تصــویرهای a_z , a_y , a_x بــر روی محورهــای مختصات می باشد. (شکل ۱-۱)



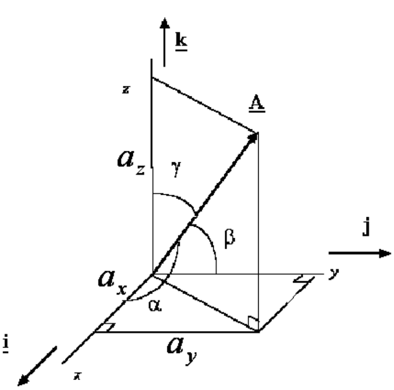
جهت مثبت گردش بردارهای یکه



شکل ۱-۱

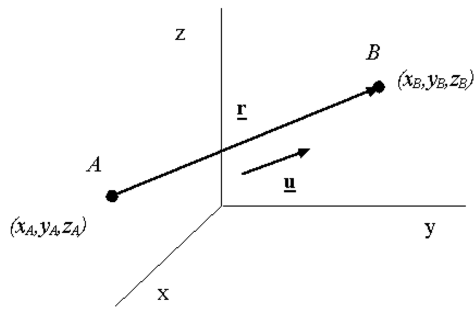


شکل ۱-۲



شکل ۱-۳

برای به دست آوردن تصویر بردار $\vec{A}$ در راستای بردار یکه، کافی است ضرب داخلی آنها محاسبه شود. (شکل۱-۲)



شکل ۱-۴

کسینوس‌های هادی بردار $\vec{A}$ به فرم زیر تعریف می شود. (شکل۱-۳)

$$Cos\alpha = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \ , \ \ Cos\beta = \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \tag{۱-۱}$$

$$Cos\beta = \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \quad , \quad Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\gamma = 1$$

بردار یکه نیز به فرم زیر نوشته می شود.

$$\vec{u}_A = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\vec{i} + \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\vec{j}\frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}\vec{k} \tag{۱-۲}$$

$$= Cos\alpha\,\vec{i} + Cos\beta\,\vec{j} + Cos\gamma\,\vec{k}$$

$$\vec{A} = \left|\vec{A}\right|.\vec{u}_A = a_x Cos\alpha\,\vec{i} + a_y Cos\beta\,\vec{j} + a_z Cos\gamma\,\vec{k} \tag{۱-۳}$$

بردار وضعیت یعنی برداری که $\vec{A}$ و $\vec{B}$ را به هم متصل می کند، به فرم زیرمی باشد. (شکل ۱-۴)

$$\vec{r} = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} \tag{۱-۴}$$

۱-۲-۳-۱ -انواع بردارها:

بردار آزاد: برداری است که به نقطه اثرش بستگی ندارد و در واقع به هیچ خط اثـر منحصـر به فردی در فضا وابسته نیست.

بردار لغزان: برداری است که یک خط اثر برای‌آن در فضـا حفـظ شـده کـه در راسـتای آن کمیت عمل می نماید و یا به عبارتی دیگر می‌تواند در امتداد خودش جا به‌جا شود.

بردار ثابت: این نوع بردار دارای مـوقعیتی خـاص در فضاسـت و داری نقطـه اثـر و راسـتای مشخص است. دو بردار زمانی با یکدیگر برابرند که دارای مقدار، راستا و جهت یکسان باشند.

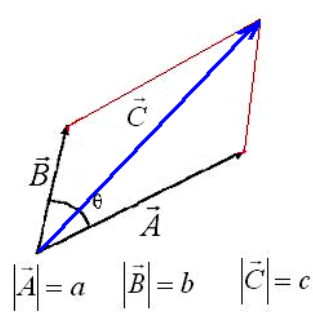
جمع بردارها:

حاصل جمع دو بردار، بردار برآیند است که از قانون متوازی الاضلاع بدست می‌آید، طبق این قانون بردار برآیند همان قطر متوازی الاضلاع است. از قاعده کسینوس‌هـا در مثلـث اسـتفاده می شود.

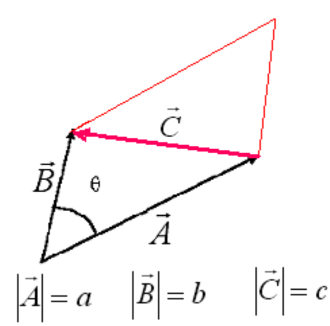
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2abCos\theta \qquad (۱-۵)$$

تفریق بردارها: حاصل جمع بردار اولی با قرینـه بـردار دومـی اسـت. بـا توجـه بـه قاعـده کسینوس‌ها در مثلث رابطه (۱-۶) نتیجه می شود.(قطر فرعـی متـوازی الاضـلاع نشـان داده شده در شکل ۱-۶)

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2abCos\theta \qquad (۱-۶)$$



شکل ۱-۵



شکل ۱-۶

ضرب اسکالر (داخلی یا نقطه‌ای) دو بردار:

ضرب داخلی دو بردار یک اسکالر می باشد، این حاصل برای بردارهای $\vec{B},\ \vec{A}$ با زاویه بین دو بردار θ به صورت زیر تعیین می شود. (شکل ۱-۷) اگر حاصل‌ضرب نقطـه‌ای دو بـردار برابـر

صفر باشد، می توان نتیجه گرفت که دو بردار بر هم عمود هستند و یا یکی از دو بــردار برابــر صفر است.

$$\vec{A}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k} \;\; ، \;\; \vec{B}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k} \qquad (۱-۱۷)$$

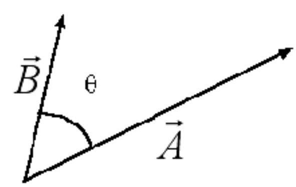
$$\begin{aligned}\vec{A}\circ\vec{B}&=\left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\circ\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right)\\&=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z\end{aligned} \qquad (۱-۸)$$

ضرب داخلی بردارهای یکه مختصات نیز به صورت زیر می باشد.

$$\vec{i}\circ\vec{i}=\vec{j}\circ\vec{j}=\vec{k}\circ\vec{k}=1 \quad , \quad \vec{i}\circ\vec{j}=\vec{j}\circ\vec{k}=\vec{k}\circ\vec{i}=0 \qquad (۱-۹)$$

زاویه بین دو بردار نیز به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$Cos\theta=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}} \qquad (۱-۱۰)$$



شکل ۱-۷

اگر حاصل‌ضرب داخلی دو بردار مساوی صفر شود، نتیجه آن عمود بودن دو بردار بر هم می باشد.

ضرب خارجی دو بردار:

از ضرب خارجی، برداری بدست می‌آید که عمود بــر صــفحه دو بــردار مــی باشــد. بردارهــای $\vec{B},\ \vec{A}$ را با زاویه بین دو بردار θ در نظر بگیرید. (شکل ۱-۸) ضرب خارجی آنها بــه صــورت زیر محاسبه می شود. ضرب خارجی خاصیت جابجایی نــدارد. حاصلضــرب خــارجی دو بــردار برابر مساحت متوازی الاضلاعی است که بر روی آن ساخته می شود. اندازه دو بردار $\vec{B},\ \vec{A}$ را به ترتیب b,a فرض کنید. از قانون دست راست برای تعیین جهت بــردار حاصــل از ضــرب

خارجی استفاده می شود. بر طبق این قانون اگر جهت چرخش انگشتان دســت از $\vec{A}$ بـه $\vec{B}$ باشد، به طوری که کمترین زاویه دوران را طی نماید، انگشت شست جهت مثبت گشــتاور را مشخص می کند. (شکل ۱-۹) این ضرب دارای خاصیت توزیع‌پذیری ضرب نسبت بـه جمـع می باشد. اگر حاصل‌ضرب خارجی دو بردار صفر باشد، می‌تـوان نتیجـه گرفـت کـه دو بـردار موازی هم هستند و یا یکی از دو بردار صفر است.

$$\vec{C}=\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$$

(۱-۱۱)

$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{i}+\left(a_zb_x-a_xb_z\right)\vec{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}$$

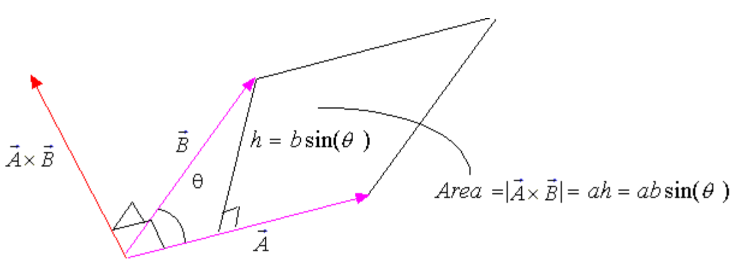
$$c=abSin\theta \qquad (۱-۱۲)$$

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C} \qquad (۱-۱۳)$$

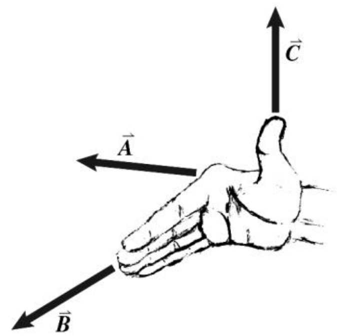
$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A} \qquad (۱-۱۴)$$

ضرب خارجی بردارهای یکه مختصات نیز به صورت زیر می باشد.

$$\begin{array}{l}\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0 \quad , \quad \vec{i}\times\vec{j}=\vec{j}\times\vec{k}=\vec{k}\times\vec{i}=1\\ \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k} \quad , \quad \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i} \quad , \quad \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}\end{array} \qquad (۱-۱۵)$$



شکل ۱-۸



شکل ۱-۹

حاصلضرب مختلط سه بردار:

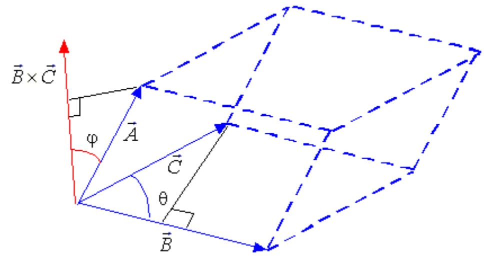
حاصلضرب مختلط بردارهای $\vec{C},\vec{B},\vec{A}$ یک اسکالر بوده و برابر حجم متوازی‌السطوحی است که توسط سه بردار ساخته می‌شود. اندازه این سه بردار به ترتیب c,b,a فرض می شود. (شکل ۱-۱۰) اگر حاصل‌ضرب مختلط سه بردار مساوی صفر شود، می توان نتیجه گرفت که سه بردار نامبرده هیچ حجمی تشکیل نداده و در یک صفحه قرار دارند.

$$\vec{A}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k} \ ، \ \vec{B}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k} \ ، \ \vec{C}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k} \quad (1\text{-}16)$$

$$\vec{A}\circ\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=a\left|\vec{B}\times\vec{C}\right|Cos\varphi=abc.Sin\theta.Cos\varphi \quad (1\text{-}17)$$

$$\vec{A}\circ\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \quad (1\text{-}18)$$

$$=\left(b_y c_z-b_z c_y\right)a_x-\left(b_x c_z-b_z c_x\right)a_y+\left(b_x c_y-b_y c_x\right)a_z$$



شکل ۱-۱۰

۳-۳-۱- حل مسائل استاتیک:

- تعیین روابط مسئله (روابط بین نیروها به شکل روابط ریاضـی، رسـم دیـاگرام آزاد جسـم، تنظیم اطلاعات و تعیین مجهولات).
- تعیین معادلات ریاضی و حل آنها (در شرایط تعادل).
- محاسبات و بدست آوردن پاسخ و در نهایت نتیجه گیری.

۴-۳-۱- قوانین نیوتن:

قانون اول:

اگر نیروی موازنه نشده‌ای بر یک ذره اثر نکند (ویـا برآینـد نیروهـای وارد بـر یـک ذره صـفر شود)، آن ذره ساکن خواهد ماند و یا با سرعت ثابت در امتداد یـک خـط راسـت بـه حرکـت خود ادامه می دهد.

قانون دوم:

شتاب حرکت یک ذره متناسب با نیروی برآیند وارده بر آن بوده و در راستای نیرو می باشد.

قانون سوم:

نیروهای عمل و عکس‌العمل بین اجسامی که با یکدیگر تماس دارنـد، دارای مقـدار مسـاوی، مخلف و همراستا با یکدیگر است.

۵-۳-۱- نیرو:

نیرو کمیتی برداری است که همان کنش یک جسم بر جسم دیگر است و از طریق تماسی مستقیم و القایی به جسم وارد می شود. برای نمونه، نیروی ثقلی، مغناطیسی و الکتریکی

یک سیستم نیرویی هم صفحه غیرهمرس، شامل تعدادی از نیروهایی که در همان صفحه اثر می کند و از یک نقطه مشترک نمی‌گذرند. یک سیستم نیرویی صفحه‌ای موازی یک نوع

سیستم نیرویی هم صفحه‌ای غیرهمرس مشخص(جدا) می‌باشد. سیستم نیرویی هم صفحه‌ای موازی به بار گسترده اطلاع می گردد.

یک سیستم نیرویی غیر هم‌صفحه‌ای همرس شامل نیروهایی است که در همان نقطه (نقطه یکسانی) به هم می‌رسند. اما در صفحات متفاوت قرار دارند. یک مثال مشترک نیروها در سیستم های مهار آنتن تلویزیون می‌باشد.

سیستم‌های نیرویی مشترکاً به دو گروه وابسته که نیروهای همرس یا هم صفحه‌ای هستند تقسیم می‌گردد. سیستم‌های نیرویی همرس شامل نیروهایی است که خط اثر آنها از یک نقطه مشترک می‌گذرد.

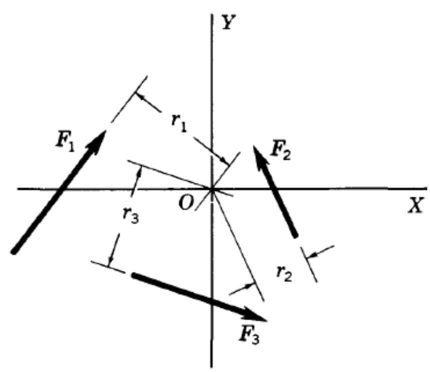
سیستم‌های نیرویی هم صفحه شامل نیروهایی است که در همان صفحه قرار دارد. این سیستم طبقه بندی شده چهار مجموعه تولید می کند.

۱- هم صفحه ای - غیر همرس (شکل ۱-۱۱)

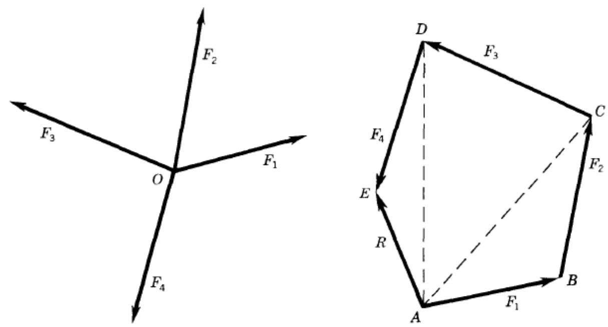
۲- همرس- غیرهم‌صفحه‌ای (شکل ۱-۱۳)

۳- همرس - هم صفحه‌ای (شکل ۱-۱۲)

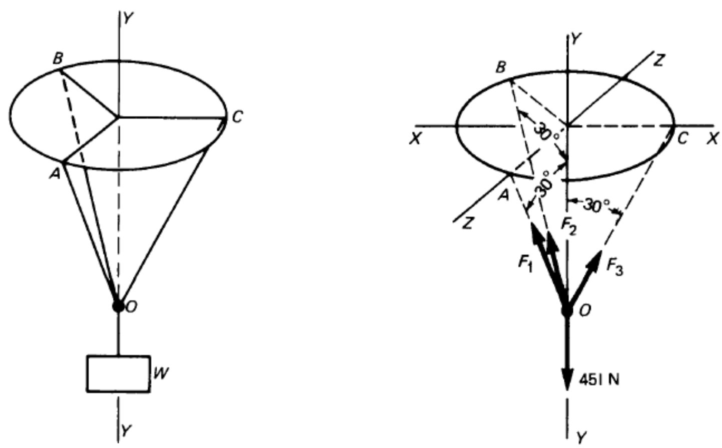
۴- غیرهمرس – غیرهم صفحه‌ای



شکل ۱-۱۱



شکل ۱-۱۲



شکل ۱-۱۳

برآیند نیروهای همرس: دو نیروی همرس یا بیشتر ممکن است به‌وسیله یک نیروی تنها جایگزین شود، اگر تنها همان اثر را هنگامی که نیروهای اصلی عمل می کنند، داشته باشد. این نیروی تنها، نیروی برآیند نام دارد.

اصل سه نیرویی: اگر یک جسم در تعادل استاتیکی تحت اثر سه نیروی هم صفحه ای غیر موازی باشد، خطوط اثر آنها بایستی از یک نقطه مشترک بگذرد.

۶-۳-۱- مجموعه های دو بعدی نیرو:

متداول‌ترین نوع تجزیه یک بردار در حالت دو بعدی، تجزیه بردار به مولفـه هـای مسـتطیلی است که طبق قانون متوازی الاضلاع چنین می شود: (شکل ۱۴)

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} \quad , \; F = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2} \qquad (1\text{-}19)$$

$$F_x = FCos\theta \quad , F_y = FSin\theta\,, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{F_y}{F_x} \tag{1-20}$$

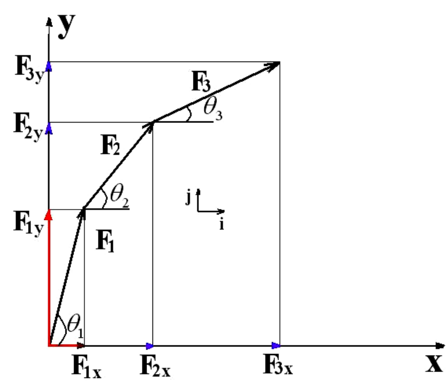
$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} \quad , F = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2} \tag{1-21}$$

$$F_x = FCos\theta \quad , F_y = FSin\theta\,, \quad \theta = \tan^{-1}\frac{F_y}{F_x} \tag{1-22}$$

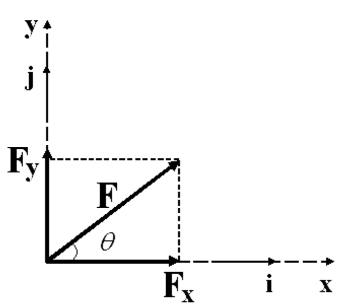
در مورد چند نیروی اعمالی به جسم، با استفاده از تصویر نیروها در راستای محورهای مختصات و مجموع کلیه مولفه‌های تصویر به راحتی می توان برآیند این نیروها را به دست آورد. مطابق شکل(۱-۱۴) سه نیرو به جسم وارد شده و بر روی محورهای مختصات تصویر شده است.

$$R_x = \sum F_x \;\text{،}\; R_y = \sum F_y \;\text{،}\; R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} \tag{1-23}$$

$$\theta_x = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_y} \quad \text{،} \quad \theta_y = \tan^{-1}\frac{R_x}{R_y} \tag{1-24}$$



شکل ۱-۱۴



شکل ۱-۱۳

۷-۳-۱- مجموعه های سه بعدی نیرو:

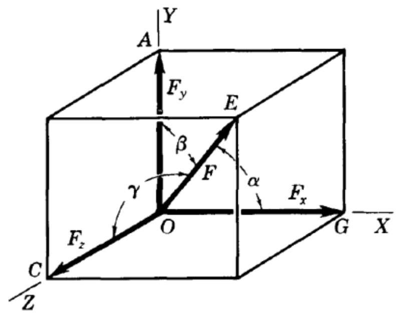
در این حالت در فضای سه بعدی برای نیروهای اعمال شده به جسم سـه مولفـه در راسـتای محورهای $x; y; z$ وجود دارد که تجزیه این نیروها به همراه اندازه و کسینوس‌های هادی بـه صورت زیر می باشد، نوشته می شود. (شکل ۱-۱۵)

$$\vec{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{k} \tag{1-25}$$

$$F_x = FCos\theta_x \quad , \quad F_y = FCos\theta_y \quad , \quad F_z = FCos\theta_z \qquad (۱-۲۶)$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad (۱-۲۷)$$

$$Cos\theta_x = \frac{F_x}{F} \quad ، \quad Cos\theta_y = \frac{F_y}{F} \quad ، \quad Cos\theta_x = \frac{F_x}{F} \qquad (۱-۲۸)$$



شکل ۱-۱۵

با توجه به اینکه در نیروهای اعمالی بیش از یک نیرو وجود دارد، نیروی برآیند را می توان به شکل زیر نوشت.

$$R_x = \sum F_x \;\; ، \;\; R_y = \sum F_y \;\; ، R_x = \sum F_x \qquad (۱-۲۹)$$

$$\theta_x = Cos^{-1}\frac{R_x}{R} \;\; ، \;\; \theta_y = Cos^{-1}\frac{R_y}{R} \;\; ، \;\; \theta_z = Cos^{-1}\frac{R_z}{R} \qquad (۱-۳۰)$$

$$R = \sqrt{R_X^2 + R_Y^2 + R_Z^2} \qquad (۱-۳۱)$$

بردار یکه (λ):

بردار یکه در حالت سه بعدی بر حسب کسینوس‌های هادی و مولفه‌های بردار از فرمول‌هـای زیر قابل محاسبه است.

$$\vec{\lambda} = Cos\theta_x i + Cos\theta_y j + Cos\theta_z k \quad \text{و} \quad \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1 \qquad (۱-۳۲)$$

$$Cos^2\theta_x + Cos^2\theta_y + Cos^2\theta_z = 1 \qquad (۱-۳۳)$$

نیرویی که از امتداد دو نقطه معلوم عبور می‌کند، به صورت زیر نوشته می شود.

$$\vec{F} = F\vec{\lambda}_F \quad ، \quad PQ = D\vec{\lambda}_F \tag{۱-۳۴}$$

$$\vec{\lambda}_F = \frac{D_x}{D} i + \frac{D_y}{D} j + \frac{D_z}{D} k \tag{۱-۳۵}$$

$$D_x = x_2 - x_1 \quad ، \quad D_y = y_2 - y_1 \quad ، \quad D_z = z_2 - z_1 \tag{۱-۳۶}$$

$$Cos\theta_x = \frac{D_x}{D} \;,\; Cos\theta_y = \frac{D_y}{D} \;,\; Cos\theta_z = \frac{D_z}{D} \tag{۱-۳۷}$$

$$D = \sqrt{D_x^2 + D_y^2 + D_z^2} \tag{۱-۳۸}$$

$$\vec{F} = F(Cos\theta_x i + Cos\theta_y j + Cos\theta_z k) \tag{۱-۳۹}$$

۴-۱- تعادل:

حالت سکون قانون اول نیوتن که در آن جسم برآیند نیرو ها صفر است، وضعیت تعادل بـوده و می توان نوشت:

$$\vec{R} = \sum \vec{F} = 0 \quad ، \quad \left(\sum \vec{F}_x\right)i + \left(\sum \vec{F}_y\right)j + \left(\sum \vec{F}_z\right)k = 0 \tag{۱-۴۰}$$

اگر نیروهای وارد بر جسم در حالت تعادل، همگی در یک نقطه مشترک، یعنی همرس باشند، چند ضلعی بسته تعادل مطابق شکل(۱-۱۲) برای نیروها وجود دارد.

۵-۱- گشتاور:

تمایل نیرو برای دوران دادن یک جسم را گشتاور نیرو می نامند. اگر بازوی گشـتاور (فاصـله عمودی بین محور دوران و خط اثر نیرو) را d در نظر بگیرید، آنگاه گشتاور برابر است با:

$$M_O = FrSin\theta = Fd \quad \text{و} \quad \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F} \tag{۱-۴۱}$$

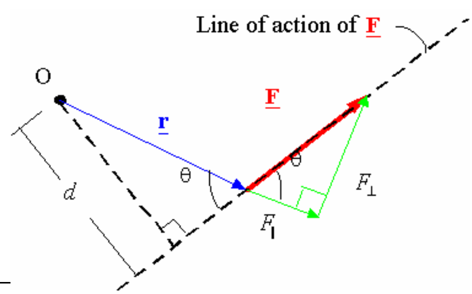
که در آن زاویه θ، زاویه بین امتداد نیرو و محور راستا و جهت دوران از طریق قـانون دسـت راست تعیین می‌شود، به طوری که انگشتان سمت چرخش از r به F می باشد. (شـکل‌هـای ۱-۱۶ و ۱-۱۷) در این صورت شست جهت مثبت M را نشان می دهد.

جهت گشتاور در جهت مثلثاتی یا عقربه‌هـای سـاعت اسـت. (شـکل۱-۱۸) همچنـین بـردار گشتاور به همراه نیرو و بازوی آن که یک متوازی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند، نشـان داده شـده است. (شکل ۱-۱۹)

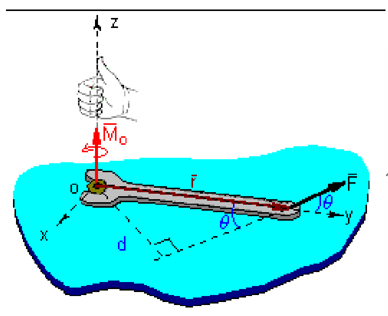
۱-۵-۱- اصل واینیون یا اصل گشتاورها:

اصل وارینیون چنین بیان می کند که گشتاور یک نیرو حول هر نقطه با مجموع گشتاورهای مولفه‌های آن نیرو حول همان نقطـه برابـر اسـت. (شـکل۱-۲۰- الـف و ب) در ایـن صـورت می توان نوشت:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \ldots + \vec{F}_n\right) \\ = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 + \ldots + \vec{r}_n \times \vec{F}_n \qquad (۱-۴۲)$$



شکل ۱-۱۶

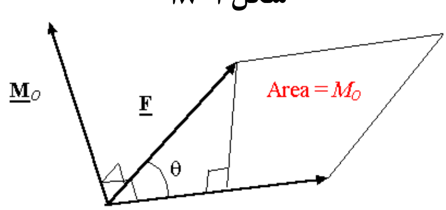


شکل ۱-۱۷

در جهت عقربه‌های ساعت CW
به طرف داخل صفحه کاغذ

خلاف جهت عقربه‌های ساعت CCW
به طرف خارج (بیرون) صفحه کاغذ

شکل ۱-۱۸



شکل ۱-۱۹

اگر چند نیرو در یک صفحه عمل نمایند و محاسبه گشتاورهای آنها حول یک نقطه مطلـوب باشد، می توان ابتدا نیروها را به مولفه‌های آن تجزیه کرده، سپس برآیند نیرو ها را محاســبه کرد.

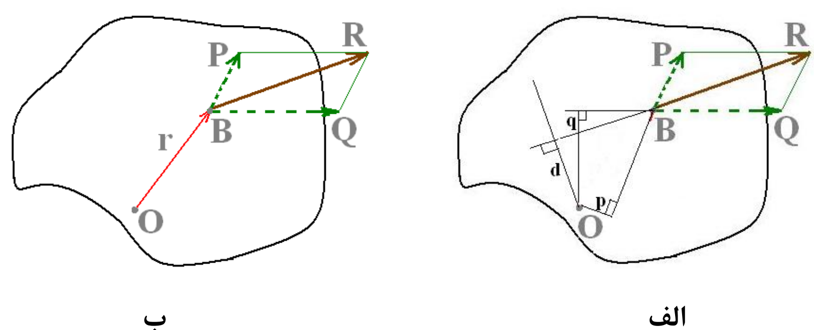
$$\vec{r} = r_x i + r_y j + r_z k \quad \vec{F} = F_x i + F_y j + F_z k \qquad (۱-۴۳)$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_y \end{vmatrix} \qquad (۱-۴۴)$$

$$\vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} \quad ، \quad M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \qquad (۱-۴۵)$$

$$\vec{M} = M \vec{\lambda}_M \quad ، \quad \vec{\lambda}_M = Cos\theta_x i + Cos\theta_y j + Cos\theta_z k \qquad (۱-۴۶)$$

$$Cos\theta_x = \frac{M_x}{M} \quad , \quad Cos\theta_y = \frac{M_y}{M} \quad , \quad Cos\theta_z = \frac{M_z}{M} \qquad (۱-۴۷)$$



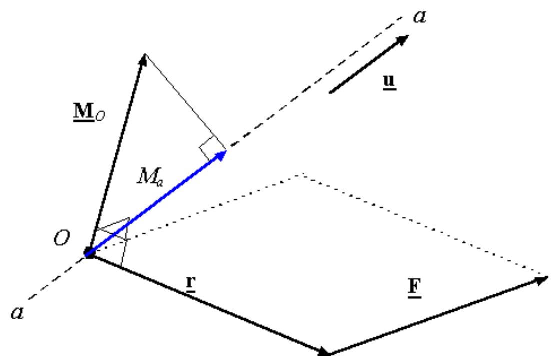
شکل ۱-۲۰

۲-۵-۱- یک نیرو حول یک محور:

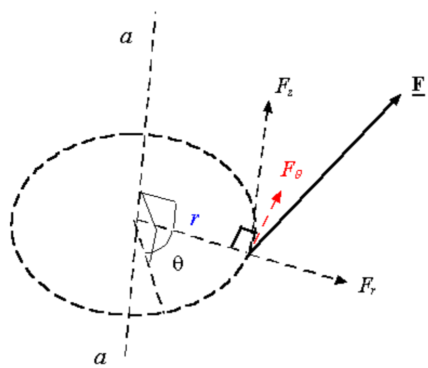
دوران یک جسم حول یک محور توسط نیروی مورد نظر است. گشتاور یک نیرو حول محـور موازی با آن صفر است و این نیرو جسم را به هیچ وجه دوران نمـی دهـد. جهـت بـه دسـت آوردن گشتاور یک نیرو، کافی است ضرب داخلی آن را با بردار یکه راستای مورد نظـر انجـام دهید. (شکل‌های ۱-۲۱ و ۱-۲۲)

$$M_a = \vec{u} \circ \vec{M}_0 = \vec{u} \circ \left(\vec{r} \times \vec{F}\right) \quad ، \quad \vec{M}_a = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \qquad (۱-۴۸)$$

$$\vec{u} = \lambda_x i + \lambda_y j + \lambda_z k \quad ، \quad M_a = r.F_\theta \qquad (۱-۴۹)$$



شکل ۱-۲۱



شکل ۱-۲۲

۳-۵-۱- زوج نیرو(کوپل):

گشتاوری که توسط دو نیروی مساوی و مختلف الجهت بوجود آید را زوج نیرو یا کوپل گویند. بردار M را گشتاور کوپل گویند و برداری است عمود بر صفحه شامل دو نیرو و برابر است با: (شکل ۱-۲۳)

$$\vec{M}_O = \vec{M}_{R_O} = \vec{r}_{OB} \times \vec{F} + \vec{r}_{OA} \times \left(-\vec{F}\right) = \left(\vec{r}_{OB} - \vec{r}_{OA}\right) \times \vec{F}$$
$$= \vec{r}_{AB} \times \vec{F} \quad \Rightarrow \quad M = Fr_{AB} Sin\theta = Fd \tag{۱-۵۰}$$

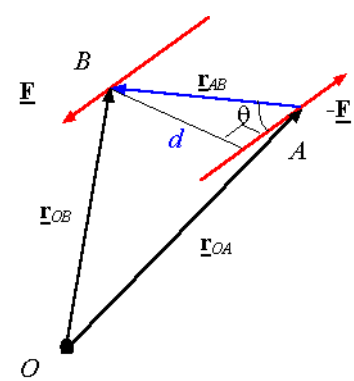
که در آن d فاصله عمودی بین دو نیروی $F,-F$ بوده و جهت گشتاور نیز توسط قانون دست راست تعیین می شود. زوج نیرو جسم را فقط دوران می دهد و به هیچ عنوان خاصیت انتقالی ندارد. کوپل‌هایی که در صفحات غیر موازی با هم عمل می‌کنند را می‌توان با قانون عادی ترکیب بردارها با هم جمع نمود.

برای ترکیب چند نیرو روابط زیر صادق است به شرط آنکه هنگام انتقال نیروها به یک نقطه مشخص، کوپل‌های متناظر با هر نیرو نیز به همان نقطه منتقل شود.

$$R_x = \sum F_x \ ، \ R_y = \sum F_y \ ، \ R_z = \sum F_z \ ، \ R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \tag{۱-۵۱}$$

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} \quad ، \quad \vec{M} = M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_z \vec{k} \tag{۱-۵۱}$$

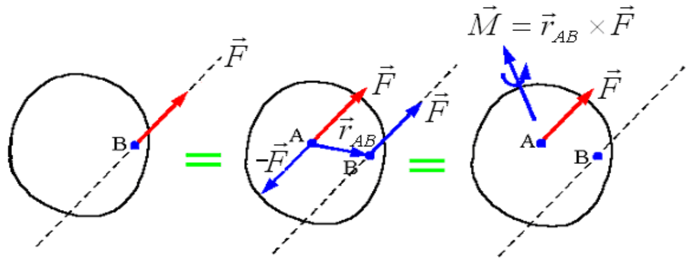
$$\vec{M}_x = \sum \left(\vec{r} \times \vec{F}\right)_x \ ، \ \vec{M}_y = \sum \left(\vec{r} \times \vec{F}\right)_y ، \ \vec{M}_z = \sum \left(\vec{r} \times \vec{F}\right)_z \tag{۱-۵۲}$$



شکل ۱-۲۳

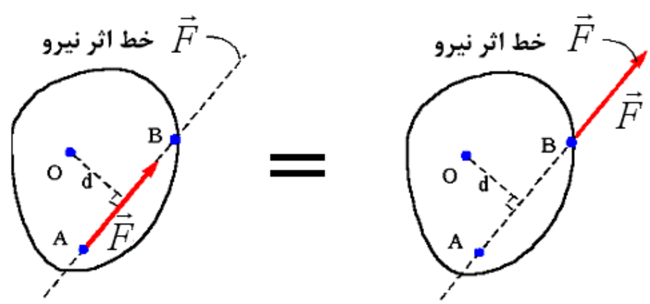
۴-۵-۱- ترکیب نیروها و گشتاورها:

تجزیه یک نیروی معین به یک نیرو در نقطه O و یک کوپل ایجاد سیستم کوپل- نیرو می‌کند. به عبارت دیگر برای مشاهده اثر یک نیرو در یک نقطه را می‌توان با یک نیرو در همان نقطه و یک کوپل جایگزین کرد. (شکل۱-۲۴)



شکل ۱-۲۴

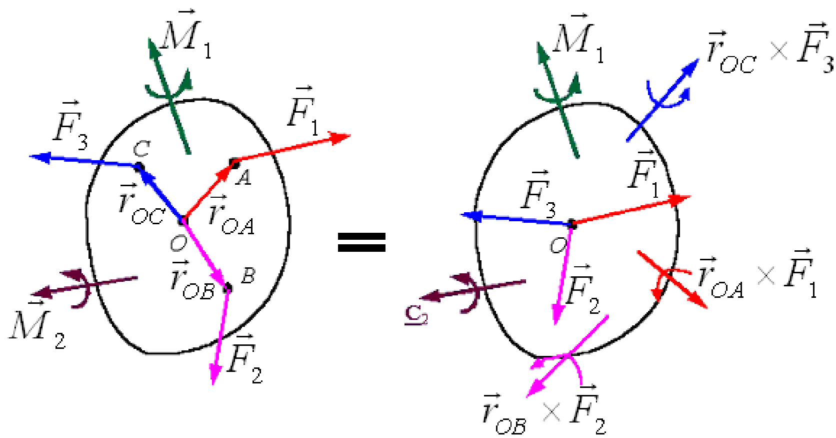
اگر برآیند نیروهای وارد بر یک جسم صفر باشد، برآیند کل مجموعه صفر یا یک کوپل است نیروی مشخص وارد بر جسم را می‌توان به نقطه ای دلخواه حرکت داد به شرط آنکه کوپلی به آن نقطه اضافه نشود. (شکل ۱-۲۵)



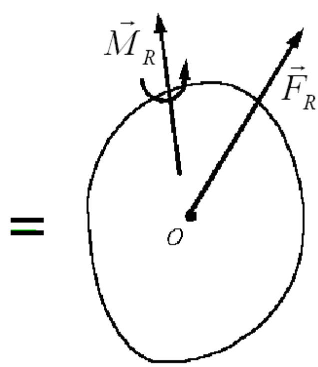
شکل ۱-۲۵

۵-۵-۱- برآیند سیستم یک کوپل و یک نیرو:

برای نقطه دلخواه O، هر سیستم یک نیرو و یک کوپل را می توان با نیرویی گذرنده از O و یک کوپل تنها هم ارز کرد. کوپل تنها از O که مساوی با نیروی برآیند سیستم اولیه می باشد، عبور می‌کند. در این صورت کوپل مساوی با گشتاور برآیند سیستم اولیه حول نقطه O می باشد. (شکل های ۱-۲۶ و ۱-۲۷)



شکل ۱-۲۶

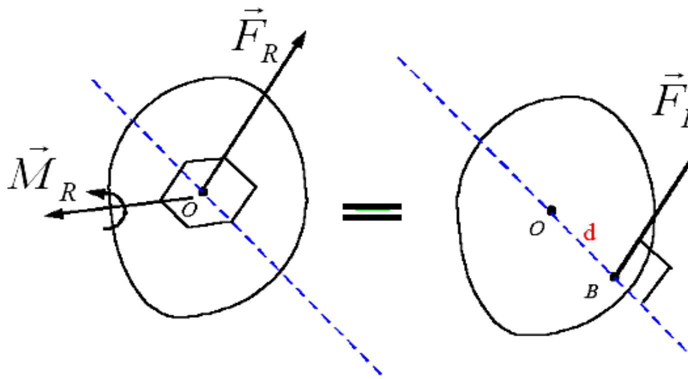


شکل ۱-۲۷

$$\vec{F}_R = \sum \vec{F} \quad , \quad \sum \vec{M}_R = \sum \vec{M}_O = \sum \vec{M} + \sum \vec{r} \times \vec{F} \qquad (۱\text{-}۵۳)$$

حال این سوال مطرح است که چه وقت سیستم یک نیرو و یک کوپل را می توان به یک نیروی تنها تبدیل کرد؟ برای سیستمی که شامل یک کوپل و یک نیرو می باشد، اگر نیروی برآیند و کوپل برآیند عمود بر هم باشند، آنگاه می توان یک سیستم معادل با یک نیروی منفرد بدون کوپل، جایگزین نمود. جهت به دست آوردن این سیستم، نیروی برآیند از فاصله

d در راستای خط عمود بر صفحه نیروی برآیند و کوپل برآیند حرکت می کند، تا زمانی‌که نیروی برآیند، گشتاوری معادل با کوپل برآیند ایجاد نماید. (شکل ۱-۲۸)



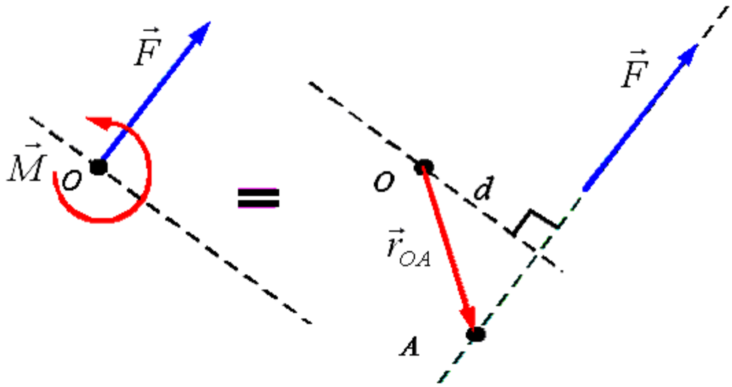
شکل ۱-۲۸

$$F_R . d = M_R \quad \Rightarrow \; d = \frac{M_R}{F_R} \tag{۱-۵۴}$$

قابل ذکر است که، تمام سیستم‌های نیرویی دو بعدی را می توان به یک سیستم نیروی منفرد کاهش داد. جهت یافتن خط اثر نیروی منفرد، گشتاور سیستم اولیه بایستی همان مقدار گشتاور سیستم نیروی منفرد را داشته باشد. (شکل ۱-۲۹)

بنابراین:

$$\vec{M} = \vec{r}_{OA} \times \vec{F} \quad \Rightarrow \; d = \frac{M}{F} \tag{۱-۵۵}$$



شکل ۱-۲۹

سرانجام این نتیجه حاصل می شود: دو سیستم نیرویی معادل هم هستند، اگر برآیند آنها در نیرو و کوپل یکسان باشد.

$\sum F$ برای سیستم نیرویی دوم = $\sum F$ برای سیستم نیرویی اول

$\Leftrightarrow$

$\sum M$ برای سیستم نیرویی دوم = $\sum M$ برای سیستم نیرویی اول

دو سیستم معادل هم هستند.