ارتعاشات مکانیکی

ارائه دهنده: دکتر سیروان فرهادی

فصل هشتم: ارتعاشات سیستم‌های چند درجه آزادی– روش انرژی

ارائه دهنده: دکتر سیروان فرهادی

فهرست مطالب

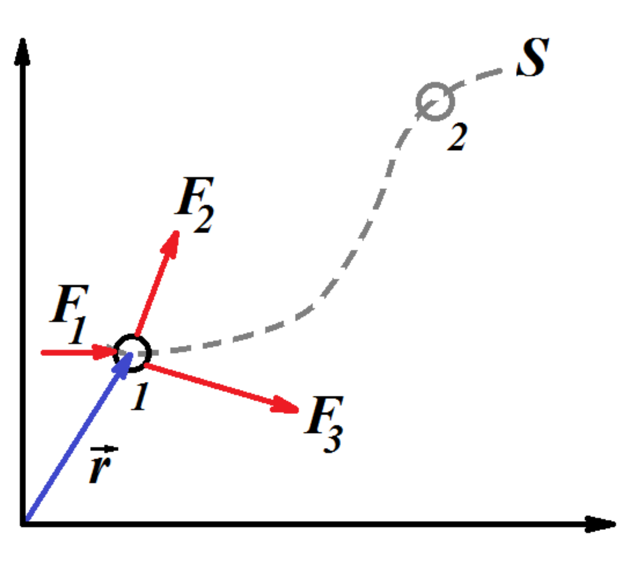
- مقدمه
- اصل کار مجازی
- روش لاگرانژ

مقدمه

در فصل پیش دیدیم که چگونه معادله‌های حرکت سیستم‌های چند درجه آزادی را می‌توان با به کارگیری روش نیوتون و ترسیم دیاگرام آزاد تک تک اجزای سیستم بدست آورد. اگر چه این روش همواره می-تواند برای استخراج معادله‌های حرکت یک سیستم چند درجه آزادی مورد استفاده قرار گیرد، با افزایش تعداد درجه‌های آزادی سیستم و پیچیدگی‌های آن، به کارگیری روش نیوتون دشوارتر می‌شود. در چنین مسائلی می‌توان از روش‌های جایگزینی مانند روش لاگرانژ که بر پایه تغییرات انرژی سیستم استوار است، استفاده نمود.

در این فصل ابتدا روش کار مجازی را برای سیستم‌های چند درجه آزادی توضیح می‌دهیم. سپس با استفاده از اصل کار مجازی معادلات لاگرانژ را استخراج می کنیم.

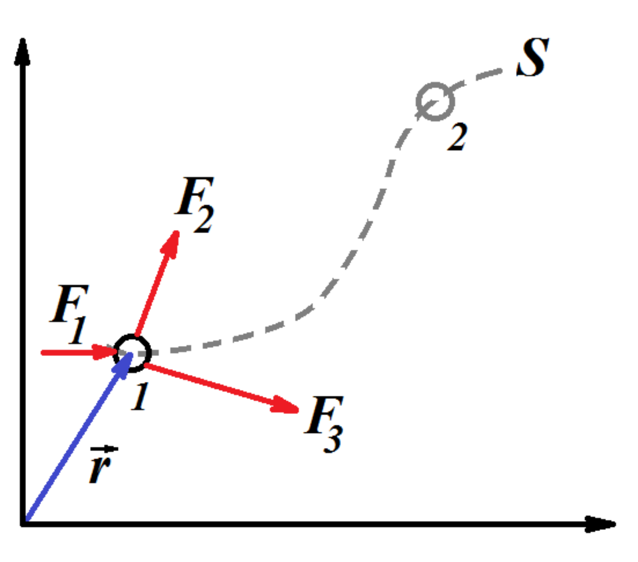
اصل کار مجازی



چنانکه پیشتر در فصل چهارم نیز گفته شد، اصل کار مجازی ابتدا برای سیستم‌های استاتیکی ارائه گردید. اما بعدها با کمک اصل دالامبر این روش برای بررسی رفتار دینامیکی سیستم‌ها نیز به کار گرفته شد. یک ذره را در نظر بگیرید که مطابق شکل مجموعه‌ای از نیروها به آن وارد می‌شود و مسیری مانند S را طی می کند. بنابر اصل کار مجازی اگر به یک سیستم از ذرات که در حضور مجموعه‌ای از نیروها در حالت تعادل قرار دارد، جابجایی‌های مجازی کوچکی اعمال شود، کار انجام شده توسط مجموع نیروها برابر صفر است:

$$\delta W = \sum \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

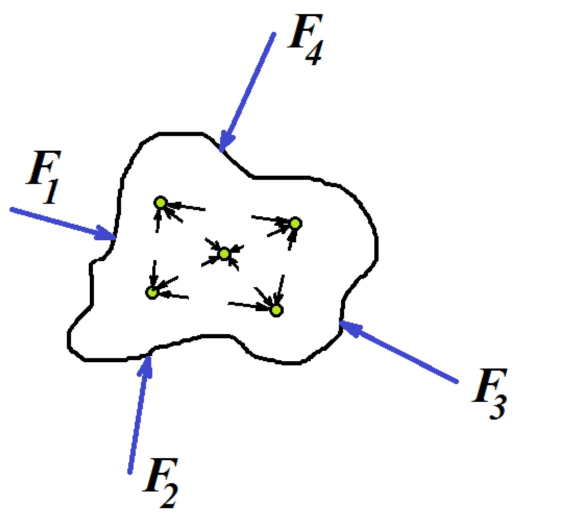
اصل کار مجازی



در هنگام محاسبه کار نیروهای داخلی و خارجی توجه داریم که نیروهای قیدی (تکیه‌گاه‌های ثابت) و نیروهای داخلی اتصالات بدون اصطکاک کاری انجام نمی‌دهند. زیرا که در تکیه‌گاه‌های ثابت جابجایی برابر صفر است و در اتصالات بدون اصطکاک، همه‌ی ذرات جابجایی یکسانی دارند و نیروهای وارد بر آنها به صورت عمل و عکس‌العمل می‌باشند، بنابراین مجموع کار آنها برابر صفر است. همچنین می‌دانیم که برآیند کار نیروهای داخلی اجسام صلب نیز برابر صفر است. بنابراین در محاسبه‌ی کار مجازی می‌توان آنها را از ابتدا حذف نمود.

حال مجموعه‌ای از ذرات را در نظر بگیرید که مطابق شکل زیر تحت تأثیر نیروهای خارجی و داخلی قرار دارند. با استفاده از اصل دالامبر (استفاده از نیروهای اینرسی) می‌توان اصل کار مجازی را برای استخراج معادلات حرکت مجموعه ای از ذرات نیز مورد استفاده قرار داد:

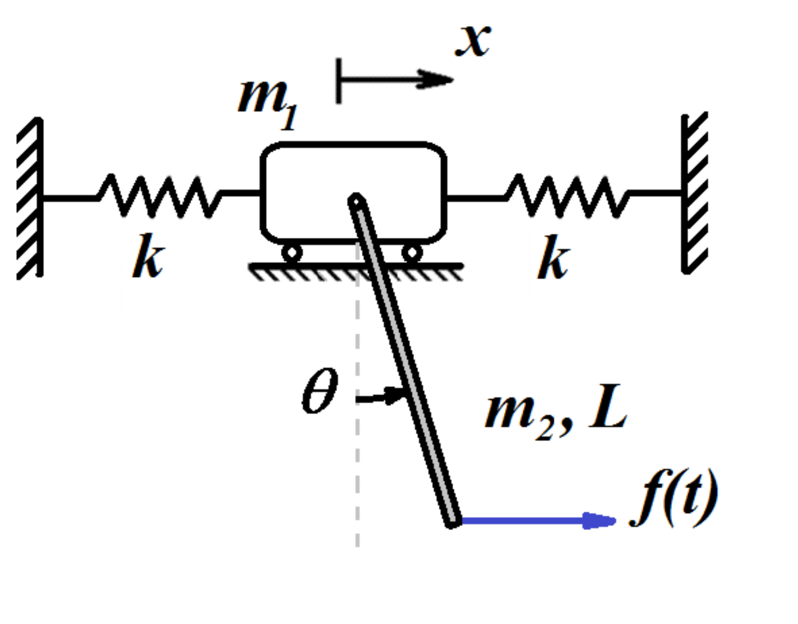
$$\delta W = \sum (\vec{F}_i - m_i \ddot{r}_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$



یک مجموعه از ذرات تحت تأثیر نیروهای داخلی و خارجی

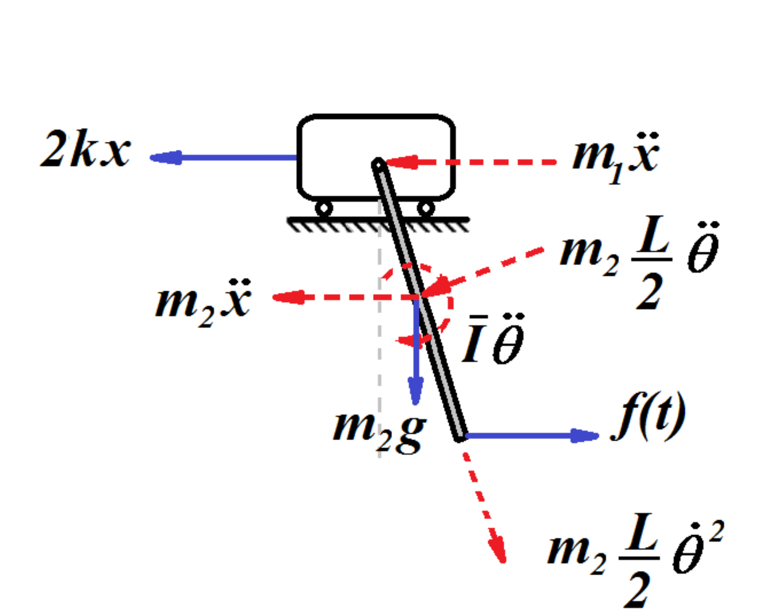
یادآور می‌شود که جابجایی مجازی $\delta \vec{r}_i$ یک جابجایی بسیار کوچک و دلخواه است که تنها محدودیت آن سازگاری با شرایط تکیه‌گاهی سیستم است. جابجایی مجازی $\delta \vec{r}_i$ می‌تواند به صورت ناگهانی و بدون صرف زمان اعمال شود و از تمام قواعد دیفرانسیلی پیروی می کند و تنها تفاوت آن با جابجایی دیفرانسیلی $d\vec{r}_i$ آن است که مورد اخیر در طول زمان رخ می‌دهد، اما $\delta \vec{r}_i$ می‌تواند بدون صرف زمان و یا با صرف زمان انجام شده باشد.

مثال



شکل مقابل یک میله‌ی یکنواخت را نشان می‌دهد که به یک گاری مفصل شده است و می‌تواند نسبت به آن دوران نماید. خود گاری نیز می‌تواند در راستای افق جابجا شود. معادله‌های دیفرانسیل حرکت را برای این مجموعه استخراج کنید.

حل: ابتدا مطابق شکل زیر، نیروهای اینرسی و نیروهای فعال (نیروهایی که کار انجام می دهند) را بر روی مجموعه مشخص می کنیم.



نیروهای استاتیکی و دینامیکی وارد بر مجموعه
گاری و میله

چنانکه ملاحظه می‌شود سیستم دو درجه آزادی است و حرکات آن را می‌توان با مختصات تعمیم یافته‌ی x و θ (جابجایی افقی گاری و دوران میله نسبت به گاری) توصیف نمود. هر نوع جابجایی مجازی در این سیستم می‌تواند با ترکیبی از δx و $\delta\theta$ ایجاد شود که شرایط قیدی مسأله را نیز رعایت می‌کنند. با توجه به نیروهای خارجی و نیروهای اینرسی که به مجموعه وارد شده‌اند و نیز مقدار جابجایی نقطه اثر آنها در راستاهای عمودی و افقی، کار برآیند نیروها برابر است با

$$\begin{aligned}\delta W &= f\,(\delta x + L\delta\theta\cos\theta) - ۲k\,x\,\delta x - m_۲ g\,(\frac{L}{۲}\delta\theta\sin\theta) - m_۱\ddot{x}\,\delta x - \bar{I}\,\ddot{\theta}\,\delta\theta \\ &\quad - m_۲(\ddot{x} + \frac{L}{۲}\ddot{\theta}\cos\theta)(\delta x + \frac{L}{۲}\delta\theta\cos\theta) - m_۲(\frac{L}{۲}\ddot{\theta}\sin\theta)(\frac{L}{۲}\delta\theta\sin\theta) \\ &\quad - m_۲(\frac{L}{۲}\dot{\theta}^۲\cos\theta)(\frac{L}{۲}\delta\theta\sin\theta) = ۰\end{aligned}$$

که با فرض کوچک بودن زاویه‌ی دوران میله ($\sin\theta \approx \theta$ و $\cos\theta \approx ۱$) و حذف جمله‌های مرتبه‌ی بالا، آن را می‌توان مطابق زیر نوشت:

$$\delta W = (f - ۲k\,x - m_۱\ddot{x} - m_۲\ddot{x} - \frac{m_۲ L}{۲}\ddot{\theta})\delta x$$

$$+ (f\,L - \frac{m_۲ g\,L}{۲}\theta - \bar{I}\,\ddot{\theta} - \frac{m_۲ L}{۲}\ddot{x} - \frac{m_۲ L^۲}{۴}\ddot{\theta})\delta\theta = ۰$$

معادلات فوق را می‌توانستیم به این ترتیب بدست آوریم که یک بار فرض کنیم $\delta x = ۰$ باشد و کار برآیند نیروها را در جابجایی مجازی $\delta\theta$ مساوی صفر قرار دهیم و بار دیگر فرض کنیم $\delta\theta = ۰$ باشد و کار برآیند نیروها را در جابجایی مجازی δx مساوی صفر قرار دهیم.

از آنجایی که δx و $\delta\theta$ مقادیری اختیاری هستند و می‌توانند هر مقداری داشته باشند، برای آنکه معادله‌ی قبل همواره صادق باشد، باید داشته باشیم:

$$f-2kx-m_1\ddot{x}-m_2\ddot{x}-\frac{m_2L}{2}\ddot{\theta}=0$$

$$fL-\frac{m_2gL}{2}\theta-\bar{I}\ddot{\theta}-\frac{m_2L}{2}\ddot{x}-\frac{m_2L^2}{4}\ddot{\theta}=0$$

که آن را در فرم ماتریسی می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} m_1+m_2 & \frac{m_2L}{2} \\ \frac{m_2L}{2} & \bar{I}+\frac{m_2L^2}{4} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} 2k & 0 \\ 0 & \frac{m_2gL}{2} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} f \\ fL \end{Bmatrix}$$

و یا

$$[M]\{\ddot{x}\}+[C]\{\dot{x}\}+[K]\{x\}=\{f(t)\}$$

که در آن

$$[M]=\begin{bmatrix} m_{۱} & ۰ \\ ۰ & m_{۲} \end{bmatrix}, \qquad [C]=\begin{bmatrix} c_{۱}+c_{۲} & -c_{۲} \\ -c_{۲} & c_{۲} \end{bmatrix}$$

$$[K]=\begin{bmatrix} k_{۱}+k_{۲} & -k_{۲} \\ -k_{۲} & k_{۲} \end{bmatrix}, \qquad \{f(t)\}=\begin{Bmatrix} f_{۱}(t) \\ f_{۲}(t) \end{Bmatrix}.$$

در رابطه بالا، ماتریس های [M]، [C] و [K] را به ترتیب ماتریس‌های جرم، میرایی و سختی سیستم می‌نامند. همچنین بردار {f(t)} را بردار نیروهای خارجی و بردار {x} را بردار جابجایی سیستم می‌نامیم.

روش لاگرانژ

می‌توان به سادگی نشان داد که برای یک سیستم از ذرات در جابجایی مجازی δr_i، کار نیروهای اینرسی برابر است با تغییرات انرژی جنبشی سیستم و کار نیروهای پایستار برابر است با منفی تغییرات انرژی پتانسیل سیستم. در نتیجه اصل کار مجازی را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$dT + dU = \delta W_{np}$$

که در آن δW_{np} کار نیروهای غیرپایستار است.

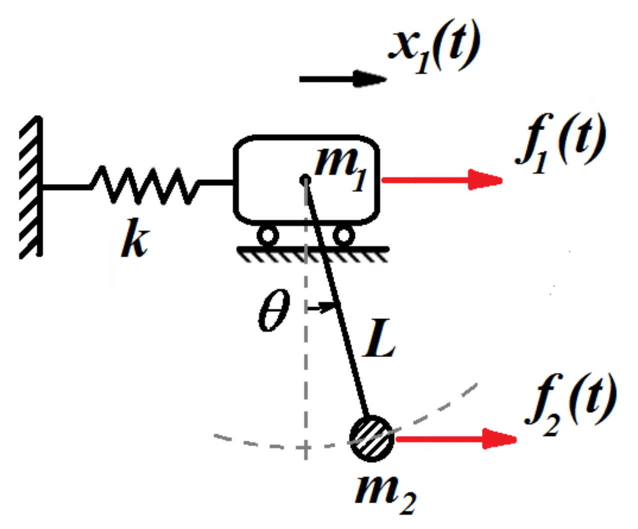
روش لاگرانژ

در روش لاگرانژ برای استخراج معادله‌های حرکت از مفهوم انرژی بهره گرفته می‌شود. برای این کار ابتدا انرژی جنبشی و پتانسیل سیستم بر حسب مختصات تعمیم یافته بدست می‌آیند. سپس با استفاده از اصل کار مجازی تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل در یک جابجایی مجازی حول حالت تعادل محاسبه می‌گردند. پس از آن با مساوی قرار دادن این مقادیر با کار مجازی نیروهای غیرپایستار، معادله‌های دیفرانسیل حرکت استخراج می‌شوند.

پیش از بیان روش لاگرانژ، ابتدا در قالب یک مثال رابطه‌ی بین انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی یک مجموعه‌ی چند درجه آزادی را با مختصات تعمیم یافته‌ی آن مجموعه نشان می‌دهیم.

یک آونگ با پایه‌ی متحرک را مطابق شکل در نظر بگیرید. برای این مجموعه‌ی دو درجه آزادی، می‌توانیم از مختصات تعمیم یافته‌ی x و θ استفاده نماییم:

$$q_1 = x\,, \qquad q_2 = \theta$$



یک آونگ با پایه متحرک

با توجه به شکل انرژی پتانسیل سیستم برابر است با مجموع انرژی کرنشی فنر و انرژی پتانسیل گرانشی آونگ:

$$U = \frac{۱}{۲} k\, x^{۲} + m_{۲} g\, L (۱ - \cos\theta)$$
$$= \frac{۱}{۲} k\, q_{۱}^{۲} + m_{۲} g\, L (۱ - \cos q_{۲})$$

و انرژی جنبشی کل برابر است با مجموع انرژی جنبشی آونگ و گاری:

$$T = \frac{۱}{۲} m_{۱} V_{۱}^{۲} + \frac{۱}{۲} m_{۲} V_{۲}^{۲}$$

از طرفی با توجه به شکل بردار سرعت گاری و آونگ را می‌توان در دستگاه کارتزین مطابق زیر نوشت:

$$\vec{V_{۱}} = \dot{x}\, i, \qquad \vec{V_{۲}} = (\dot{x} + L\dot{\theta}\cos\theta)\, i + L\dot{\theta}\sin\theta\, j$$

پس می‌توان گفت:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}^2 + 2\dot{x}\,\dot{\theta}\, L \cos\theta + L^2 \dot{\theta}^2 \cos^2\theta + L^2 \dot{\theta}^2 \sin^2\theta)$$

$$= \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 L \cos q_2 + L^2 \dot{q}_2^2)$$

کار نیروهای غیرپایستار را نیز با فرض کوچک بودن زاویه دوران، می‌توان مطابق زیر بدست آورد:

$$\delta W_{np} = f_1 \delta x + f_2 (\delta x + L\delta\theta)$$

$$= (f_1 + f_2)\delta q_1 + (f_2 L)\delta q_2$$

ملاحظه می‌شود که انرژی پتانسیل مجموعه تنها به موقعیت و در نتیجه تنها به مختصات تعمیم یافته (q_i) بستگی دارد. حال آنکه انرژی کرنشی که به سرعت بستگی دارد، چون خود سرعت می‌تواند تابع موقعیت باشد، علاوه بر مشتقات زمانی مختصات تعمیم یافته ($\dot{q}_i$) می‌تواند به خود مختصات تعمیم یافته نیز بستگی داشته باشد. پس در حالت کلی می‌توان نوشت:

$$T = T(\dot{q}_۱, \dot{q}_۲, \ldots, q_۱, q_۲, \ldots)$$

$$U = U(q_۱, q_۲, \ldots)$$

بنابراین، تغییرات انرژی جنبشی از رابطه زیر بدست می آید:

$$dT = \sum_{i=۱}^{N} \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i + \sum_{i=۱}^{N} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \qquad (I)$$

به همین ترتیب، تغییرات انرژی پتانسیل برابر است با

$$dU = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i$$

کار نیروهای غیرپایستار را نیز در جابجایی مجازی δq_i می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$\delta W_{np} = \sum_{i=1}^{N} Q_i \, \delta q_i = Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \cdots$$

که در آن Q_i را نیروی تعمیم یافته می‌نامیم.

در یک جابجایی مجازی $dq_i = \delta q_i$ است. بنابراین می‌توان گفت بجز عبارت دوم از سمت راست معادله‌ی تغییرات انرژی جنبشی، عبارت‌های تغییرات انرژی جنبشی، تغییرات انرژی پتانسیل و کار نیروهای غیرپایستار همگی بر حسب جابجایی مجازی بیان شده اند. برای آنکه عبارت مذکور نیز بر حسب جابجایی مجازی کوچک δq_i بیان گردد، این عبارت را اندکی دستکاری می کنیم.

با توجه به مثال ذکر شده می‌توان گفت که وابستگی انرژی جنبشی به مشتقات زمانی مختصات تعمیم یافته از مرتبه دوم است:

$$T = T(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} m_{ij}\dot{q}_i\,\dot{q}_j \qquad (II)$$

که در آن m_{ij} یک ضریب ثابت یا متغیر است که می‌تواند تابعی از مختصات تعمیم یافته باشد و N تعداد درجات آزادی سیستم را مشخص می کند. مثلاً در مثال مذکور داریم:

$$m_{11} = m_1 + m_2, \qquad m_{12} = m_{21} = m_2 L \cos q_2, \qquad m_{22} = m_2 L^2$$

بنابراین، می توان گفت

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = \sum_{j=1}^{N} m_{ij}\,\dot{q}_j$$

با ضرب رابطه‌ی بالا در q_i و جمع گرفتن بر روی i، بدست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} m_{ij}\, \dot{q}_i\, \dot{q}_j = 2T$$

با دیفرانسیل گیری از رابطه بالا خواهیم داشت:

$$2dT = \sum_{i=1}^{N} d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \qquad (III)$$

با مقایسه رابطه های (I) و (III)، خواهیم داشت:

$$2dT - dT = \sum_{i=1}^{N} d\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i$$

با ضرب رابطه‌ی بالا در q_i و جمع گرفتن بر روی i، بدست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} m_{ij}\,\dot{q}_i\,\dot{q}_j = ۲T$$

با دیفرانسیل گیری از رابطه بالا خواهیم داشت:

$$۲dT = \sum_{i=1}^{N} d\,(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i})\dot{q}_i + \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}d\dot{q}_i \qquad (III)$$

با مقایسه رابطه های (I) و (III)، خواهیم داشت:

$$۲dT - dT = \sum_{i=1}^{N} d\,(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i})\dot{q}_i - \sum_{i=1}^{N}\frac{\partial T}{\partial q_i}dq_i$$

که با استفاده از رابطه $\dot{q}_i = dq_i / dt$، نتیجه می دهد:

$$dT = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) dq_i - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial T}{\partial q_i} dq_i$$

اکنون با معادل قرار دادن تغییرات انرژی مکانیکی سیستم با کار نیروهای غیرپایستار، داریم:

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} \right) dq_i = \sum_{i=1}^{N} Q_i \, \delta q_i$$

از آنجایی که جابجایی‌های مجازی مقادیر دلخواهی هستند که مستقل از همدیگر می‌باشند، رابطه‌ی فوق تنها زمانی صادق است که

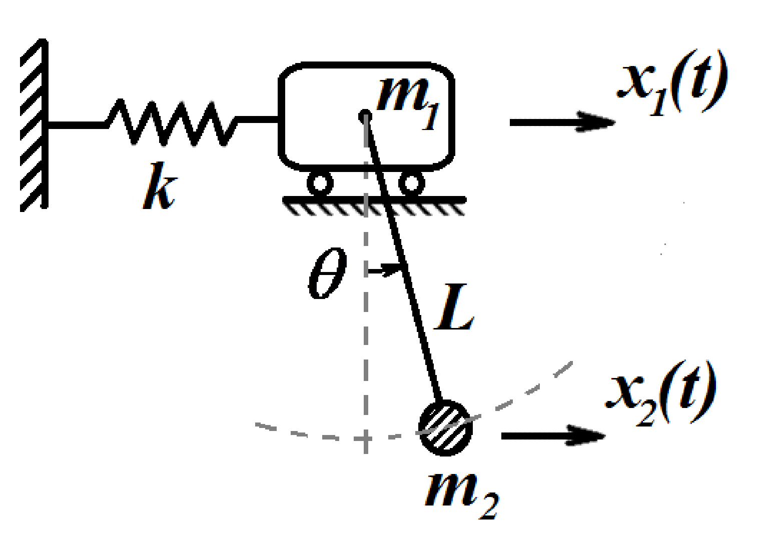
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q_i\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, N$$

رابطه‌ی فوق را رابطه‌ی لاگرانژ می‌نامند که به تعداد درجه‌های آزادی سیستم (به تعداد مختصات تعمیم یافته) معادله‌ی دیفرانسیل حرکت ارائه می‌نماید. در پاره‌ای از مراجع با تعریف عبارت لاگرانژین به شکل $L=T\text{-}U$، و با استفاده از این حقیقت که $\partial U / \partial \dot{q}_i = 0$ است، رابطه‌ی لاگرانژ را به شکل زیر نیز ارائه می کنند:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=Q_i\,, \qquad i=۱,۲,\ldots,N$$

در ادامه این فصل خواهیم دید که چگونه روش لاگرانژ می‌تواند به سادگی و بدون توجه به نیروهای تکیه‌گاهی و نیروهای مفصلی، معادلات حرکت را برای سیستم‌های پایستار و غیرپایستار ارائه نماید. اما پیش از آن خاطر نشان می‌سازد که روش لاگرانژ نه تنها برای سیستم‌های گسسته و چند درجه آزادی، بلکه برای سیستم‌های پیوسته که دارای بی‌نهایت درجه آزادی هستند نیز ابزار بسیار کارآمدی است.

مثال



معادلات حرکت سیستم گاری و آونگ نشان داده شده در شکل مقابل را با استفاده از روش لاگرانژ استخراج کنید و آن را در شکل ماتریسی بیان کنید.

حل: با توجه به شکل، تمام نیروهای وارد بر سیستم پایستار هستند و کار نیروهای غیرپایستار برابر صفر است. در نتیجه نیروهای تعمیم یافته وارد بر سیستم نیز برابر صفر هستند. چنانکه پیشتر دیدیم، با انتخاب مختصات تعمیم یافته $q_1 = x$ و $q_2 = \theta$، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل این سیستم را می‌توان به شکل زیر استخراج کرد:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 L \cos q_2 + L^2 \dot{q}_2^2)$$

$$U = \frac{1}{2} k\, q_1^2 + m_2 g L (1 - \cos q_2)$$

در نتیجه داریم

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m_1 \dot{q}_1 + m_2 \dot{q}_1 + m_2 \dot{q}_2 L \cos q_2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{q}_1 + (m_2 L \cos q_2)\ddot{q}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m_2 \dot{q}_1 L \cos q_2 + m_2 L^2 \dot{q}_2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) = (m_2 L \cos q_2)\ddot{q}_1 + (m_2 L^2)\ddot{q}_2$$

همچنین

$$\frac{\partial T}{\partial q_1}=\frac{\partial T}{\partial q_2}=0,\qquad \frac{\partial U}{\partial q_1}=k\,q_1,\qquad \frac{\partial U}{\partial q_2}=m_2 g\,L\sin q_2$$

در نهایت با فرض کوچک بودن زاویه‌ی دوران میله و جایگذاری در رابطه‌ی لاگرانژ بدست می‌آید:

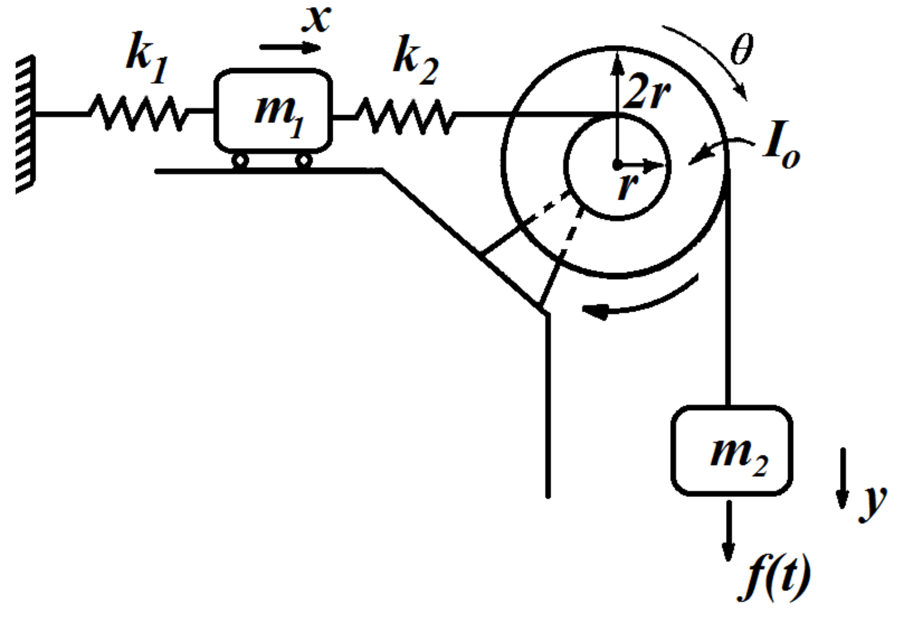
$$i=1 \quad\rightarrow\quad (m_1+m_2)\ddot{q}_1+(m_2 L)\ddot{q}_2+k\,q_1=0$$

$$i=2 \quad\rightarrow\quad (m_2 L)\ddot{q}_1+(m_2 L^2)\ddot{q}_2+m_2 g\,L\,q_2=0$$

روابط فوق را در شکل ماتریسی می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\begin{bmatrix} m_1+m_2 & m_2 L \\ m_2 L & m_2 L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{q}_1\\ \ddot{q}_2\end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m_2 g\,L \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}q_1\\ q_2\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\end{Bmatrix}$$

مثال



با انتخاب مختصات تعمیم یافته‌ی مناسب و با استفاده از روش لاگرانژ، معادلات سیستم نشان داده شده در شکل روبرو را در فرم ماتریسی استخراج کنید.

حل: با توجه به شکل، مقدار جابجایی بلوک m_2 و دوران قرقره مستقل از هم نیستند و $y = 2r\theta$ است. بنابراین برای سیستم دو درجه آزادی نشان داده شده می‌توانیم از مختصات تعمیم یافته $q_1 = x$ و $q_2 = y$ استفاده نماییم. از آنجایی که سیستم پایستار است، کار نیروهای غیرپایستار برابر صفر است و در نتیجه بردار نیروهای تعمیم یافته نیز برابر صفر می‌باشد.

با استفاده از مختصات تعریف شده و رابطه قیدی مذکور، انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل سیستم را می‌توان به شکل زیر بدست آورد:

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} I_O \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}\left(m_2 + \frac{I_O}{4r^2}\right)\dot{q}_2^2$$

$$U = \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 (r\theta - x)^2 = \frac{1}{2} k_1 q_1^2 + \frac{1}{2} k_2 \left(\frac{q_2}{2} - q_1\right)^2$$

بنابراین داریم

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_۱} = m_۱ \dot{q}_۱ \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_۱}\right) = m_۱ \ddot{q}_۱$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_۲} = \left(m_۲ + \frac{I_O}{۴r^۲}\right)\dot{q}_۲ \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_۲}\right) = \left(m_۲ + \frac{I_O}{۴r^۲}\right) \ddot{q}_۲$$

و

$$\frac{\partial T}{\partial q_۱} = \frac{\partial T}{\partial q_۲} = ۰, \qquad \frac{\partial U}{\partial q_۱} = k_۱ q_۱ + k_۲ \left(\frac{q_۲}{۲} - q_۱\right)(-۱), \qquad \frac{\partial U}{\partial q_۲} = k_۲ \left(\frac{q_۲}{۲} - q_۱\right)\left(\frac{۱}{۲}\right)$$

در نتیجه معادلات لاگرانژ را می‌توان با به شکل زیر نوشت:

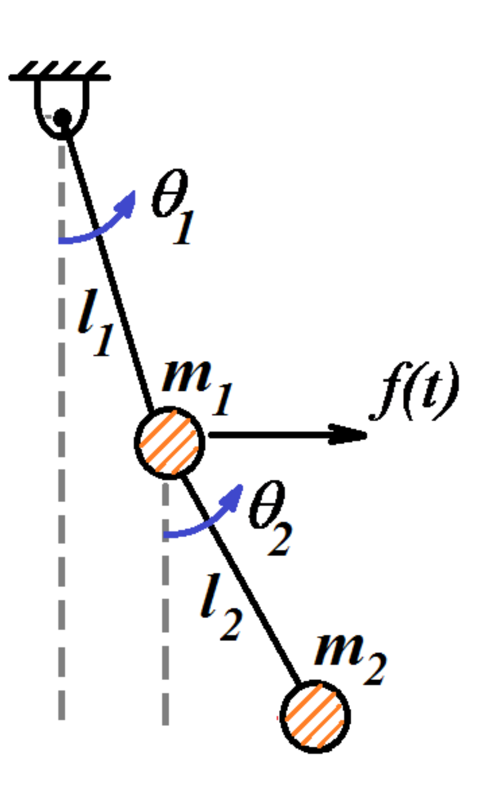
$$i = ۱ \qquad \rightarrow \qquad m_۱\ddot{q}_۱ + (m_۲ L)\ddot{q}_۲ + (k_۱ + k_۲)q_۱ - \frac{k_۲}{۲} q_۲ = ۰$$

$$i = ۲ \qquad \rightarrow \qquad \left(m_۲ + \frac{I_O}{۴r^۲}\right) \ddot{q}_۲ + \frac{k_۲}{۴} q_۲ - \frac{k_۲}{۲} q_۱ = ۰$$

که در فرم ماتریسی به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 + \dfrac{I_O}{4r^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -\dfrac{k_2}{2} \\ -\dfrac{k_2}{2}a & \dfrac{k_2}{4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

مثال



شکل مقابل یک آونگ دوتایی را نشان می‌دهد که توسط نیروی $f(t)$ تحریک می‌شود. با استفاده از روش لاگرانژ معادلات حرکت آن را بیابید و سپس در فرم ماتریسی بیان کنید.

حل: با توجه به شکل، سیستم دو درجه آزادی است و می‌توان برای بدست آوردن معادلات حرکت آن از مختصات تعمیم یافته $q_1=\theta_1$ و $q_2=\theta_2$ استفاده کرد. سیستم دارای دو جرم متمرکز است و می‌توان بردار سرعت آنها را در دستگاه مختصات کارتزین به شکل زیر تصویر کرد:

$$\vec{V}_1 = l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1\, i + l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1\, j$$

$$\vec{V}_1 = (l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2)i + (l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2)j$$

در نتیجه داریم:

$$V_1^2 = (l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1)^2 + (l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1)^2 = l_1^2\dot{\theta}_1^2$$

$$V_2^2 = (l_1\dot{\theta}_1\cos\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\cos\theta_2)^2 + (l_1\dot{\theta}_1\sin\theta_1 + l_2\dot{\theta}_2\sin\theta_2)^2$$

$$= l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1 l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_1-\theta_2)$$

بنابراین انرژی جنبشی سیستم برابر است با

$$T = \frac{1}{2} m_1 V_1^2 + \frac{1}{2} m_2 V_2^2$$
$$= \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \left(l_1^2 \dot{q}_1^2 + l_2^2 \dot{q}_2^2 + 2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) \right)$$

با انتخاب تکیه‌گاه به عنوان سطح پتانسیل گرانشی، انرژی پتانسیل سیستم نیز برابر است با

$$U = -m_1 g\, l_1 \cos\theta_1 - m_2 g\, (l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2)$$
$$= -m_1 g\, l_1 \cos q_1 - m_2 g\, (l_1 \cos q_1 + l_2 \cos q_2)$$

در نتیجه می‌توان گفت:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m_1 l_1^2 \dot{q}_1 + m_2 l_1^2 \dot{q}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{q}_2 \cos(q_1 - q_2)$$
$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = m_2 l_2^2 \dot{q}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \cos(q_1 - q_2)$$

و بنابراین

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) = (m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2)\ddot{q}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{q}_2 \cos(q_1 - q_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{q}_2 \sin(q_1 - q_2) \times (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) = m_2 l_2^2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{q}_1 \cos(q_1 - q_2) - m_2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \sin(q_1 - q_2) \times (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)$$

به همین ترتیب

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_1 - q_2)(1), \qquad \frac{\partial U}{\partial q_1} = (m_1 g l_1 + m_2 g l_1) \sin q_1,$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = 2 l_1 l_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 \sin(q_1 - q_2)(-1), \qquad \frac{\partial U}{\partial q_2} = m_2 g l_2 \sin q_2.$$

کار نیروهای غیرپایستار نیز برابر است با

$$\delta W_{np} = f(t) \cos\theta_1 \delta\theta_1 = f(t) \cos q_1 \delta q_1$$

پس

$$Q_1 = f(t)\cos q_1, \qquad Q_2 = 0$$

حال با فرض کوچک بودن زوایای دوران و با صرفنظر کردن از عبارت‌های مرتبه دوم و بالاتر، معادله‌های لاگرانژ را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$i = 1 \quad \rightarrow \quad (m_1 l_1^2 + m_2 l_1^2)\ddot{q}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{q}_2 + (m_1 g l_1 + m_2 g l_1) q_1 = f(t)$$

$$i = 2 \quad \rightarrow \quad m_2 l_1 l_2 \ddot{q}_1 + m_2 l_2^2 \ddot{q}_2 + m_2 g l_2 q_2 = 0$$

معادله های بالا را می‌توان در فرم ماتریسی مطابق زیر بازنویسی کرد:

$$\begin{bmatrix} (m_1 + m_2) l_1^2 & m_2 l_1 l_2 \\ m_2 l_1 l_2 & m_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (m_1 + m_2) g l_1 & 0 \\ 0 & m_2 g l_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$